Mocnost bodu ke kružnici - řešená úloha

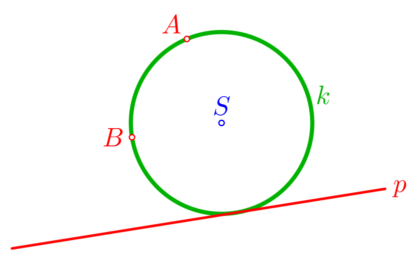
Apolloniova úloha BBp

Řešené úlohy

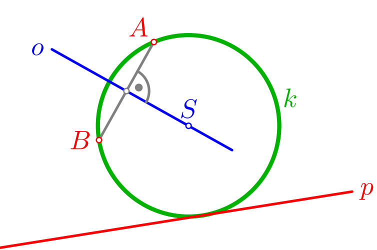
Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází danými různými body A, B a dotýká se dané přímky p.

Rozbor úlohy:

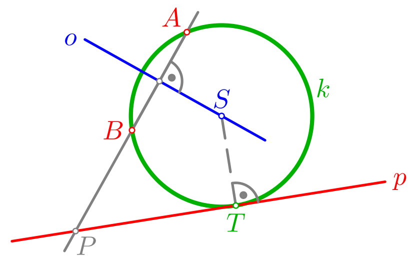
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k o středu S a libovolném poloměru r, zvolme na ní dva body A, B, doplňme tečnu p a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí...



- střed S kružnice k musí ležet na ose o úsečky AB (viz množinu $M2$ v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti)



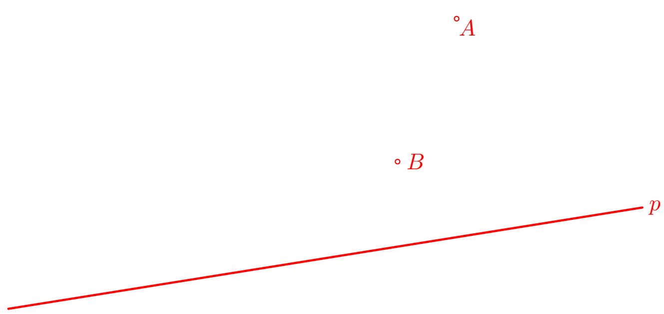
- nechť je $P = p \cap AB$ a T je bodem dotyku přímky p a kružnice k; z vlastností mocnosti bodu P ke kružnici k pak plyne: $|PT|^2 = |PA| \cdot |PB|$; díky tomu lze bod T dotyku sestrojit...



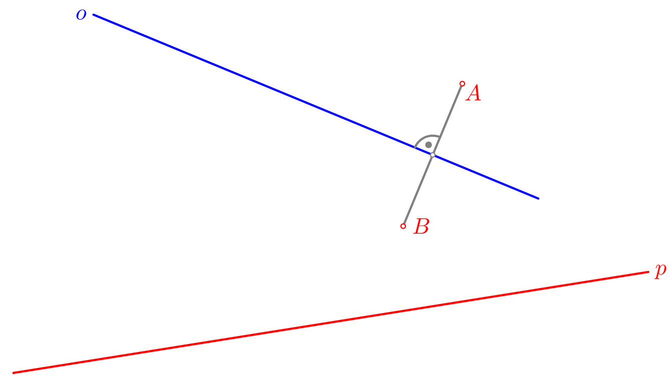
$\square$

Konstrukce:

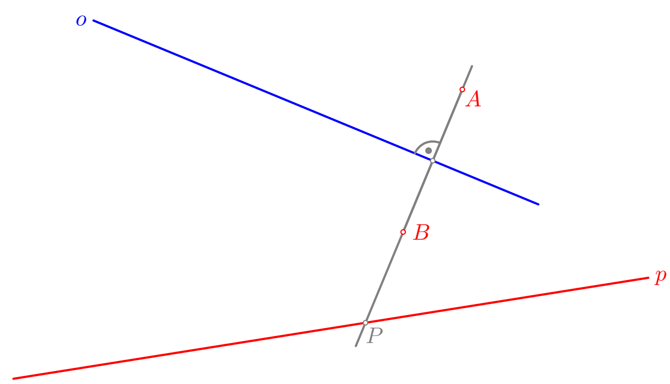
- zadání úlohy: jsou dány různé body A, B a přímka p



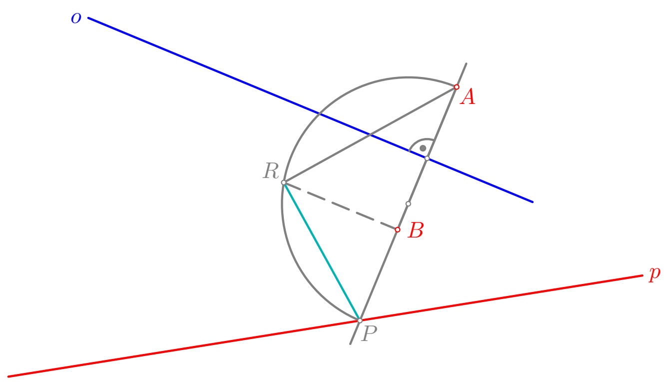
- podle rozboru sestrojme nejprve osu o úsečky AB



