

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Institut matematiky a deskriptivní geometrie

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Matematika IV

**Jaroslav Vlček
Jiří Vrbický**

Ostrava

Předmluva

Skriptum "Diferenciální rovnice", které vzniklo na Institutu matematiky a deskriptivní geometrie jako součást inovované řady učebních textů základního kurzu matematiky v inženýrském studiu, je určeno pro studenty všech fakult VŠB-TU s výjimkou ekonomické. Při výběru a zpracování zařazených témat jsme vycházeli z učebních plánů a osnov platných ve školním roce 1995/96 pro předměty *Matematika II* a *Matematika III* na FS, FMMI a HGF a dále z náplně předmětů *Matematická analýza II* a *Matematická analýza III* na Fakultě elektrotechniky a informatiky. Předpokládáme také kompatibilitu s kurzem matematiky na nově vzniklé Fakultě stavební.

Pro studium tohoto skriptu se předpokládá zvládnutí matematické analýzy a algebry v rozsahu základního kurzu inženýrského studia. Jmenovitě se jedná o soustavy lineárních algebraických rovnic a maticový počet, diferenciální počet funkcí jedné a více proměnných a integrální počet funkcí jedné proměnné.

Jsme si vědomi toho, že úspěšnost studijního textu je mimo jiné závislá na vyváženosti mezi teorií a příklady. Kladli jsme proto důraz na dostatečný počet řešených úloh, kterými je doplněn teoretický výklad. Příklady k samostatnému procvičení, které doplňují každý větší tematický celek, jsou uvedeny v míře, která odpovídá vymezenému rozsahu skriptu. Použitá označení veličin jsou standardní a odpovídají knize [Re]. Symbol „ $|\cdot|$ “ je používán jednak pro absolutní hodnotu čísla, jednak jako eukleidovská norma, přičemž význam je všude zřejmý z kontextu. Ve druhé kapitole, kde jsou ukazovány postupy řešení jednotlivých typů diferenciálních rovnic 1. řádu, zapisujeme v řadě případů v souladu se zavedenou praxí rovnici jako vztah mezi diferenciály. Činíme tak s vědomím, že tento přístup není zcela korektní. Ve čtvrté kapitole je ve výkladu o soustavách diferenciálních rovnic používán aparát vektorových funkcí, který může méně obeznámeným studentům činit potíže. Domníváme se ovšem, že potřebné informace k této problematice lze nalézt v řadě jiných dostupných publikací, a proto jsme v tomto směru neusilovali o detailnější pohled.

Autorem první a čtvrté kapitoly je Jaroslav Vlček, druhou kapitolu napsal Jiří Vrbický, třetí kapitola vznikla společně. Přejí bychom si, aby tato publikace byla také připomenutím kolegy RNDr. Miloše Sedláčka, jehož spolupráce byla bohužel již v úvodu tragicky přerušena.

Nezanedbatelným podílem přispěla ke konečnému výsledku také naše kolegyně Mgr. Marcela Kahánková, a to jak pečlivým přečtením, tak cennými věcnými připomínkami.

Vřelý dík patří také recenzentům doc. RNDr. Květomilu Stachovi, CSc. a doc. RNDr. Juraji Kostrovi, CSc., jejichž kritické připomínky jsme využili ke zvýšení kvality a srozumitelnosti textu.

Ostrava, březen 1997.

Autoři.

Obsah

1. Úvod

1.1. Základní pojmy	5
1.2. Druhy řešení diferenciálních rovnic	7
1.3. Cauchyho úloha, existence a jednoznačnost řešení	8

2. Metody řešení diferenciálních rovnic prvního řádu

2.1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými	15
2.2. Homogenní diferenciální rovnice	17
2.3. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu	21
2.4. Bernoulliho diferenciální rovnice	25
2.5. Exaktní diferenciální rovnice	28
2.6. Integrační faktor	34
2.7. Některé další speciální typy DR prvního řádu	37
2.8. Směrové pole	43
2.9. Ortogonální trajektorie	45
2.10. Některé numerické metody řešení DR 1. řádu	48

3. Diferenciální rovnice vyšších řádů

3.1. Základní pojmy	57
3.2. Speciální typy diferenciálních rovnic n -tého řádu	59
3.3. Vlastnosti lineárních diferenciálních rovnic	61
3.4. Struktura řešení zkrácené DR	64
3.5. Zkrácená LDR s konstantními koeficienty	67
3.6. Řešení úplné LDR metodou variace konstant	71
3.7. LDR se speciální pravou stranou	77
3.8. Eulerova a Lagrangeova rovnice	83
3.9. Harmonické kmity	87

4. Soustavy diferenciálních rovnic

4.1. Základní pojmy	99
4.2. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic	104
4.3. Homogenní SLDR	104
4.4. Homogenní SLDR s konstantními koeficienty	108
4.5. Nehomogenní lineární soustavy	113
4.6. Základy teorie stability	119
4.7. Fázový obraz řešení homogenní LSDR 2. řádu	121

Literatura	131
------------	-----

1. Úvod

1.1. Základní pojmy

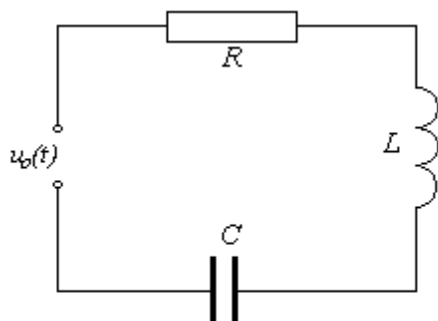
V inženýrské praxi se velmi často setkáváme s úlohami, které vznikají odvozením z fyzikálních zákonů, geometrických vztahů či jiných závislostí tak, že ve svém důsledku představují rovnici nebo soustavu rovnic pro neznámou funkci a její derivace. Hovoříme pak o diferenciálních rovnicích, popřípadě o soustavách diferenciálních rovnic. Několik následujících příkladů je ukázkou takto formulovaných úloh.

1.1.1. Příklad. Najdeme rovnici, jejímž řešením je jednoparametrická soustava soustředných kružnic $x^2 + y^2 = C^2$ ($C > 0$ je poloměr).

Řešení. Obě strany rovnice derivujeme: $2x + 2y \cdot y' = 0$; dále vyjádříme derivaci y podle x , takže hledaná rovnice má jeden z těchto tvarů:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{nebo} \quad y \cdot y' + x = 0.$$

1.1.2. Příklad. Vyjádřete časovou závislost elektrického proudu $i(t)$ v sériovém RLC obvodu se soustředěnými parametry při vstupním napětí $u(t)$ (obr.1.1).



Obr.1.1.

Řešení. Vyjádříme napětí na každém prvku obvodu:

$$u_R = i \cdot R, \quad u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_C = -\frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt; \text{ aplikujeme-li}$$

Kirchhoffův zákon, obdržíme tzv. integrodiferenciální rovnici ve tvaru

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt = u_0(t).$$

Jejím derivováním podle nezávisle proměnné t získáme diferenciální rovnici známou z teorie obvodů:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = u'_0(t).$$

1.1.3. Příklad. Sestavte jednoduchý model uzavřeného ekologického systému "kořist-dravec" z hlediska časového vývoje počtu jedinců obou populací.

Řešení. Označíme $x(t)$ počet jedinců v populaci kořisti, tj. potravy pro populaci dravců, v níž počet jedinců bude $y(t)$; dále budou A, B, C, D nezáporné konstanty, s jejichž pomocí vyjádříme (pro jednoduchost lineárním modelem) základní faktory změn počtu jedinců v populaci:

$A \cdot x, C \cdot y$ reprodukční schopnost příslušné populace,

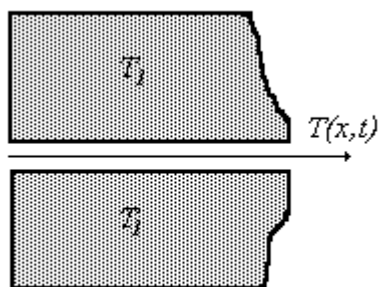
$B \cdot y$ úbytek kořisti působením dravců,

$D \cdot x$ přírůstek populace dravců jako důsledek dostatku potravy.

Chování systému v závislosti na čase t vyjadřuje tato soustava diferenciálních rovnic:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x - B \cdot y, \quad \frac{dy}{dt} = D \cdot x + C \cdot y.$$

1.1.4. Příklad. Vytvořte úlohu pro stanovení teplotní bilance konvektivního ohřevu kapaliny při průtoku dlouhým úzkým potrubím (obr. 1.2) rychlostí v .



Obr. 1.2.

Řešení. Teplotu kapaliny uvažujeme závislou na souřadnici x a na čase t , to znamená jako funkci $T(x,t)$; teplota okolního prostředí je konstantní o hodnotě $T_1 > T(x,t)$. Protože jde o úzké potrubí, můžeme předpokládat okamžitý ohřev v celém průtočném profilu. Bilanční rovnice vyjadřuje rovnost akumulovaného výkonu v objemové jednotce kapaliny a výkonu při přestupu tepla stěnou potrubí:

$$c \cdot \rho \cdot dT = \alpha \cdot (T_1 - T) \cdot dt,$$

kde c [J/(kg.K)] je měrná tepelná kapacita kapaliny, ρ [kg/m³] její hustota a α [W/(K.m³)] objemový součinitel přestupu tepla. Diferenciál teploty na levé straně je třeba rozepsat, takže dostáváme

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial t} dt \right) = \alpha(T_1 - T)dt;$$

na závěr vydělíme rovnici dt a uvážíme, že $dx/dt = v$ je rychlost proudění kapaliny. Teplotní bilance konvektivního ohřevu je tedy popsána touto diferenciální rovnicí:

$$c\rho v \frac{\partial T}{\partial x} + c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(T_1 - T).$$

1.1.5. Zobecnění. Uvedené příklady představují základní typy úloh s diferenciálními rovnicemi, se kterými se lze setkat. V prvních třech hledáme funkce jedné nezávisle proměnné; v takovém případě hovoříme o **obyčejných diferenciálních rovnicích** nebo o **soustavách obyčejných diferenciálních rovnic** (příklad 1.1.3). Poslední příklad je ukázkou **parciální diferenciální rovnice** 1. řádu pro funkci dvou proměnných. Studium tohoto typu rovnic je náplní speciálních kurzů matematiky a v tomto učebním textu se jimi nezabýváme.

1.1.6. Definice. Obyčejnou diferenciální rovnici nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje derivace (vyjádřená případně použitím diferenciálů) hledané funkce jedné proměnné. **Parciální diferenciální rovnici** nazýváme rovnici, v níž se vyskytují parciální derivace hledané funkce dvou nebo více proměnných.

Řádem diferenciální rovnice označujeme řád nejvyšší derivace neznámé funkce, který se v rovnici vyskytuje.

Diferenciální rovnici (v dalším textu píšeme zkráceně DR) budeme nadále rozumět obyčejnou DR, kterou budeme obecně zapisovat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{nebo} \quad y' = f(x, y) \quad \text{pro DR 1. řádu,} \quad (1.1)$$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{nebo} \quad y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{pro DR } n\text{-tého řádu.} \quad (1.2)$$

1.1.7. Poznámka. V příkladu 1.1.1 se jedná o rovnici prvního řádu a v příkladu 1.1.2 jsme odvodili diferenciální rovnici 2. řádu.

1.2. Druhy řešení diferenciálních rovnic

1.2.1. Definice. Řešením DR n -tého řádu na množině M nazýváme každou n -krát spojitě diferencovatelnou funkci na této množině, která dané rovnici vyhovuje.

Křivku, která znázorňuje některé řešení rovnice, nazýváme **integrální křivkou** této DR.

1.2.2. Druhy řešení DR. Rovnici považujeme za vyřešenou, známe-li všechna její řešení. Pro jejich nalezení slouží řada postupů, jejichž základní přehled chceme v tomto učebním textu ukázat. Druhy řešení DR obvykle klasifikujeme z hlediska obecnosti a z hlediska regularity.

Chceme-li se zaměřit na první z nich, provedeme generalizaci postupu z příkladu 1.1.1, který vedl k získání diferenciální rovnice pro jednoparametrický systém rovinných křivek. Libovolný takovýto systém zapíšeme rovnicí

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1.3a) \quad \text{resp.} \quad y = \varphi(x, C), \quad (1.3b)$$

kde C je parametr. Derivací podle x obdržíme

$$\Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C) \cdot y' = 0, \quad (1.4a) \quad \text{resp.} \quad y' = \varphi'_x(x, C). \quad (1.4b)$$

Vyloučíme-li parametr C z dvojic rovnic (1.3a), (1.4a) nebo (1.3b), (1.4b), získáme diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru (1.1), přičemž funkce (1.3a,b) představují dva možné tvary jejího řešení.

Obdobný postup lze použít pro systém křivek s n parametry $C_1, C_2, \dots, C_n$ o rovnici

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0. \quad (1.5)$$

K vyloučení parametrů potřebujeme nyní dalších n rovnic, které získáme postupným derivováním výchozího vztahu. Výsledkem bude DR n -tého řádu v některém z tvarů (1.2) a výraz (1.5), popřípadě jeho explicitní tvar

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n), \quad (1.6)$$

bude jejím řešením.

Nyní můžeme definovat následující druhy řešení z hlediska obecnosti. Řešení DR n -tého řádu dle definice 1.2.1. nazýváme

- **obecným řešením**, jestliže obsahuje n konstant $C_1, C_2, \dots, C_n$;
- **partikulárním** (neboli **částečným**) **řešením**, lze-li je získat z obecného pro konkrétní hodnoty konstant, které vypočteme nebo zvolíme;
- **výjimečným řešením** nelze-li je získat z obecného řešení pro žádný výběr konstant $C_1, C_2, \dots, C_n$ (existuje pouze u některých diferenciálních rovnic).

1.2.3. Příklad. Ověřte, že funkce $y = x \cdot \sin(\ln x + C)$ je obecným řešením rovnice

$$x \cdot y' - y - \sqrt{x^2 - y^2} = 0.$$

Ukažte dále, že lineární funkce $y = x$ je rovněž jejím řešením, avšak výjimečným.

Řešení. Ověření spočívá v obou případech ve výpočtu derivací a dosazení do zadané rovnice (proved'te samostatně); dále je vidět, že funkci $y = x$ nelze vytvořit z obecného řešení žádnou volbou konstanty C , což znamená, že jde o výjimečné řešení.

Hledisku **regulárnosti řešení** se budeme věnovat v následující kapitole.

1.3. Cauchyho úloha, existence a jednoznačnost řešení

1.3.1. Motivace. Vraťme se opět k příkladu 1.1.1, v němž byla obecným řešením diferenciální rovnice $y \cdot y' + x = 0$ soustava kružnic $x^2 + y^2 = C^2$. Její zadání můžeme doplnit požadavkem nalézt právě tu kružnici (obecně: integrální křivku), která prochází konkrétním bodem, například $[-1, 2]$. Dosazením hodnot $x = -1, y = 2$ do obecného řešení vypočteme $C = \sqrt{5}$. Křivka $x^2 + y^2 = 5$ je pak partikulárním řešením zadané rovnice pro bod určený počáteční podmínkou $y(-1) = 2$.

Právě popsaná úloha patří v aplikacích k velmi častým a budeme ji formulovat obecně, zatím pro DR 1. řádu.

1.3.2. Definice. Cauchyho úlohou pro diferenciální rovnici 1.řádu $F(x, y, y') = 0$ rozumíme určení partikulárního řešení této rovnice, které vyhovuje podmínce $y(x_0) = y_0$.

Jinými slovy: mezi integrálními křivkami rovnice hledáme právě tu, která prochází bodem $[x_0, y_0]$. Je zřejmé, že s Cauchyho úlohou je spojeno několik zásadních otázek: zda a na jaké množině řešení existuje, jak vypadá a jak se určí, kdy je jednoznačné. Odpovědi poskytne následující výklad.

1.3.3. Picardovy aproximace. Abychom mohli stanovit postačující podmínky existence řešení Cauchyho úlohy $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, ukážeme jeden z klasických postupů jeho konstrukce. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ je spojitá na oblasti D , která obsahuje bod $[x_0, y_0]$. Picardovy aproximace hledaného řešení $y(x)$ definujeme jako posloupnost funkcí

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) \cdot dt, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) \cdot dt \quad \text{atd.} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Je na místě poznamenat, že v praxi není tento algoritmus příliš výhodný, neboť i v případě, že posloupnost $\{y_n(x)\}$ konverguje k řešení $y(x)$, je konvergence velmi pomalá, a navíc jsou k dispozici efektivnější numerické metody. Pro ilustraci připojujeme jednoduchou úlohu.

1.3.4. Příklad. Aproximujte řešení rovnice $y' = x + y$ s podmínkou $y(0) = 1$ pro $n = 2$.

Řešení. V první řadě je $f(x, y) = x + y$ spojitá v libovolné oblasti obsahující bod o souřadnicích $x_0 = 0, y_0 = 1$. Podle (1.7) dále vypočteme:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t + 1) \cdot dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[t + \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) \right] dt = \dots = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}.$$

Získaná funkce je ovšem aproximací přesného řešení, které má tvar

$$y(x) = 2 \cdot e^x - x - 1$$

neboli - po vyjádření exponenciální funkce Maclaurinovým rozvojem

$$y(x) = 2 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) - x - 1 = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \dots$$

Vidíme, že druhý člen posloupnosti Picardových aproximací vyjadřuje výsledek s dostatečnou přesností pouze v malém okolí bodu $x_0 = 0$.

1.3.5. Definice. Říkáme, že funkce $f(x, y)$ splňuje na oblasti D **Lipschitzovu podmínku** vzhledem k proměnné y , existuje-li konstanta $L > 0$ taková, že platí:

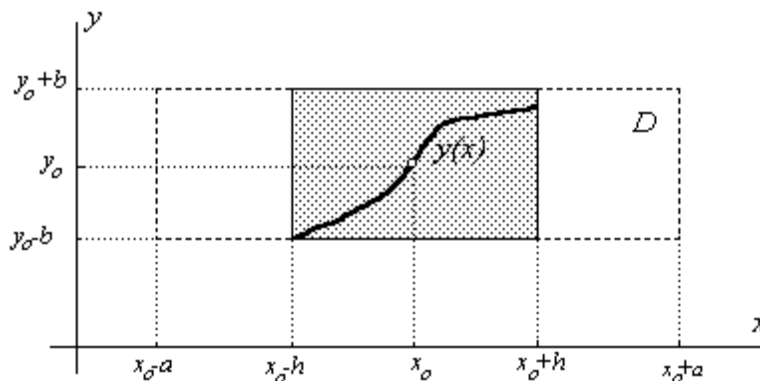
$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2| \quad \forall [x_0, y_1], [x_0, y_2] \in D.$$

1.3.6. Geometrická interpretace Lipschitzovy podmínky je patrna z obr.1.5. Platí-li tato podmínka, pak pro každou dvojici bodů je rozdíl funkčních hodnot nejvýše roven L -násobku jejich vzdálenosti (na obr.1.5 je $L \sim 0,5$).

1.3.7. Věta (existence řešení Cauchyho úlohy). Nechť je funkce $f(x, y)$ spojitá a ohraničená na dvojrozměrné oblasti $D = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, takže platí

$$|f(x, y)| \leq M, \quad M > 0 \quad \forall [x, y] \in D.$$

Pak diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ má alespoň jedno řešení $y(x)$, které prochází bodem $[x_0, y_0] \in D$ a je definováno na obdélníku $(x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, přičemž $h = \min\{a, b/M\}$. (obr.1.3)



Obr.1.3

Důkaz. Z předpokladů věty lze odvodit, že posloupnost Picardových aproximací (1.7) konverguje k řešení Cauchyho úlohy v bodě $[x_0, y_0] \in D$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x).$$

Podrobný postup lze nalézt v doporučené literatuře, např. [Ku], str. 20.

1.3.8. Příklad. Je dána diferenciální rovnice $y' = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4y})$.

a) Určete množinu všech bodů, na níž existuje řešení této rovnice a ukažte, že funkce $y = \varphi(x, C) = \frac{1}{2}Cx - \frac{1}{4}C^2$ je jejím obecným řešením.

b) Ověřte, že rovnice má výjimečné řešení $y = \frac{1}{4}x^2$, přičemž každým bodem této křivky procházejí nejméně dvě řešení.

Řešení. a) Do zadané rovnice dosadíme zadanou funkci $y = \varphi(x, C)$ a její derivaci $y' = C/2$, čímž se snadno přesvědčíme o tom, že funkce rovnici vyhovuje. Toto obecné řešení je jednoparametrická soustava přímek, jak ukazuje obr.1.4. Funkce

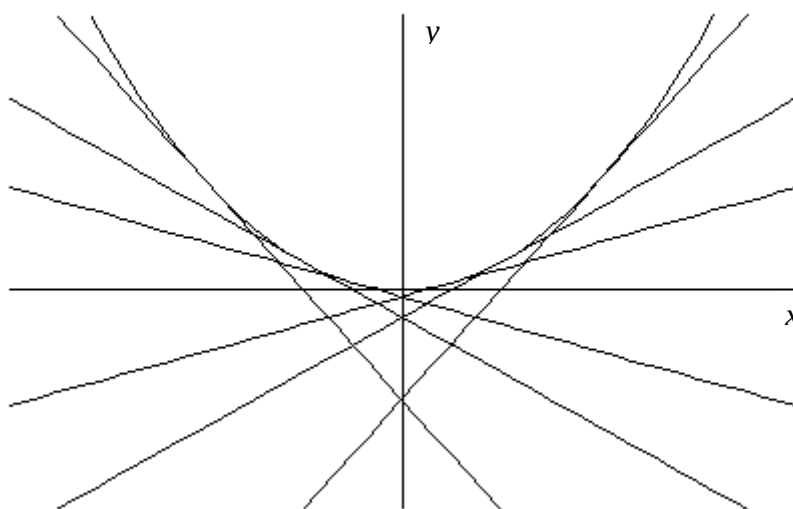
$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4y})$$

není definovaná (a tudíž ani spojitá) pro $y > x^2/4$, a proto řešení rovnice existuje pouze na uzavřené oblasti ohraničené parabolou $y = \frac{1}{4}x^2$ (viz obr. 1.4).

b) Funkce $y = \frac{1}{4}x^2$ rovněž rovnici vyhovuje, jak se můžeme přesvědčit analogickým postupem, avšak zjevně není součástí obecného řešení. Zvolme na této křivce libovolný bod o souřadnicích $x = c_0, y = \frac{1}{4}c_0^2$; rovnice tečny k parabole v tomto bodě pak bude

$$y - \frac{1}{4}c_0^2 = \frac{1}{2}c_0(x - c_0), \text{ tj. } y = \frac{1}{2}c_0x - \frac{1}{4}c_0^2,$$

což je právě jedna přímka ze systému obecného řešení. Každým bodem paraboly (výjimečného řešení) tedy současně prochází další řešení, které je tečnou.



Obr.1.4

1.3.9. Poznámky. a) V uvedeném případě nazýváme výjimečné řešení **obálkou systému integrálních křivek obecného řešení**. Zároveň konstatujeme porušení jednoznačnosti Cauchyho úlohy na parabole (obálce) i v oblasti $y < x^2/4$, kde každým bodem prochází obecně nekonečně mnoho řešení rovnice. To můžeme vytvořit například jako sjednocení části tečny jdoucí zvoleným bodem až po bod dotyku, navazující části paraboly a části další tečny v jiném bodě.

b) Viděli jsme, že k zajištění existence řešení Cauchyho úlohy stačí požadovat podle věty 1.3.7 spojitost funkce $f(x,y)$; jednoznačnost řešení bude nutno zajistit silnější podmínkou.

1.3.10. Věta. Má-li funkce $f(x,y)$ na oblasti D ohraničenou parciální derivaci $f'_y(x,y)$, pak splňuje na D Lipschitzovu podmínku.

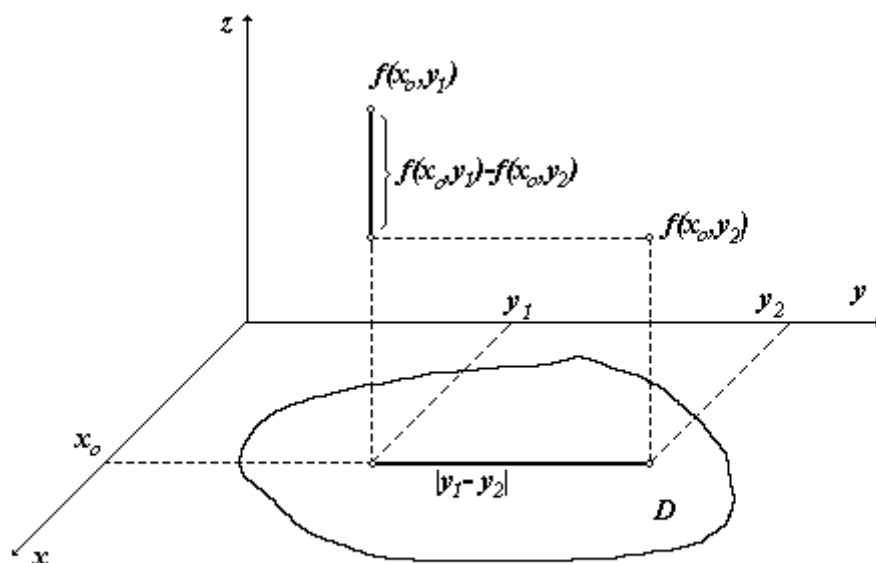
Důkaz. Protože je $f'_y(x,y)$ ohraničená, existuje reálné číslo L tak, že $|f'_y(x,y)| \leq L$ na D . Uvažujme dva libovolné body $[x_0, y_1], [x_0, y_2] \in D$; podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro ně existuje $\eta \in (y_1, y_2)$ tak, že

$$f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2) = f'_y(x_0, \eta) \cdot (y_1 - y_2),$$

tj. v důsledku ohraničenosti derivace

$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| = |f'_y(x_0, \eta)| \cdot |y_1 - y_2| \leq L \cdot |y_1 - y_2|,$$

což je Lipschitzova podmínka.