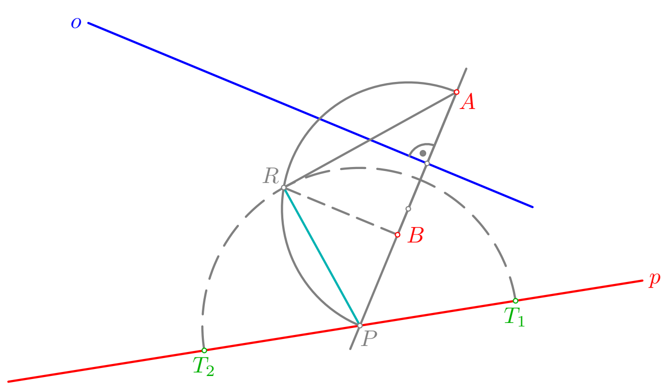
- dále najděme průsečík $P = p \cap AB$



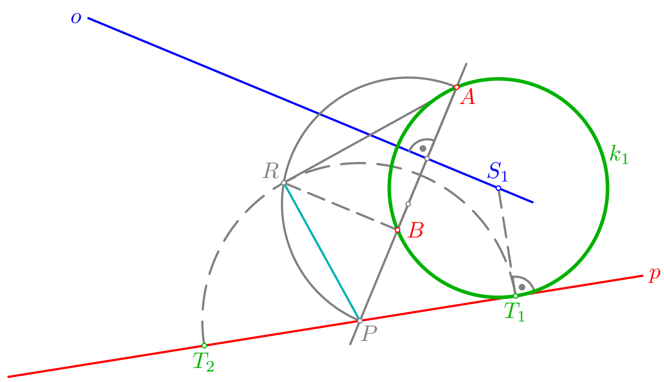
- nad úsečkou AP sestrojme Thaletovu půlkružnici a na ní vrchol R pravoúhlého trojúhelníka ARP, v němž je úsečka BR výškou; podle Eukleidovy věty o odvěsně pak platí $|PR|^2 = |PA| \cdot |PB|$



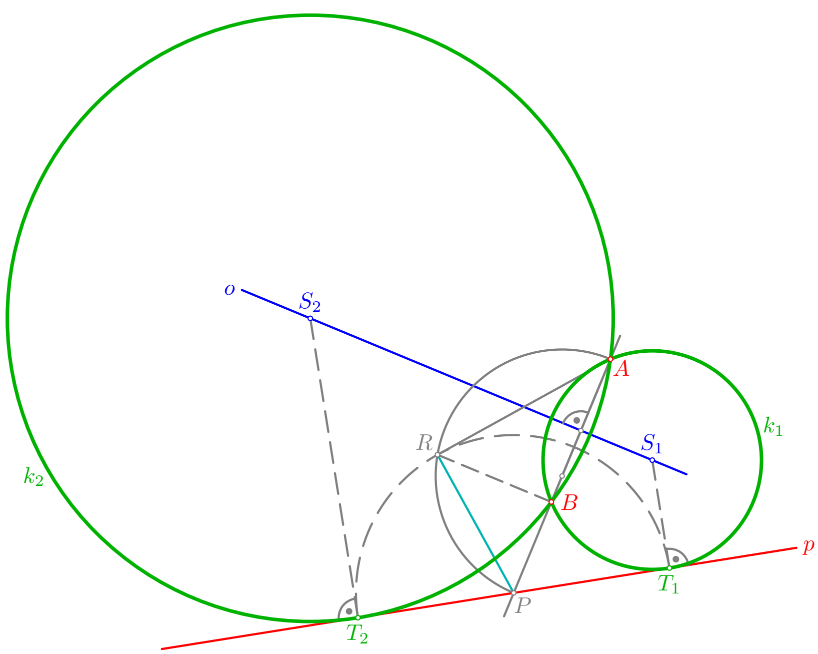
- nyní stačí na přímku p od bodu P nanést velikost úsečky PR a tím získáme body T_1, T_2 dotyku přímky p a hledaných kružnic k_1, k_2



- střed S_1 kružnice $k_1(S_1, r_1)$ leží na ose o a na kolmici vedené bodem T_1 k přímce p



- podobně protíná normála k přímce p vedená bodem T_2 osu o v bodě S_2, který je středem druhé hledané kružnice $k_2(S_2, r_2)$, jež také prochází danými body A, B a dotýká se dané přímky p



□

Diskuze:

Úloha nemá žádné řešení, jestliže body A, B leží v různých polorovinách určených hraniční přímkou p nebo je-li $A \in p$ a současně $B \in p$; je-li $AB \parallel p$, má úloha právě jedno řešení (osa o úsečky AB protíná přímku p přímo v bodě T dotyku); leží-li body A, B uvnitř jedné poloroviny ohraničené přímkou p a $p \nparallel AB$, pak má úloha právě dvě řešení; jestliže právě jeden z bodů A, B leží na přímce p, jedná se o Pappovu úlohu Bpp.