Obr. 1.5

1.3.11. Věta (jednoznačnost Cauchyho úlohy). Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá a ohraničená na oblasti D s vnitřním bodem $[x_0, y_0] \in D$. Splňuje-li $f(x,y)$ na D Lipschitzovu podmínku, pak existuje právě jedno řešení Cauchyho úlohy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

Důkaz. Existence řešení plyne z věty 1.3.7., jednoznačnost dokážeme sporem. Uvažujme dvě různá řešení $Y_1(x), Y_2(x)$ Cauchyho úlohy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, takže platí

$$Y'_1 = f(x, Y_1), \quad Y'_2 = f(x, Y_2),$$

přičemž $Y_1(x_0) = y_0$, $Y_2(x_0) = y_0$. Integrací obou rovnic v mezích od x_0 do x dostáváme

$$\int_{x_0}^x Y_1'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, Y_1(t)) dt, \quad \int_{x_0}^x Y_2'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, Y_2(t)) dt,$$

neboli

$$Y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y_1(t)) dt, \quad Y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y_2(t)) dt.$$

Rozdíl těchto řešení vyjádříme v absolutní hodnotě a aplikujeme Lipschitzovu podmínku:

$$|Y_1(x) - Y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^x |f(t, Y_1(t)) - f(t, Y_2(t))| dt \right| \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x |Y_1(t) - Y_2(t)| dt \right|.$$

Označme $K = \max |Y_1(x) - Y_2(x)|$ pro $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$, kde h je zavedeno ve větě 1.3.7. Pokud by bylo $K \neq 0$, došli bychom ke sporu, neboť pro $h \cdot L < 1$ by podle výše uvedeného vztahu platilo:

$$K \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x K dt \right| \leq L \cdot K \cdot |x - x_0| = L \cdot K \cdot h < K,$$

(pro příslušné L lze takové h vždy najít). Proto musí být $K = 0$ a tudíž $Y_1(x) = Y_2(x)$, což jsme měli dokázat.

1.3.12. Regulární a singulární řešení diferenciální rovnice. Řešení diferenciální rovnice se nazývá **regulární**, jestliže v žádném jeho bodě není porušena jednoznačnost. **Singulárním řešením** nazýváme takové řešení, v jehož každém bodě je jednoznačnost porušena.

1.3.13. Poznámky. a) Singulární řešení se tedy vyznačuje tím, že každým jeho bodem procházejí alespoň dvě integrální křivky dané diferenciální rovnice. Je tomu tak v příkladu 1.3.8 ve všech bodech paraboly $y = \frac{1}{4}x^2$.

b) Výjimečné řešení bývá často singulární. Je tomu tak vždy u řešení, která představují obálku obecného řešení.

c) Obvykle se Lipschitzova podmínka jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy nahrazuje požadavkem spojitosti derivace $f'_y(x, y)$, který je silnější než předpoklad ohraničenosti derivace ve větě 1.3.10, avšak v praxi se mnohem snáze prověřuje.

1.3.14. Příklad. Vyšetřete diferenciální rovnici $y' = 1 + \sqrt[3]{(y-x)^2}$ z hlediska existence a jednoznačnosti jejího řešení. Ověřte, že její obecné řešení je systém kubických křivek

$$y = x + \left(\frac{x+C}{3} \right)^3$$

a dále že jejím singulárním řešením je přímka $y = x$. Zjistěte, v jakém vztahu je tato přímka k systému křivek obecného řešení.

Řešení. V zadané rovnici je $f(x, y) = 1 + \sqrt[3]{(y-x)^2}$. Tato funkce je spojitá a ohraničená v každém bodě $[x, y]$, a proto řešení rovnice podle věty 1.3.5 všude existuje. Protože však derivace

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y-x}},$$

není spojitá pro $y = x$, představuje tato přímka množinu, na níž by podle vět 1.3.10, 1.3.11 mohla být porušena jednoznačnost řešení. Dosazením do rovnice snadno zjistíme, že právě funkce $y = x$ je jejím singulárním řešením.

Ve všech ostatních bodech roviny je řešení jednoznačné a je reprezentováno uvedeným systémem kubických křivek (přesvědčte se sami dosazením). Křivky

$$y = x + \left(\frac{x+C}{3} \right)^3$$

mají inflexní bod o souřadnicích $[-C, C]$, protože je

$$y' = 1 + \frac{(x+C)^2}{9}, \quad y'' = \frac{2}{9}(x+C).$$

Směrnice tečny v tomto bodě bude $y'(-C) = 1$ a rovnice tečny je právě $y = x$ pro každou křivku obecného systému. V bodech této přímky není z uvedených důvodů řešení jednoznačné.

Příklady k procvičení.

P1.1. Najděte diferenciální rovnice pro zadaný systém rovinných křivek:

- a) kružnice $(x+C)^2 + y^2 = C^2$, b) logaritmické křivky $y = \ln(Cx+1)$,
c) paraboly $y = x^2 - 2Cx$.

P1.2. Přesvědčte se, že uvedená funkce je řešením dané diferenciální rovnice (na vhodném intervalu).

- a) $x^2 - xy + y^2 = C^2$; $(x-2y) \cdot y' = 2x - y$,
b) $y = x \cdot \left[\int \frac{e^x}{x} dx + C \right]$; $xy' - y = x \cdot e^x$,
c) $x = t \cdot e^t$, $y = e^{-t}$; $(1+xy) \cdot y' + y^2 = 0$,
d) $x = C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t$; $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

P1.3. Stefanův-Boltzmannův zákon vyjadřuje časovou změnu teploty T tělesa při vyzařování tepla:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T^4 - T_0^4),$$

kde T_0 [K] je teplota okolního prostředí a k je konstanta. Ukažte, že obecným řešením této rovnice je závislost

$$2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{T}{T_0} \right) + \ln \left(\frac{T+T_0}{T-T_0} \right) = 4 \cdot T_0^3 \cdot (kt + C).$$

P1.4. Sestavte Cauchyho úlohu pro určení křivky, jdoucí bodem $[2,3]$ a mající tu vlastnost, že úsek kterékoli její tečny vyřatý souřadnými osami je půlen bodem dotyku.

P1.5. Vypočítejte první dvě Picardovy aproximace řešení úlohy $y' = x - y \cdot \ln x$, $y(1) = -1$.

P1.6. Pro Cauchyho úlohu $y' = 2xy^2 - y^3$, $y(0) = 1$ určete Picardovou metodou prvních pět aproximací jejího řešení v bodě $x = 0,5$.

P1.7. Určete oblast, ve které mají zadané DR jediné řešení:

a) $y' = xy + e^{-y}$, **b)** $y' = \arctg(y - x)$,

c) $y' = \sqrt{x - y}$, **d)** $y' = \sqrt[3]{y^2} \cdot \sin x$.

P1.8. V nádobě, která má tvar tělesa vytvořeného rotací křivky $s(x)$ kolem osy x , sahá hladina vody do výšky h . U dna nádoby je kruhový otvor o poloměru r , kterým voda vytéká rychlostí $v = k \cdot \sqrt{2gx}$ (k je konstanta, jejíž hodnota pro vodu je asi 0,6).

a) Sestavte Cauchyho úlohu, jejímž řešením můžete vypočítat dobu, za kterou se nádoba vyprázdní.

b) Zkuste odvodit takový tvar nádoby, při němž bude hladina klesat rovnoměrně (jde o princip tzv. vodních hodin).

Výsledky:

P1.1. **a)** $2xyy' = -x^2 + y^2$, **b)** $xy' = 1 - e^{-y}$, **c)** $xy' - x^2 - y = 0$

P1.4. $y = -x \cdot y'$, $y(2) = 3$

P1.5. $y_1 = \frac{x^2}{2} + x \cdot \ln x - x - \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{43}{36} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \left(\frac{5x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \ln x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x$

P1.6. $y_1 = 0.750$, $y_2 = 0.930$, $y_3 = 0.814$, $y_4 = 0.896$, $y_5 = 0.841$

P1.7. **a)** celá rovina, **b)** celá rovina, **c)** pouze body splňující podmínku $y < x$, **d)** rovina bez osy x .

P1.8. **a)** úloha má vyjádření $\frac{s^2(x)dx}{\sqrt{x}} = \alpha \cdot dt$ při podmínce $x(0) = h$, kde $\alpha = k \cdot r^2 \sqrt{2g}$.

b) rychlost poklesu hladiny je $dx/dt = \text{konst.}$, pro tvar nádoby vychází $s(x) \sim \sqrt[4]{x}$.

2. Metody řešení diferenciálních rovnic prvního řádu

V této kapitole se seznámíme s některými základními typy DR prvního řádu a uvedeme metody, které vedou k nalezení jejich řešení.

2.1. DR se separovanými proměnnými

2.1.1. Definice. Diferenciální rovnici se **separovanými proměnnými** rozumíme každou rovnici, kterou lze zapsat ve tvaru

$$P(x) + Q(y)y' = 0. \quad (2.1)$$

2.1.2. Věta. Necht' funkce $P(x)$ a $Q(y)$ jsou spojité pro všechna $x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle$. Potom lze na oblasti $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ obecné řešení rovnice (2.1) vyjádřit ve tvaru

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C. \quad (2.2)$$

Důkaz. Stačí ukázat, že vyloučením konstanty C z rovnice (2.2) dostaneme rovnici (2.1), přičemž y považujeme za funkci proměnné x , tedy $y = y(x)$.

Lze tedy (2.2) zapsat ve tvaru

$$\int P(x)dx + \int Q(y(x))y'(x)dx = C,$$

kde derivujeme podle proměnné x a dostaneme výraz

$$P(x) + Q(y)y' = 0,$$

což je rovnice (2.1).

2.1.3. Poznámky. a) Schematicky lze postup řešení rovnice (2.1) zapsat takto: Nahradíme-li derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$, potom tuto rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

a odtud integrací dostaneme obecné řešení (2.2).

b) Často se můžeme setkat s DR v tzv. **separovatelném tvaru** :

$$P(x)R(y) + Q(x)S(y)y' = 0. \quad (2.3)$$

Tuto rovnici lze za předpokladů $Q(x) \neq 0, R(y) \neq 0$ upravit na tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{S(y)}{R(y)}y' = 0,$$

což je DR se separovanými proměnnými.

Její obecné řešení lze za daných předpokladů zapsat ve tvaru

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int \frac{S(y)}{R(y)}dy = C.$$

Rovnice (2.3) může mít i výjimečná řešení tvaru $y = y_n$, kde čísla y_n jsou kořeny rovnice $R(y) = 0$.

2.1.4. Příklad. Řešte DR $4x^2 y dx + (2xy - y) dy = 0$.

Řešení.

$$4x^2 y dx + y(2x - 1) dy = 0$$

$$\frac{4x^2}{2x - 1} dx + dy = 0, \text{ pro } x \neq \frac{1}{2}, y \neq 0$$

$$\int \frac{4x^2}{2x - 1} dx + \int dy = C$$

$$\int \left(2x + 1 + \frac{1}{2x - 1} \right) dx + \int dy = C$$

$$x^2 + x + \frac{1}{2} \ln|2x - 1| + y = C,$$

tedy

$$y = C - x^2 - x - \frac{1}{2} \ln|2x - 1|$$

je obecné řešení dané rovnice pro $x \neq \frac{1}{2}, y \neq 0$.

Nyní dosazením $y = 0$ do dané rovnice zjistíme, že pro tuto hodnotu je rovnice identicky splněna. Není možno ji ovšem získat žádnou volbou konstanty C z obecného řešení, a proto

$$y = 0$$

je výjimečné řešení dané rovnice.

2.1.5. Věta. Diferenciální rovnici tvaru $y' = f(ax + by + c)$, kde $b \neq 0$, převedeme substitucí $u(x) = ax + by + c$ na rovnici se separovanými proměnnými.

Důkaz. Rovnost $u(x) = ax + by + c$ zderivujeme podle proměnné x , tedy

$$u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}.$$

Dosazením do dané DR obdržíme rovnici

$$\frac{u' - a}{b} = f(u) \Rightarrow u' = a + bf(u)$$

a po úpravě (pro $a + bf(u) \neq 0$)

$$\frac{1}{a + bf(u)} u' - 1 = 0,$$

což je DR se separovanými proměnnými pro funkci $u = u(x)$.

2.1.6. Poznámka. Pro $b = 0$ máme DR $y' = f(ax + c)$, kterou lze jednoduše převést na tvar $y' - f(ax + c) = 0$,

což je DR se separovanými proměnnými.

2.1.7. Příklad. Najděte řešení DR $y' = \sin^2(x - y)$ pro $y(0) = \pi/4$.

Řešení. Zavedeme substituci $u = x - y \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$ a dosadíme do dané DR

$$1 - u' = \sin^2 u$$

$$u' = 1 - \sin^2 u$$

$$\frac{du}{dx} = \cos^2 u$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du - dx = 0 \quad \text{pro } \cos u \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u} du - \int dx = C$$

$$\operatorname{tg} u - x = C \Rightarrow u = \operatorname{arctg}(x + C), \text{ tedy } x - y = \operatorname{arctg}(x + C).$$

Obecné řešení dané rovnice lze psát ve tvaru

$$y = x - \operatorname{arctg}(x + C).$$

Dosazením počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty C :

$$\pi/4 = 0 - \operatorname{arctg}(0 + C) \Rightarrow \operatorname{arctg} C = -\pi/4 \Rightarrow C = -1.$$

Hledané řešení je tedy

$$y = x - \operatorname{arctg}(x - 1).$$

2.2. Homogenní diferenciální rovnice

2.2.1. Definice. Diferenciální rovnice $F(x, y, y') = 0$ se nazývá **homogenní**, lze-li ji pro $x \neq 0$ upravit na tvar

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.2.2. Věta. Homogenní DR převedeme substitucí $y = ux$, kde $u = u(x)$, na DR se separovanými proměnnými pro novou neznámou funkci $u(x)$.

Důkaz. Je dána homogenní DR ve tvaru $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, kde $x \neq 0$.

Ze substituce $y = ux$, tj. $u = \frac{y}{x}$, plyne po derivování $y' = u'x + u$. Dosazením do zadané homogenní DR dostaneme

$$u'x + u = \varphi(u)$$

$$\frac{1}{u - \varphi(u)} u' + \frac{1}{x} = 0 \quad \text{pro } u - \varphi(u) \neq 0,$$

což je DR se separovanými proměnnými pro funkci $u = u(x)$.

2.2.3. Příklad. Řešte DR $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

Řešení. Daná DR má smysl pro $x \neq 0 \wedge y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}x, k \in \mathbf{Z}$. Po vydělení rovnice proměnnou x a po úpravě obdržíme tuto DR ve tvaru

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x},$$

tedy homogenní DR.

Substitucí $y = ux$ (tj. $u = \frac{y}{x} \wedge y' = u'x + u$) dostaneme rovnici

$$u'x + u = u + \operatorname{tgu} \Rightarrow \cotgu du - \frac{1}{x} dx = 0 \quad \text{pro } u \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Po integraci máme

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du - \int \frac{1}{x} dx = K \Rightarrow \ln|\sin u| - \ln|x| = \ln K_1, K_1 > 0 \Rightarrow |\sin u| = K_1|x|,$$

tedy

$$\pm \sin u = \pm K_1 x, K_1 > 0,$$

což lze zapsat jednodušeji

$$\sin u = Cx, C \neq 0.$$

Dosazením za $u = \frac{y}{x}$ dostaneme obecné řešení

$$\sin \frac{y}{x} = Cx, C \neq 0.$$

Toto řešení jsme obdrželi za předpokladu $u \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Ověřme dosazením, zda funkce $u = k\pi$, tj. $y = k\pi x, k \in \mathbf{Z}$, vyhovují dané rovnici.

$$L = xy' - y = x(k\pi x)' - k\pi x = xk\pi - k\pi x = 0$$

$$P = x \operatorname{tg} \frac{y}{x} = x \operatorname{tg} \frac{k\pi x}{x} = x \operatorname{tg}(k\pi) = 0$$

Tedy funkce $y = k\pi x, k \in \mathbf{Z}$, jsou také řešeními dané DR. Tato řešení lze ovšem obdržet z obecného řešení pro $C = 0$, to znamená, že všechna řešení dané DR lze zapsat ve tvaru

$$\sin \frac{y}{x} = Cx, C \in \mathbf{R}.$$

2.2.4. Definice. Funkce $f(x, y)$ se nazývá **homogenní funkce stupně k** , $k \in \mathbf{N}$, na oblasti Ω právě tehdy, když v každém bodě $[x, y] \in \Omega$ platí pro libovolné $t \neq 0$ identicky

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

2.2.5. Věta. Jsou-li funkce $P(x, y), Q(x, y)$ homogenní stejného stupně k , potom rovnice $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ je homogenní diferenciální rovnicí.

Důkaz.

$$P(tx, ty) = t^k P(x, y) \wedge Q(tx, ty) = t^k Q(x, y)$$

$$\frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)} = \frac{t^k P(x, y)}{t^k Q(x, y)} \Rightarrow \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)}$$

Rovnici $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ lze pro $Q(x, y) \neq 0$ upravit na tvar

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \Rightarrow y' = -\frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)},$$

a z této rovnice pro $t = \frac{1}{x}, x \neq 0$ dostaneme

$$y' = -\frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} \Rightarrow y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ což je homogenní DR.}$$

2.2.6. Příklad. Řešte DR $y^2 + x^2 y' = xy y'$.

Řešení. Danou rovnici upravíme na tvar

$$y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0,$$

tedy

$$P(x, y) = y^2, \quad Q(x, y) = x^2 - xy.$$

Protože obě tyto funkce jsou homogenní stupně $k = 2$, je daná DR homogenní. Vyjádřeme nyní z dané rovnice y' jako funkci proměnných x, y .

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2} \quad \text{pro } x \neq 0, y \neq x.$$

Zlomek na pravé straně této rovnice rozšíříme výrazem $\frac{1}{x^2}$ (obecně výrazem $\frac{1}{x^k}$) a dostaneme

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}.$$

Do této rovnice dosadíme $y = ux$, tj. $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$, a dostaneme

$$u'x + u = \frac{u^2}{u - 1} \Rightarrow \frac{u - 1}{u} du - \frac{1}{x} dx = 0, \quad u \neq 0.$$

Obecné řešení hledáme ve tvaru

$$\int \frac{u-1}{u} du - \int \frac{1}{x} dx = K \Rightarrow u - \ln|u| - \ln|x| = K \Rightarrow u = \ln|ux| + K$$

a po zpětném dosazení substituce

$$\frac{y}{x} = \ln|y| + K \Rightarrow |y| = e^{\frac{y}{x} - K} \Rightarrow |y| = K_1 e^{\frac{y}{x}}, \text{ kde } K_1 = e^{-K} > 0.$$

$$y = \pm K_1 e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow y = C e^{\frac{y}{x}}, \quad C \neq 0.$$

Toto obecné řešení jsme dostali za předpokladů $x \neq 0$, $y \neq x$, $u \neq 0$. Dosazením do dané DR zjistíme, že výrazy $x = 0$ a $y = x$ danou rovnici nesplňují.

Z podmínky $u = 0$ plyne $y = 0$ a tato funkce vyhovuje dané rovnici. Toto řešení lze ale obdržet z obecného řešení pro $C = 0$.

Všechna řešení zadané DR lze tedy zapsat ve tvaru

$$y = C e^{\frac{y}{x}}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

2.2.7. Věta. Diferenciální rovnici tvaru $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$, kde $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, lze

substitucí $x = \bar{x} + x_0$, $y = \bar{y} + y_0$ převést na **homogenní DR** pro funkci $\bar{y} = \psi(\bar{x})$. Přitom

uspořádaná dvojice $[x_0, y_0]$ je jediné řešení soustavy rovnic
$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Podle předpokladů je

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \quad \wedge \quad a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0.$$

Dosazením do dané DR máme:

$$\bar{y}' = f\left(\frac{a_1(\bar{x} + x_0) + b_1(\bar{y} + y_0) + c_1}{a_2(\bar{x} + x_0) + b_2(\bar{y} + y_0) + c_2}\right) \Rightarrow \bar{y}' = f\left(\frac{a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + \overbrace{(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}^0}{a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + \underbrace{(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}_0}\right)$$

$$\bar{y}' = f\left(\frac{a_1\bar{x} + b_1\bar{y}}{a_2\bar{x} + b_2\bar{y}}\right)$$

a pro $\bar{x} \neq 0$ dostaneme rozšířením zlomku výrazem $\frac{1}{\bar{x}}$

$$\bar{y}' = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{a_2 + b_2 \frac{\bar{y}}{\bar{x}}}\right), \text{ tedy } \bar{y}' = \varphi\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right),$$

což je homogenní DR pro neznámou funkci $\bar{y} = \psi(\bar{x})$.

2.2.8. Poznámka. Podmínka $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ zaručuje existenci právě jednoho řešení uvedené soustavy. Ukažme, jak řešit danou rovnici v případě $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1 = ka_2 \wedge b_1 = kb_2, k \neq 0,$$

tedy po dosazení je daná DR ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{ka_2x + kb_2y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \Rightarrow y' = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{(a_2x + b_2y) + c_2}\right) \Rightarrow y' = F(a_2x + b_2y),$$

což je typ rovnice uvedený ve větě 2.1.5.

2.2.9. Příklad. Řešte DR $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Řešení. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} y + 2 &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

má jediné řešení $[x_0, y_0] = [3, -2]$.

Tedy substitucí $\begin{aligned} x &= \bar{x} + 3 \\ y &= \bar{y} - 2 \end{aligned}$ dostaneme

$$\bar{y}' = 2\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}}\right)^2 \Rightarrow \bar{y}' = 2\left(\frac{\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{1 + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}}\right)^2, \text{ pro } \bar{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 3.$$

Toto je homogenní DR, kterou řešíme substitucí $\bar{y} = u\bar{x}$, tedy

$$u'\bar{x} + u = 2\left(\frac{u}{1+u}\right)^2 \Rightarrow \frac{u^2 + 2u + 1}{u(u^2 + 1)} du + \frac{1}{\bar{x}} d\bar{x} = 0, \text{ pro } u \neq 0.$$

Obecné řešení hledáme ve tvaru

$$\int \frac{u^2 + 2u + 1}{u(u^2 + 1)} du + \int \frac{1}{\bar{x}} d\bar{x} = K$$

$$\int \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{u^2 + 1} \right) du + \int \frac{1}{\bar{x}} d\bar{x} = K \Rightarrow \ln|u| + 2 \operatorname{arctg} u + \ln|\bar{x}| = K$$

$$2 \operatorname{arctg} u + \ln|u \cdot \bar{x}| = K \Rightarrow 2 \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} + \ln|\bar{y}| = K$$

$$2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3} + \ln|y+2| = K,$$

což je obecné řešení dané rovnice za předpoklad $u \neq 0 \Rightarrow y \neq -2$.

Dosažením zjistíme, že $y = -2$ je řešením této rovnice, a to výjimečným, protože jej nelze dostat z obecného řešení pro žádnou volbu konstanty K .

2.3. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

2.3.1. Definice. Lineární diferenciální rovnici prvního řádu (zkráceně LDR) nazýváme každou rovnici tvaru

$$y' + y p(x) = q(x), \quad (2.4)$$

kde $p(x), q(x)$ jsou spojité funkce na určitém intervalu $\langle a, b \rangle$.

Přitom a) je-li $q(x) \equiv 0$, hovoříme o **zkrácené LDR**,

b) je-li $q(x) \neq 0$, hovoříme o **úplné** nebo **nezkrácené LDR**.

2.3.2. Věta. Zkrácená LDR $y' + y p(x) = 0$ má na intervalu $\langle a, b \rangle$ obecné řešení tvaru

$$y = C e^{-\int p(x) dx}.$$

Důkaz. Rovnice $y' + y p(x) = 0$ je DR se separovatelnými proměnnými, tedy

$$\frac{dy}{dx} + y p(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} dy + p(x) dx = 0 \text{ pro } y \neq 0.$$

Obecné řešení hledáme ve tvaru

$$\int \frac{1}{y} dy + \int p(x) dx = K \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x) dx + K \Rightarrow |y| = e^K e^{-\int p(x) dx}$$

$$y = \pm e^K e^{-\int p(x) dx},$$

tedy obecné řešení lze psát ve tvaru

$$y = C e^{-\int p(x) dx} \text{ pro } C \neq 0.$$

Toto obecné řešení jsme dostali za předpokladu $y \neq 0$. Snadno zjistíme, že funkce $y = 0$ je také řešením zkrácené LDR, které ovšem obdržíme z obecného řešení pro $C = 0$.

Všechna řešení zkrácené LDR lze tedy zapsat ve tvaru

$$y = C e^{-\int p(x) dx}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

2.3.3. Věta. Úplná LDR 1. řádu $y' + yp(x) = q(x)$ má obecné řešení ve tvaru

$$y = \frac{1}{E(x)} \left[\int E(x)q(x)dx + K \right], \text{ kde } E(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Důkaz. Důkaz věty je konstruktivní, tj. ukazuje způsob řešení úplné LDR, který vede k uvedenému vzorci.

1) Určíme obecné řešení příslušné zkrácené LDR $y' + yp(x) = 0$, které označíme $\hat{y}$:

$$\hat{y} = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

2) Obecné řešení úplné LDR hledáme ve tvaru

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \quad (2.5)$$

tj. v obecném řešení zkrácené LDR jsme konstantu C nahradili zatím neurčenou funkcí $C(x)$.

Neznámou funkci $C(x)$ určíme z předpokladu, že (2.5) je řešením úplné LDR. Dosadíme tedy tuto funkci a její derivaci

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)$$

do rovnice (2.4), čímž dostaneme

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) + C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) = q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Označíme-li $E(x) = e^{\int p(x)dx}$, obdržíme DR se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $C(x)$ ve tvaru

$$C'(x) = q(x)E(x).$$

Její obecné řešení lze psát ve tvaru

$$C(x) = \int q(x)E(x)dx + K$$

a dosazením do (2.5) dostaneme

$$y = \left[\int q(x)E(x)dx + K \right] \frac{1}{E(x)},$$

což je hledané řešení rovnice (2.4).

2.3.4. Poznámky. a) Postup uvedený v důkazu předešlé věty se nazývá **Lagrangeova metoda variace konstanty**. Při hledání obecného řešení LDR 1.řádu můžeme tedy použít buď uvedeného vztahu, nebo metody variace konstanty.

b) Jak je vidět z předcházejícího důkazu, po dosazení funkce (2.5) do rovnice (2.4) se vždy vyruší členy, které obsahují neznámou funkci $C(x)$. To nám umožňuje kontrolu správnosti výpočtu - v případě, že se uvedené členy nevyruší, potom se buď nejedná o LDR nebo máme chybu v předešlých krocích.

c) Obecné řešení úplné LDR lze také hledat ve tvaru $y(x) = u(x)v(x)$, kde např. $v(x)$ je nová neznámá funkce a $u(x)$ je vhodná funkce, kterou zvolíme během výpočtu. Ukážeme, že tento způsob vede ke stejnému výsledku jako u metody variace konstanty.

Funkce $y(x) = u(x)v(x)$ má být řešením úplné LDR, dosadíme tedy tuto funkci a její derivaci $y' = u'v + uv'$ do rovnice (2.4).

$$u'v + uv' + uv p = q$$

$$uv' + v(u' + up) = q$$

a v této rovnici položíme $u' + up = 0$ (volitelná podmínka pro funkci $u(x)$).

Máme tedy soustavu dvou DR pro neznámé funkce $u(x)$ a $v(x)$:

$$u(x)v'(x) = q(x) \quad (2.6)$$

$$u'(x) + u(x)p(x) = 0 \quad (2.7)$$

Rovnice (2.7) je zkrácená LDR pro neznámou funkci $u(x)$ a podle věty 2.3.2 je jejím řešením funkce $u(x) = e^{-\int p(x)dx}$.

Rovnice (2.6) je DR se separovatelnými proměnnými, tedy ji upravíme na tvar

$$dv - \frac{q(x)}{u(x)} dx = 0 \Rightarrow \int dv - \int \frac{q(x)}{u(x)} dx = K \Rightarrow v = \int \frac{q(x)}{u(x)} dx + K$$

Označíme-li $E(x) = e^{\int p(x)dx}$, dostaneme

$$u(x) = \frac{1}{E(x)} \text{ a } v(x) = \int E(x)q(x)dx + K.$$

Obecné řešení rovnice (2.4) jsme hledali ve tvaru $y(x) = u(x)v(x)$, tedy

$$y(x) = \frac{1}{E(x)} \left[\int E(x)q(x)dx + K \right], \text{ kde } E(x) = e^{\int p(x)dx},$$

tj. stejný výsledek jako u metody variace konstanty.

2.3.5. Příklad. Řešte DR $y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = x^2 + 1$.

Řešení. Jedná se o úplnou LDR 1. řádu, kde $p(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$, $q(x) = x^2 + 1$. Ukážeme řešení této rovnice třemi způsoby:

1) Dosazením do vztahu :

$$y(x) = \frac{1}{E(x)} \left[\int E(x)q(x)dx + K \right], \text{ kde } E(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

$$\int p(x)dx = -\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = -\ln|x^2 + 1| = -\ln(x^2 + 1)$$

$$E(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\ln(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\int E(x)q(x)dx = \int \frac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1)dx = \int dx = x.$$

Tedy obecné řešení lze psát ve tvaru

$$y = (x^2 + 1)(x + K).$$

2) Lagrangeova metoda variace konstanty.

Príslušná zkrácená LDR má tvar $y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = 0$. Nalezneme její obecné řešení ve tvaru

$$\hat{y} = Ce^{-\int p(x)dx},$$

tedy

$$\int p(x)dx = -\int \frac{2x}{x^2 + 1}dx = -\ln|x^2 + 1| = -\ln(x^2 + 1)$$
$$\hat{y} = Ce^{\ln(x^2 + 1)} \Rightarrow \hat{y} = C(x^2 + 1).$$

Variace konstanty: obecné řešení úplné LDR hledáme ve tvaru

$$y = C(x)(x^2 + 1),$$

odkud plyne

$$y' = C'(x)(x^2 + 1) + C(x)2x$$

a po dosazení do dané rovnice dostaneme

$$C'(x)(x^2 + 1) + C(x)2x - \frac{2x}{x^2 + 1}C(x)(x^2 + 1) = x^2 + 1$$
$$C'(x)(x^2 + 1) = x^2 + 1 \Rightarrow C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + K.$$

Tedy obecné řešení má tvar

$$y = (x + K)(x^2 + 1).$$

3) Obecné řešení hledáme ve tvaru $y(x) = u(x)v(x)$.

Ze vztahu $y = uv$ plyne $y' = u'v + uv'$, a po dosazení do dané rovnice dostaneme

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2 + 1}uv = x^2 + 1,$$

odtud po úpravě

$$uv' + v\left(u' - \frac{2x}{x^2 + 1}u\right) = x^2 + 1.$$

Volitelná podmínka pro funkci $u(x)$: $u' - \frac{2x}{x^2 + 1}u = 0$, vede k soustavě rovnic

$$uv' = x^2 + 1$$
$$u' - \frac{2x}{x^2 + 1}u = 0$$

Druhá z těchto rovnic je zkrácená LDR pro neznámou funkci $u(x)$ a její řešení lze zapsat ve tvaru

$$u = e^{-\int p(x)dx}, \text{ tedy } u = x^2 + 1.$$

Dosazením této funkce do první rovnice soustavy dostaneme

$$(x^2 + 1)v' = x^2 + 1 \Rightarrow v' = 1 \Rightarrow v = x + K.$$

Obecné řešení jsme hledali ve tvaru $y = uv$, tedy po dosazení

$$y = (x^2 + 1)(x + K).$$

2.4. Bernoulliho diferenciální rovnice

2.4.1. Definice. Bernoulliho diferenciální rovnicí (zkr. BDR) nazýváme každou rovnici tvaru

$$y' + yp(x) = y^m q(x),$$

kde $m \in \mathbf{R}$, $m \neq 0$, $m \neq 1$ a funkce $p(x), q(x)$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, přičemž funkce $q(x)$ není identicky rovna nule.

2.4.2. Poznámka. Pro $m = 0$ dostáváme LDR, pro $m = 1$ obdržíme DR se separovatelnými proměnnými

$$y' + y[p(x) - q(x)] = 0.$$

2.4.3. Věta.

a) Bernoulliho DR převádíme substitucí $z = y^{1-m}$ na LDR pro funkci $z(x)$.

b) Je-li $m > 0$, potom funkce $y = 0$ je řešením BDR.

Důkaz: a)
$$y' + yp(x) = y^m q(x) \quad \left| \cdot \frac{1}{y^m} \text{ pro } y \neq 0 \right.$$
$$\frac{y'}{y^m} + y^{1-m} p(x) = q(x)$$

Ze substituce $z = y^{1-m}$ plyne

$$z' = (1-m)y^{-m}y' \Rightarrow \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}$$

a po dosazení

$$\frac{z'}{1-m} + z p(x) = q(x) \quad | \cdot (1-m)$$
$$z' + (1-m)z p(x) = (1-m)q(x),$$

což je LDR 1. řádu pro neznámou funkci $z(x)$.

b) Triviální, dosazením $y = 0$ do levé a pravé strany BDR ($m > 0$) dostaneme

$$L = y' + yp(x) = 0 + 0p(x) = 0$$
$$P = y^m q(x) = 0^m q(x) = 0$$

2.4.4. Poznámka. Obdobně jako u LDR 1. řádu můžeme hledat obecné řešení BDR ve tvaru

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Dosaďme tedy do BDR a obdržíme rovnici ve tvaru

$$u'v + uv' + upv = u^m v^m q$$
$$uv' + v(u' + up) = u^m v^m q.$$

Volitelná podmínka $u' + up = 0$ pro funkci $u(x)$ vede k soustavě rovnic

$$uv' = u^m v^m q$$
$$\underline{u' + up = 0}$$

Druhá rovnice této soustavy je zkrácená LDR pro neznámou funkci $u(x)$ a podle věty 2.3.2 je jejím řešením funkce $u(x) = e^{-\int p(x)dx}$.

První rovnice této soustavy je DR se separovatelnými proměnnými, tedy ji upravíme na tvar

$$\frac{1}{v^m} dv - u^{m-1} q dx = 0,$$

obecné řešení hledáme tedy ve tvaru

$$\int \frac{1}{v^m} dv - \int u^{m-1} q dx = K$$

$$\frac{v^{1-m}}{1-m} - \int u^{m-1} q dx = K$$

$$v^{1-m} = (1-m) \int u^{m-1} q dx + (1-m)K$$

$$v^{1-m} = (1-m) \int u^{m-1} q dx + C \text{ kde } C = (1-m)K.$$

Protože $y^{1-m} = u^{1-m} v^{1-m}$, můžeme obecné řešení psát ve tvaru

$$y^{1-m} = u^{1-m}(x) \left[(1-m) \int u^{m-1}(x) q(x) dx + C \right], \text{ kde } u(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

2.4.5. Příklad. Řešte DR $y' + \frac{x}{x^2+1} y = -\frac{y^3}{2} (x^2+1)$.

Řešení. Jedná se o BDR, kde $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $q(x) = -\frac{x^2+1}{2}$, $m = 3 > 0$, tedy funkce $y = 0$ je jedním řešením dané rovnice. Obecné řešení této rovnice nalezneme oběma uvedenými postupy.

a) Substitucí $z = y^{1-m}$.

$$y' + \frac{x}{x^2+1} y = -\frac{y^3}{2} (x^2+1) \quad \left| \cdot \frac{1}{y^3} \text{ pro } y \neq 0 \right.$$

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{x}{x^2+1} \frac{1}{y^2} = -\frac{x^2+1}{2}$$

$$\text{Zavedeme substituci } z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' = \frac{-2}{y^3} y' \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2}$$

a po dosazení dostaneme

$$-\frac{z'}{2} + \frac{x}{x^2+1} z = -\frac{x^2+1}{2}$$

$$z' - \frac{2x}{x^2+1} z = x^2+1,$$

což je LDR 1. řádu pro neznámou funkci $z(x)$.

Její obecné řešení (viz příklad 2.3.5) je

$$z = (x^2+1)(x+K).$$

Odtud a z uvedené substituce obdržíme

$$\frac{1}{y^2} = (x^2+1)(x+K) \Rightarrow (x^2+1)(x+K)y^2 = 1,$$

což je hledané obecné řešení.

b) Obecné řešení hledáme ve tvaru $y(x) = u(x)v(x)$.

Dosaďme tedy za $y = uv$ a $y' = u'v + uv'$ do zadané rovnice.

$$u'v + uv' + \frac{x}{x^2 + 1}uv = -\frac{u^3v^3}{2}(x^2 + 1)$$
$$uv' + v\left(u' + \frac{x}{x^2 + 1}u\right) = -\frac{u^3v^3}{2}(x^2 + 1)$$

Volitelná podmínka $u' + \frac{x}{x^2 + 1}u = 0$ vede k soustavě rovnic

$$uv' = -\frac{u^3v^3}{2}(x^2 + 1)$$
$$u' + \frac{x}{x^2 + 1}u = 0.$$

Druhá rovnice této soustavy je zkácená LDR, její řešení je tedy $u = e^{-\int p(x)dx}$.

$$\int p(x)dx = \int \frac{x}{x^2 + 1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1),$$

tj.
$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Dosazením této funkce do první rovnice soustavy dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}v' = -\frac{v^3}{2\sqrt{(x^2 + 1)^3}}(x^2 + 1),$$

odkud po jednoduché úpravě máme

$$\frac{1}{v^3}dv + \frac{1}{2}dx = 0$$
$$-\frac{1}{2v^2} + \frac{x}{2} = C$$
$$\frac{1}{v^2} = x + K, K = -2C$$

Protože

$$\frac{1}{u^2} = x^2 + 1 \text{ a } \frac{1}{y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{1}{v^2},$$

můžeme obecné řešení psát ve tvaru

$$\frac{1}{y^2} = (x^2 + 1)(x + K) \Rightarrow (x^2 + 1)(x + K)y^2 = 1.$$

V obou případech kromě nalezeného obecného řešení má rovnice i výjimečné řešení $y = 0$.

Příklady k procvičení.

P2.1. Řešte diferenciální rovnice:

a) $(1 + e^x)^2 \cdot y' + e^{x+y} \cdot (1 - e^{-y}) = 0$ pro $y > 0$,

b) $y' = \cos(x - y + 5)$,

c) $xy' = y \cdot (\ln y - \ln x)$,

$$\text{d)} (7x + 5y + 2) \cdot y' + 2(5x + 4y + 1) = 0 ,$$

$$\text{e)} y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = e^x \cdot \sin^2 x ,$$

$$\text{f)} y' + 2y = 2x \cdot \sqrt{y} .$$

P2.2. Řešte Cauchyho úlohu:

$$\text{a)} y - xy' = b \cdot (1 + x^2 y') \quad \text{pro } y(1) = 1 ,$$

$$\text{b)} y' = (x + y)^2 \quad \text{pro } y(0) = 0 ,$$

$$\text{c)} xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{pro } y(1) = 0 ,$$

$$\text{d)} (4x - 5y + 13)dy - (2x - 3y + 7)dx = 0 \quad \text{pro } y(0) = 2 ,$$

$$\text{e)} xy' - \frac{y}{x+1} = x \quad \text{pro } y(1) = 2 ,$$

$$\text{f)} xy' + y = y^2 \ln x \quad \text{pro } y(1) = 1 .$$

Výsledky:

$$\text{P2.1. a)} y - \ln(e^y - 1) = C - \frac{1}{1 + e^x}, \text{ b)} x + \cotg \frac{x - y + 5}{2} = C, \text{ c)} y = x \cdot e^{1+Cx},$$

$$\text{d)} (x + y)^2 \cdot (2x + y + 1)^3 = C, \text{ e)} y = (e^x + C) \cdot \sin x, \text{ f)} y = (x - 1 + C \cdot e^{-x})^2, y = 0.$$

$$\text{P2.2. a)} y = \frac{b + x}{1 + bx}, \text{ b)} y = \tg x - x, \text{ c)} y = \frac{x^2 - 1}{2}, \text{ d)} (y - x - 3) \cdot (5y - 2x - 9)^2 = -1,$$

$$\text{e)} y = \frac{x}{x+1} (x + \ln|x| + 3), \text{ f)} y = \frac{1}{1 + \ln x} .$$

2.5. Exaktní diferenciální rovnice

2.5.1. Definice. Diferenciální rovnice tvaru $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ se nazývá **exaktní** (zkr. EDR) právě tehdy, když její levá strana představuje **totální diferenciál** vhodné funkce $\Phi(x, y)$, kterou nazýváme **kmenová funkce**.

2.5.2. Věta. a) Jsou-li funkce $P(x, y)$, $Q(x, y)$ spojitě diferencovatelné na Ω , potom rovnice $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ je exaktní právě tehdy, když na oboru Ω identicky platí

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

b) Je-li $\Phi(x, y)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, potom obecné řešení dané EDR je tvaru

$$\Phi(x, y) = C .$$

Důkaz. a) Levá strana EDR $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ je totálním diferenciálem kmenové funkce $\Phi(x, y)$. Protože $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$, platí

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y) .$$

Odtud

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Protože pro kmenovou funkci platí (P, Q mají spojité derivace)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x},$$

je tedy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

V důkazu opačné implikace (tj. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ je exaktní)

se využívá vlastností křivkového integrálu, viz např. [Šk], str. 378.

b) Stačí ukázat, že eliminací konstanty z obecného řešení dostaneme příslušnou DR. Diferencováním rovnice

$$\Phi(x, y) = C$$

obdržíme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0$$

a tedy

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

2.5.3. Určení kmenové funkce. Z předešlé věty je zřejmé, že nalezení obecného řešení EDR je vlastně problém určení kmenové funkce $\Phi(x, y)$.

Protože levá strana EDR $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ představuje totální diferenciál hledané kmenové funkce $\Phi(x, y)$, dostaneme soustavu parciálních DR pro neznámou funkci Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y) \tag{2.9}$$

Z rovnice (2.8) integrací podle proměnné x dostaneme

$$\Phi(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je zatím neurčená funkce. Označme

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx,$$

takže

$$\Phi(x, y) = U(x, y) + \varphi(y).$$

Tuto rovnici derivujeme podle proměnné y

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy}$$

a porovnáním s rovnicí (2.9) dostaneme

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q - \frac{\partial U}{\partial y} \tag{2.10}$$

Ukážeme nyní, že pravá strana této rovnice je vždy funkcí pouze proměnné y (samozřejmě za předpokladu, že daná rovnice je exaktní, tj. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$).

Označme tedy pravou stranu obecně jako funkci $R(x, y)$, tedy

$$R(x, y) = Q(x, y) - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$$

$$R(x, y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right),$$

a derivujme tuto rovnici podle proměnné x

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) \right]$$

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\int P(x, y) dx \right) \right]}_{P(x, y)}$$

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y},$$

takže

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow R(x, y) = r(y).$$

Máme tedy dokázáno, že $Q - \frac{\partial U}{\partial y}$ je funkcí pouze proměnné y . Pokud při výpočtu dospějeme k jinému výsledku, pak se buď nejedná o EDR nebo je chyba v předešlých krocích.

Rovnice (2.10) je DR se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $\varphi(y)$, její řešení lze psát ve tvaru

$$\varphi(y) = \int \left(Q - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy + C$$

a hledaná kmenová funkce je

$$\Phi(x, y) = U(x, y) + \int \left(Q(x, y) - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right) dy + C, \text{ kde } U(x, y) = \int P(x, y) dx.$$

Soustavu rovnic (2.8) a (2.9) můžeme samozřejmě řešit i tak, že rovnici (2.9) integrujeme podle proměnné y :

$$\Phi(x, y) = \int Q(x, y) dy + \psi(x). \text{ Označíme-li } V(x, y) = \int Q(x, y) dy, \text{ bude}$$

$$\Phi(x, y) = V(x, y) + \psi(x).$$

Tuto rovnici derivujme podle proměnné x

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d\psi}{dx}.$$

Porovnáním s rovnicí (2.8) dostaneme

$$P = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = P - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Opět lze ukázat, že výraz na pravé straně této rovnice musí být funkcí pouze proměnné x .

$$\psi(x) = \int \left(P - \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + K$$

a tedy hledaná kmenová funkce je

$$\Phi(x, y) = V(x, y) + \int \left(P(x, y) - \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \right) dx + K, \quad \text{kde } V(x, y) = \int Q(x, y) dy.$$

2.5.4. Poznámka. Kmenovou funkci $\Phi(x, y)$ lze v mnoha případech určit poněkud jednodušším způsobem.

Rovnici (2.8), resp. (2.9), integrujeme podle proměnné x , resp. y , a dostaneme

$$\Phi(x, y) = \int P(x, y) dx = U(x, y) + C_1$$

$$\Phi(x, y) = \int Q(x, y) dy = V(x, y) + C_2.$$

Dá se ukázat, že kmenová funkce $\Phi(x, y)$ je sjednocením množin sčítanců tvořících funkce $U(x, y)$ a $V(x, y)$. Tento pojem vysvětlíme v následujícím příkladu. Tato metoda má tu nevýhodu (což také ukážeme), že v některých případech není na první pohled zřejmé, zda se některé sčítance liší pouze o konstantu.

2.5.5. Příklad. Řešte DR $(e^y + ye^x + 3)dx + (e^x + xe^y - 2)dy = 0$.

Řešení.

$$P(x, y) = e^y + ye^x + 3, \quad Q(x, y) = e^x + xe^y - 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y + e^x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + e^y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

jedná se tedy o exaktní DR.

Hledejme příslušnou kmenovou funkci $\Phi(x, y)$, pro kterou platí

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y) \quad \wedge \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y),$$

tj. řešíme soustavu parciálních DR pro neznámou funkci Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^y + ye^x + 3$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^x + xe^y - 2$$

1. způsob:

a) Z první rovnice integrací podle x dostaneme

$$\Phi(x, y) = \int (e^y + ye^x + 3) dx + \varphi(y) = xe^y + ye^x + 3x + \varphi(y),$$

odkud po derivaci podle proměnné y

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xe^y + e^x + \frac{d\varphi}{dy}.$$

Porovnáním s druhou rovnicí obdržíme

$$e^x + xe^y - 2 = xe^y + e^x + \frac{d\varphi}{dy}$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = -2 \Rightarrow \varphi(y) = -2 \int dy + C \Rightarrow \varphi(y) = -2y + C.$$

Hledaná kmenová funkce je

$$\Phi(x, y) = xe^y + ye^x + 3x - 2y + C.$$

b) Z druhé rovnice integrací podle y dostaneme

$$\Phi(x, y) = \int (e^x + xe^y - 2) dy + \psi(x) = ye^x + xe^y - 2y + \psi(x),$$

odtud po derivaci podle proměnné x

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = ye^x + e^y + \frac{d\psi}{dx}$$

a porovnáním s první rovnicí obdržíme

$$e^y + ye^x + 3 = ye^x + e^y + \frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = 3 \Rightarrow \psi(x) = 3 \int dx + C \Rightarrow \psi(x) = 3x + C.$$

Hledaná kmenová funkce je

$$\Phi(x, y) = ye^x + xe^y - 2y + 3x + C.$$

2. způsob:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^y + ye^x + 3 \Rightarrow \Phi(x, y) = \int (e^y + ye^x + 3) dx + C_1 = \underbrace{xe^y + ye^x + 3x + C_1}_{U(x, y)}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^x + xe^y - 2 \Rightarrow \Phi(x, y) = \int (e^x + xe^y - 2) dy + C_2 = \underbrace{ye^x + xe^y - 2y + C_2}_{V(x, y)}$$

Sjednocení množin sčítanců tvořících funkce $U(x, y)$ a $V(x, y)$ znamená, že kmenová funkce $\Phi(x, y)$ obsahuje např. všechny sčítance funkce $U(x, y)$ doplněné o ty sčítance z funkce $V(x, y)$, které se nevyskytují ve funkci $U(x, y)$. Tedy kmenovou funkci můžeme psát ve tvaru

$$\Phi(x, y) = xe^y + ye^x + 3x - 2y + C.$$

Všemi uvedenými způsoby jsme samozřejmě dospěli ke stejnému výsledku, tedy obecné řešení dané rovnice je tvaru

$$xe^y + ye^x + 3x - 2y = K.$$

V následujícím příkladu ukážeme, že metoda sjednocení sčítanců může bez detailnějšího rozboru vést k chybnému výsledku.

2.5.6. Příklad. Řešte DR $\left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$.

Řešení.

$$P(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

jedná se tedy o exaktní DR.

Hledáme tedy kmenovou funkci $\Phi(x, y)$, pro kterou platí soustava parciálních DR

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

1. způsob:

Z druhé rovnice integrací podle proměnné y dostaneme

$$\Phi(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \psi(x) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \psi(x),$$

odtud derivací podle proměnné x je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{d\psi}{dx}$$

a porovnáním s první rovnicí

$$1 - \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{d\psi}{dx} \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = 1 \Rightarrow \psi(x) = x + C.$$

Kmenová funkce je

$$\Phi(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + x + C$$

a obecné řešení lze psát ve tvaru

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + x = K.$$

2. způsob (metoda sjednocení sčítanců):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \Phi(x, y) = \int \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + C_1 = x - \underbrace{\operatorname{arctg} \frac{x}{y}}_{U(x, y)} + C_1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \Phi(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy + C_2 = \underbrace{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}_{V(x, y)} + C_2$$

Bez hlubšího zkoumání by tedy mohlo dojít k tomu, že kmenovou funkci napíšeme ve tvaru

$$\Phi(x, y) = x - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C,$$

což je ovšem v rozporu s výsledkem zjištěným předešlým způsobem.

Zde si totiž musíme uvědomit, že platí

$$\operatorname{arctg} \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} & \text{pro } \alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} & \text{pro } \alpha < 0 \end{cases},$$

funkci $U(x, y)$ lze tedy zapsat jako

$$U(x, y) = x - \left(\pm \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) + C_1 = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + K_1, \quad K_1 = C_1 \mp \frac{\pi}{2}.$$

Teprve po této úvaze obdržíme kmenovou funkci ve správném tvaru

$$\Phi(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + x + C.$$

2.6. Integrační faktor

2.6.1. Motivace. Není-li levá strana rovnice $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ totálním diferenciálem nějaké kmenové funkce, tj. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, a nelze ji ani upravit na žádný z dříve uvedených typů diferenciálních rovnic, pak se nabízí možnost, abychom tuto rovnici převedli na EDR vynásobením vhodnou funkcí $\mu = \mu(x, y)$, kterou nazýváme **integrační faktor**.

Hledejme tedy podmínky pro neznámou funkci $\mu = \mu(x, y)$:

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 & \quad | \cdot \mu(x, y) \\ \mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0. \end{aligned}$$

Má-li se jednat o exaktní DR, musí platit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \\ \frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= \frac{\partial \mu}{\partial x}Q - \frac{\partial \mu}{\partial y}P. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Získaná rovnice je parciální diferenciální rovnicí pro neznámou funkci $\mu = \mu(x, y)$ a její řešení může být obecně značně složité. Za speciálních podmínek lze však integrační faktor nalézt poměrně snadno. Uvedeme dva z těchto případů, kdy funkci μ budeme považovat za funkci pouze proměnné x , resp. y , a zároveň ukážeme, jaké požadavky musí splňovat funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$, aby taková funkce μ existovala.

2.6.2. Integrační faktor $\mu = \mu(x)$.

Funkce μ je funkcí pouze proměnné x , tedy $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$; dosazením do rovnice (2.11) dostáváme

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= \frac{d\mu}{dx}Q \\ \frac{d\mu}{\mu} &= \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Protože levá strana této rovnice je funkcí proměnné x , musí být i pravá strana funkcí pouze proměnné x . Tedy nutná podmínka k tomu, aby integrační faktor existoval ve tvaru $\mu = \mu(x)$, je

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \alpha(x).$$

Rovnici (2.12) lze proto psát ve tvaru

$$\frac{d\mu}{\mu} = \alpha(x)dx,$$

což je DR se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $\mu = \mu(x)$, jejíž řešení určíme takto:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \alpha(x) dx, \\ \ln|\mu| = \int \alpha(x) dx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \alpha(x) dx}.$$

2.6.3. Integrační faktor $\mu = \mu(y)$.

Funkce μ je funkcí pouze proměnné y , tedy $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$ a dosazením do rovnice (2.11) dostaneme

$$\mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = - \frac{d\mu}{dy} P \\ \frac{d\mu}{\mu} = - \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dy. \quad (2.13)$$

Aby integrační faktor nyní existoval ve tvaru $\mu = \mu(y)$, musí platit

$$- \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \beta(y),$$

a rovnici (2.13) lze tedy psát ve tvaru

$$\frac{d\mu}{\mu} = \beta(y) dy,$$

což je DR se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $\mu = \mu(y)$ s řešením

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \beta(y) dy \\ \ln|\mu| = \int \beta(y) dy \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \beta(y) dy}.$$

2.6.4. Příklad. Řešte DR $\cos y \, dx + (e^x + \sin y) dy = 0$.

Řešení. Rovnice není exaktní, neboť

$$P(x, y) = \cos y, \quad Q(x, y) = e^x + \sin y, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dále je

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{e^x + \sin y} [-(\sin y + e^x)] = -1 = \alpha(x).$$

Podmínka pro existenci integračního faktoru jako funkce proměnné x je tedy splněna a platí

$$\ln \mu(x) = \int \alpha(x) dx = - \int dx = -x \Rightarrow \mu(x) = e^{-x}.$$

Vynásobením dané DR tímto integračním faktorem dostaneme

$$e^{-x} \cos y \, dx + (1 + e^{-x} \sin y) dy = 0.$$

Pro kontrolu ověříme podmínku exaktnosti rovnice (označme $\bar{P} = \mu P, \bar{Q} = \mu Q$) :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = -e^{-x} \sin y, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = -e^{-x} \sin y \Rightarrow \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}.$$

Hledáme příslušnou kmenovou funkci, pro kterou je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{-x} \cos y,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + e^{-x} \sin y.$$

Z první rovnice máme

$$\Phi(x, y) = \int e^{-x} \cos y dx + \varphi(y) = -e^{-x} \cos y + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{-x} \sin y + \frac{d\varphi}{dy}.$$

Porovnáním s druhou rovnicí dostaneme

$$1 + e^{-x} \sin y = e^{-x} \sin y + \frac{d\varphi}{dy} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dy} = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y + C.$$

Kmenová funkce je $\Phi(x, y) = -e^{-x} \cos y + y + C$, a obecné řešení dané rovnice je

$$y - e^{-x} \cos y = K.$$

2.6.5. Příklad. Řešte DR $(1 + 3x^2 \sin y)dx - x \cotg y dy = 0$.

Řešení.

$$P(x, y) = 1 + 3x^2 \sin y, Q(x, y) = -x \cotg y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \cos y, \frac{\partial Q}{\partial x} = -\cotg y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \cos y + \cotg y = (3x^2 \sin y + 1) \cotg y$$

$$-\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{1}{1 + 3x^2 \sin y} (3x^2 \sin y + 1) \cotg y = -\cotg y = \beta(y).$$

Je tedy splněna podmínka pro existenci integračního faktoru jako funkce proměnné y .

$$\ln \mu(y) = \int \beta(y) dy = -\int \cotg y dy = -\ln|\sin y| \Rightarrow \mu(y) = \frac{1}{\sin y}.$$

Po vynásobení dané rovnice tímto integračním faktorem obdržíme

$$\left(\frac{1}{\sin y} + 3x^2 \right) dx - x \frac{\cos y}{\sin^2 y} dy = 0.$$

Opět pro kontrolu ověříme podmínku exaktnosti rovnice

$$\bar{P}(x, y) = \frac{1}{\sin y} + 3x^2, \bar{Q}(x, y) = -x \frac{\cos y}{\sin^2 y}$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = -\frac{\cos y}{\sin^2 y}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = -\frac{\cos y}{\sin^2 y} \Rightarrow \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}.$$

Pro kmenovou funkci tedy platí

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\sin y} + 3x^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -x \frac{\cos y}{\sin^2 y},$$

$$\Phi(x, y) = \int \left(\frac{1}{\sin y} + 3x^2 \right) dx + \varphi(y) = \frac{x}{\sin y} + x^3 + \varphi(y).$$

Odtud derivací podle y dostaneme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -x \frac{\cos y}{\sin^2 y} + \frac{d\varphi}{dy}$$

a porovnáním s druhou rovnicí obdržíme

$$-x \frac{\cos y}{\sin^2 y} = -x \frac{\cos y}{\sin^2 y} + \frac{d\varphi}{dy} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dy} = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C.$$

Hledaná kmenová funkce je $\Phi(x, y) = \frac{x}{\sin y} + x^3 + C$

a obecné řešení dané rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{x}{\sin y} + x^3 = K.$$

2.7. Některé další speciální typy DR prvního řádu

2.7.1. Diferenciální rovnice tvaru $f(x, y') = 0$ nebo $f(y, y') = 0$.

Diferenciální rovnice tvaru $f(x, y') = 0$ nebo $f(y, y') = 0$ řešíme substitucí

$$y' = t, \text{ kde } t = t(x).$$

Užitím této substituce převedeme danou diferenciální rovnici na soustavu dvou rovnic, v níž jsou diferenciály dx, dy vyjádřeny jako funkce proměnné t . Jednak ze vztahu $y' = t$ okamžitě plyne $dy = t dx$, druhou rovnici dostaneme diferencováním zadané rovnice, do níž jsme dosadili $y' = t$.

Obecné řešení takových rovnic získáme obvykle v parametrickém vyjádření.

2.7.2. Příklad. Řešte DR $2y' + \sin(y') - x = 0$.

Řešení. Jedná se o rovnici typu $f(x, y') = 0$. Obecné řešení hledáme výše uvedeným způsobem. Dosadíme proto $y' = t$ do dané rovnice:

$$2t + \sin t - x = 0$$

$$x = 2t + \sin t,$$

odtud po diferencování

$$dx = (2 + \cos t)dt.$$

Protože ze substituční rovnice plyne

$$dy = t dx,$$

je

$$dy = (2t + t \cos t)dt$$

$$y = \int (2t + t \cos t)dt$$

$$y = t^2 + t \sin t + \cos t + C.$$

Obecné řešení dané rovnice je určeno parametrickými rovnicemi

$$x = 2t + \sin t$$

$$y = t^2 + t \sin t + \cos t + C, \text{ kde } t \in \mathbf{R} \text{ je parametr.}$$

2.7.3. Příklad. Řešte DR $(y')^2 + (y')^3 - y = 0$.

Řešení. Jedná se o rovnici typu $f(y, y') = 0$. Obecné řešení hledáme opět pomocí substituce $y' = t$:

$$y = t^2 + t^3.$$

Odtud diferencováním dostaneme rovnici

$$dy = (2t + 3t^2)dt$$

a protože je $dy = t dx$, máme

$$dx = (2 + 3t)dt \quad \text{pro } t \neq 0$$

$$\int dx = \int (2 + 3t)dt$$

$$x = 2t + \frac{3}{2}t^2 + C.$$

Obecné řešení obdržíme v parametrickém vyjádření

$$x = 2t + \frac{3}{2}t^2 + C$$

$$y = t^2 + t^3$$

Vyšetřeme případ, kdy $t = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = k, k \in \mathbf{R}$.

Dosazením do dané rovnice dostaneme

$$\left. \begin{array}{l} L = 0^2 + 0^3 - k = -k \\ P = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k = 0.$$

Proto $y = 0$ je také řešení dané DR, které ovšem dostaneme z obecného řešení pro parametr $t = 0$.

Všechna řešení zadané DR lze tedy zapsat ve tvaru

$$x = 2t + \frac{3}{2}t^2 + C$$

$$y = t^2 + t^3, \text{ kde } t \in \mathbf{R} \text{ je parametr.}$$

2.7.4. Definice. Clairautova DR je každá rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru

$$y = xy' + \varphi(y'), \quad (2.14)$$

kde funkce φ je nelineární spojitě diferencovatelná na určitém intervalu J .

2.7.5. Poznámka. V případě, že funkce φ je lineární (tj. $\varphi(y') = ay' + b$), máme DR ve tvaru

$$y = xy' + ay' + b$$

a po úpravě

$$y - b - y'(x + a) = 0$$

$$(y - b)dx - (x + a)dy = 0,$$

což je DR se separovatelnými proměnnými.

2.7.6. Věta. Pro Clairautovu DR $y = xy' + \varphi(y')$ platí:

a) Jejím obecným řešením je funkce

$$y = Cx + \varphi(C).$$

b) Její výjimečné řešení lze psát v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned} x &= -\varphi'(t) \\ y &= -t\varphi'(t) + \varphi(t). \end{aligned}$$

Důkaz. Clairautovu DR řešíme obdobně jako v článku 2.7.1 substitucí

$$y' = t, \text{ kde } t = t(x).$$

Dosazením do rovnice (2.14) dostaneme

$$y = xt + \varphi(t),$$

odtud po derivaci podle proměnné x máme

$$y' = t + x \frac{dt}{dx} + \varphi'(t) \frac{dt}{dx},$$

a protože $y' = t$, platí

$$\left[x + \varphi'(t) \right] \frac{dt}{dx} = 0,$$

takže

$$\frac{dt}{dx} = 0 \quad \vee \quad x + \varphi'(t) = 0.$$

Tedy

$$\text{a) } \frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow t = C \Rightarrow y' = C$$

a dosazením do rovnice (2.14) dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$y = Cx + \varphi(C).$$

$$\text{b) } x + \varphi'(t) = 0 \Rightarrow x = -\varphi'(t)$$

a po dosazení do rovnice (2.14) je

$$y = -t\varphi'(t) + \varphi(t).$$

Lze tedy hledané řešení zapsat ve tvaru

$$x = -\varphi'(t)$$

$$y = -t\varphi'(t) + \varphi(t),$$

a protože toto řešení nelze obdržet z obecného řešení pro žádnou volbu konstanty C , jedná se o výjimečné řešení.

2.7.7. Věta. Výjimečné řešení Clairautovy DR je obálkou jednoparametrického systému přímk, které jsou vyjádřeny příslušným obecným řešením.

Důkaz. Stačí ukázat, že každá tečna sestavená v libovolném bodě $t = t_0$ ke křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = -\varphi'(t)$$

$$y = -t\varphi'(t) + \varphi(t)$$

patří do jednoparametrického systému přímk, které jsou vyjádřeny rovnicí

$$y = Cx + \varphi(C).$$

Hledáme rovnici tečny ve tvaru

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

kde

$$x_0 = -\varphi'(t_0), \quad y_0 = -t_0\varphi'(t_0) + \varphi(t_0) \quad \text{a} \quad y'(x_0) = t_0, \quad \text{protože} \quad y' = t.$$

Tečna má tedy rovnici

$$y + t_0\varphi'(t_0) - \varphi(t_0) = t_0[x + \varphi'(t_0)]$$

$$y = t_0x + \varphi(t_0),$$

tj. pro $t_0 = C$

$$y = Cx + \varphi(C).$$

2.7.8. Poznámky. a) Z předešlé věty je zřejmé, že výjimečné řešení Clairautovy DR je zároveň řešením singulárním, protože každým bodem této integrální křivky lze vést tečnu, jejíž rovnice je rovněž řešením příslušné Clairautovy DR a je tedy v každém jejím bodě porušena jednoznačnost řešení.

b) Pro ilustraci viz příklad 1.3.8 a příslušný obr. 1.4 .

2.7.9. Příklad. Řešte DR $y = xy' - \sqrt{1 + (y')^2}$ a znázorněte tvar integrálních křivek.

Řešení. Jedná se o Clairautovu DR, kde $\varphi(y') = -\sqrt{1 + (y')^2}$.

Podle tvrzení a) věty 2.7.6 lze obecné řešení psát ve tvaru

$$y = Cx - \sqrt{1 + C^2},$$

což z geometrického hlediska představuje jednoparametrický systém přímek.

Protože

$$-\varphi'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{a} \quad -t\varphi'(t) + \varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}t - \sqrt{1+t^2},$$

má podle tvrzení b) téže věty výjimečné řešení parametrické vyjádření

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \frac{-1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Pro názornost můžeme z těchto rovnic vyloučit parametr t tak, že je umocníme na druhou a sečteme

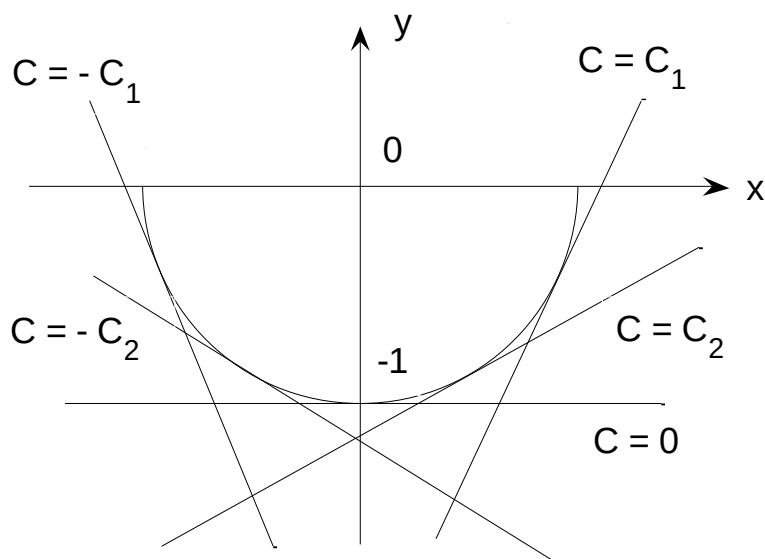
$$x^2 + y^2 = \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2},$$

tedy

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \text{přičemž} \quad y < 0.$$

Jde o půlkružnici se středem v počátku a poloměrem $r = 1$, ležící pod osou x .

Přímky o rovnici $y = Cx - \sqrt{1 + C^2}$, $C \in \mathbf{R}$, jsou tečnami této půlkružnice (obr. 2.1).



Obr. 2.1. $C_1 = \sqrt{3}$, $C_2 = 1/\sqrt{3}$

2.7.10. Definice. Lagrangeova DR je každá rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru

$$y = xf(y') + \varphi(y'), \quad (2.15)$$

kde funkce f, φ jsou spojitě diferencovatelné na určitém intervalu J .

2.7.11. Věta. Lagrangeovu DR převedeme substitucí $y' = t$, kde $t = t(x)$, na lineární diferenciální rovnici 1. řádu pro neznámou funkci $x = x(t)$.

Důkaz. Dosazením $y' = t$ do Lagrangeovy DR dostaneme

$$y = xf(t) + \varphi(t)$$

a odtud po derivaci podle proměnné x máme

$$y' = f(t) + xf'(t) \frac{dt}{dx} + \varphi'(t) \frac{dt}{dx}.$$

Vzhledem k tomu, že $y' = t$, dostáváme pro $\frac{dt}{dx} \neq 0$

$$[t - f(t)]x'(t) - f'(t)x(t) = \varphi'(t),$$

což je LDR 1. řádu pro neznámou funkci $x = x(t)$.

2.7.12. Poznámky. a) Je-li $\frac{dt}{dx} = 0$, potom nutně je také $t - f(t) = 0$. V případě, že je tato rovnost splněna identicky (tj. $f(y') = y'$), jedná se o Clairautovu DR, která je proto speciálním případem Lagrangeovy DR.

b) Je-li $\alpha_k \in \mathbf{R}$ řešení rovnice $t - f(t) = 0$, potom je $y' = \alpha_k$, a tedy funkce $y = \alpha_k x$ mohou být výjimečnými řešeními Lagrangeovy DR. Tuto skutečnost je třeba ověřit dosazením.

2.7.13. Příklad. Řešte DR $y = x(1 + y') + (y')^2$.

Řešení. Jedná se o Lagrangeovu DR, kde $f(y') = 1 + y'$, $\phi(y') = (y')^2$. Dosadíme $y' = t$, kde $t = t(x)$, a dostaneme

$$y = x(1 + t) + t^2. \quad (2.16)$$

Derivováním podle proměnné x dostaneme postupně

$$\begin{aligned} y' &= 1 + t + x \frac{dt}{dx} + 2t \frac{dt}{dx} \\ t &= 1 + t + (x + 2t) \frac{dt}{dx} \\ (x + 2t) \frac{dt}{dx} + 1 &= 0 \quad \Big| : \frac{dt}{dx}, \frac{dt}{dx} \neq 0 \\ x + 2t + \frac{dx}{dt} &= 0 \\ x' + x &= -2t, \end{aligned} \quad (2.17)$$

což je LDR 1. řádu pro funkci $x = x(t)$. Metodou variace konstanty nalezneme její obecné řešení ve tvaru

$$x(t) = 2(1 - t) + Ce^{-t}.$$

Dosazením do rovnice (2.16) dostaneme

$$\begin{aligned} y(t) &= [2(1 - t) + Ce^{-t}](1 + t) + t^2 \\ y(t) &= 2 - t^2 + C(1 + t)e^{-t} \end{aligned}$$

a obecné řešení lze tedy napsat v parametrickém vyjádření

$$\begin{aligned} x &= 2(1 - t) + Ce^{-t} \\ y &= 2 - t^2 + C(1 + t)e^{-t}, \text{ kde } t \in \mathbf{R} \text{ je parametr.} \end{aligned}$$

Podmínka $\frac{dt}{dx} = 0$ nevede k žádnému dalšímu řešení, protože po jejím dosazení do rovnice (2.17) dostaneme $1 = 0$, což je zjevně nesplnitelné.

Příklady k procvičení.

P2.3. Řešte diferenciální rovnici:

- | | |
|--|----------------------------|
| a) $x^2 y' \cdot \sin 2y = x \cdot \cos 2y + 1$, | |
| b) $(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$, | |
| c) $y' + \ln y' - x = 0$, | d) $y' + \ln y' - y = 0$, |
| e) $y = xy' + e^{-y'}$, | f) $y = 2xy' - (y')^2$. |

P2.4. Řešte Cauchyho úlohu:

a) $(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0$ pro $y(0) = 1$,

b) $(y^3 - \ln x) \cdot y' + \frac{y}{x} = 0$ pro $y(1) = 2$, c) $2 \cdot (y')^3 - x \cdot (y')^2 = 1$ pro $y(1) = 0$,

d) $(y')^2 - y + 2 = 0$ pro $y(0) = 2$, e) $y = xy' + y' + (y')^2$ pro $y(0) = 2$,

f) $y = (x+1) \cdot (y')^2$ pro $y(0) = 1$.

Výsledky:

P2.3. a) $2x + x^2 \cos 2y = C$; b) $(x \sin y + y \cos y - \sin y) \cdot e^x = C$, $\mu(x) = e^x$;

c) $x = t + \ln t$, $y = \frac{1}{2}t^2 + t + C$; d) $x = \ln t - \frac{1}{t} + C$, $y = t + \ln t$;

e) $y = Cx + e^{-C}$, sing. ř. $y = x - x \ln x$; f) $x = \frac{2}{3}t + \frac{C}{t^2}$, $y = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2C}{t}$, sing. ř. $y = 0$.

P2.4. a) $x^2 + y + e^{xy} = 2$; b) $y^3 + 2 \ln x = 4y$, $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$; c) $x = 2t - \frac{1}{t^2}$, $y = t^2 - \frac{2}{t} + 1$;

d) $y = \frac{x^2}{4} + 2$ a $y = 2$; e) $y = x + 2$ a $y = -2x + 2$; f) $y = x + 1$ a $y = (\sqrt{x+1} - 2)^2$.

2.8. Směrové pole

2.8.1. Princip metody. Necht' je dána diferenciální rovnice ve tvaru $y' = f(x, y)$, přičemž funkce $f(x, y)$ je spojitá a ohraničená na oblasti D a na této oblasti splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné y . Podle věty 1.3.11 tedy každým vnitřním bodem $[x_0, y_0] \in D$ prochází právě jedna integrální křivka dané DR.

Vztah $y' = f(x, y)$ můžeme ovšem chápat také tak, že každému bodu $[x_0, y_0] \in D$ je přiřazena hodnota $f(x_0, y_0)$, která je z geometrického hlediska rovna směrnici tečny k integrální křivce procházející tímto bodem.

Sestrojíme-li v každém vnitřním bodě $[x_0, y_0] \in D$ malou úsečku (element tečny) se směrnici $k = f(x_0, y_0)$, dostaneme tzv. **směrové pole**.

Pro snadnější znázornění směrového pole je výhodné sestavit **izokliny**, což jsou křivky spojující body, kterým přísluší stejná směrnice k . Je tedy zřejmé, že rovnice izoklin mají tvar

$$f(x, y) = k, \text{ kde } k \in \mathbf{R}.$$

Pomocí směrového pole lze přibližně sestavit integrální křivky, čímž získáme grafické znázornění řešení dané rovnice.

2.8.2. Příklad. Znázorněte směrové pole a načrtněte integrální křivky rovnice $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Řešení. Směrové pole znázorníme pomocí izoklin, které mají v tomto případě rovnici

$$k = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

Tuto rovnici upravíme:

$$\begin{aligned}x^2 + 2kxy - y^2 &= 0 \\x^2 + 2kxy + k^2y^2 - k^2y^2 - y^2 &= 0 \\(x + ky)^2 - (k^2 + 1)y^2 &= 0 \\(x + ky - y\sqrt{k^2 + 1})(x + ky + y\sqrt{k^2 + 1}) &= 0.\end{aligned}$$

Jedná se tedy o dvě různoběžky

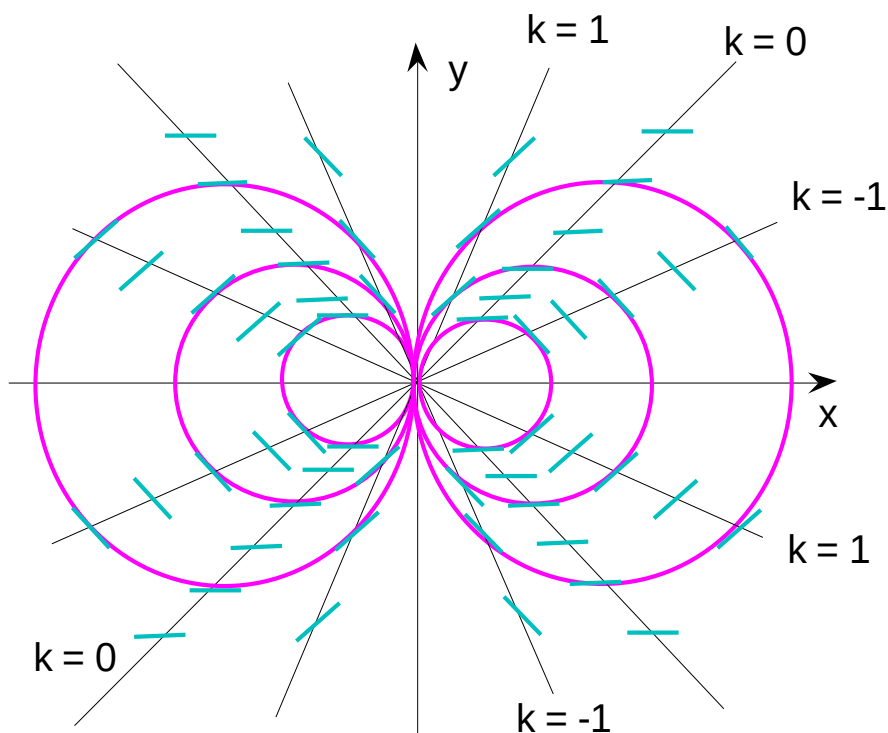
$$p: x + (k - \sqrt{k^2 + 1})y = 0, \quad q: x + (k + \sqrt{k^2 + 1})y = 0.$$

Pro směrnice těchto přímek platí, že

$$\begin{aligned}k_p &= \frac{-1}{k - \sqrt{k^2 + 1}}, \quad k_q = \frac{-1}{k + \sqrt{k^2 + 1}} \\k_p \cdot k_q &= \frac{-1}{k - \sqrt{k^2 + 1}} \cdot \frac{-1}{k + \sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{k^2 - (k^2 + 1)} = -1 \Rightarrow p \perp q.\end{aligned}$$

Izokliny jsou tedy tvořeny soustavou dvojic navzájem kolmých přímek, které pocházejí počátkem souřadného systému.

Například pro $k = 0$ dostaneme dvojici přímek $y = x$, $y = -x$. V každém bodě těchto přímek je směrnice k tečen integrálních křivek rovna 0, a proto v bodech uvedených přímek sestrojíme krátké úsečky rovnoběžné s osou x .



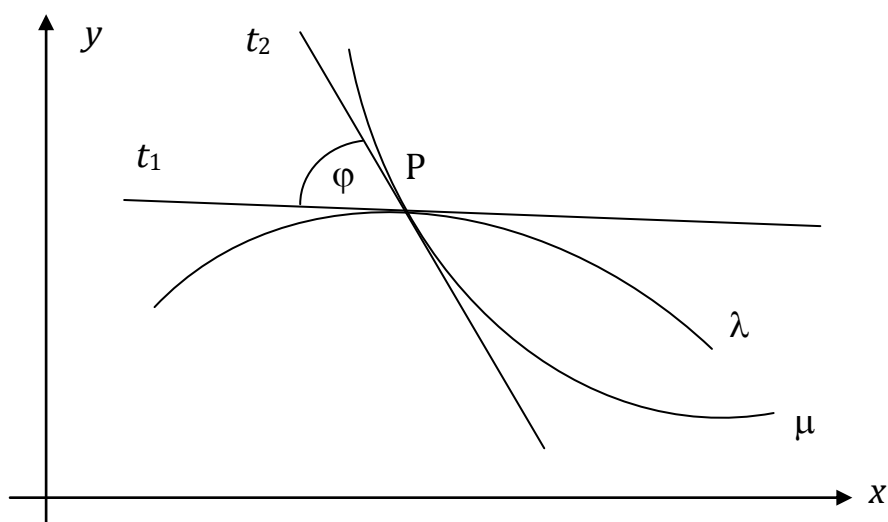
Obr. 2.2

Na obr.2.2 jsou ještě znázorněny izokliny pro $k = 1$, resp. $k = -1$, kde tečny k integrálním křivkám svírají s kladnou poloosou x úhel $\varphi = 45^\circ$, resp. $\varphi = 135^\circ$. Lze samozřejmě volit další hodnoty $k \in \mathbf{R}$, čímž dostaneme hustší síť izoklin a tedy i lepší představu o tvaru integálních křivek.

2.9. Ortogonální trajektorie

Jednou z mnoha praktických aplikací DR je určení tzv. ortogonálních trajektorií, to je rovinných křivek, které protínají danou soustavu jiných rovinných křivek pod pravým úhlem. Ortogonální trajektorie tak spolu s danými křivkami tvoří určitou „pravoúhlou síť“; jako příklad můžeme uvést vrstevnice a spádnice nebo ekvipotenciální čáry a proudnice.

2.9.1. Definice. Odchylkou φ dvou rovinných křivek λ, μ v jejich průsečíku P nazýváme velikost ostrého úhlu tečen, sestojených k oběma křivkám v bodě P (obr. 2.3).



Obr. 2.3

2.9.2. Definice. a) **Izogonální trajektorie** soustavy rovinných křivek jsou takové rovinné křivky, které protínají všechny křivky dané soustavy při stejné odchylce φ .

b) Je-li $\varphi = \frac{\pi}{2}$, hovoříme o **ortogonálních trajektoriích**.

2.9.3. Věta. Necht' je dán jednoparametrický systém rovinných křivek o rovnici

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

a necht' $f(x, y, y') = 0$ je DR tohoto systému.

Potom rovnice

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

je DR ortogonálních trajektorií daného systému.

Důkaz. Necht' křivky λ (z daného systému), resp. μ (z hledaného ortogonálního systému), mají rovnice $y_1 = y_1(x)$, resp. $y_2 = y_2(x)$, a protínají se v bodě $P = [x_0, y_0]$. Je zřejmé, že

$$y_1(x_0) = y_2(x_0). \quad (2.19)$$

Dále pro směrnice tečen t_1, t_2 k těmto křivkám ve společném bodě $P = [x_0, y_0]$ platí

$$k_1 = y_1'(x_0), \text{ resp. } k_2 = y_2'(x_0).$$

Patří-li křivka λ do daného jednoparametrického systému křivek, je nutně identicky splněna rovnost

$$f[x_0, y_1(x_0), y_1'(x_0)] = 0. \quad (2.20)$$

Má-li křivka μ patřit do ortogonálního systému, pak

$$t_1 \perp t_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow y_1'(x_0) = -\frac{1}{y_2'(x_0)}.$$

Dosadíme-li tento vztah spolu se vztahem (2.19) do rovnice (2.20), obdržíme opět identitu

$$f\left[x_0, y_2(x_0), -\frac{1}{y_2'(x_0)}\right] = 0.$$

To ovšem znamená, že každá křivka z hledaného ortogonálního systému je řešením DR

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

2.9.4. Poznámky. a) Připomeňme, že diferenciální rovnici $f(x, y, y') = 0$ dostaneme z rovnice $\Phi(x, y, C) = 0$ vyloučením konstanty C (viz článek 1.2.2).

b) Pro $\varphi \in (0; \pi/2)$ má diferenciální rovnice izogonálních trajektorií tvar

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + k \cdot y'}\right) = 0, \text{ kde } k = \pm \operatorname{tg} \varphi.$$

2.9.5. Příklad. Určete ortogonální trajektorie systému křivek o rovnici $x^2 + y^2 = Cx$.

Řešení. Jak snadno zjistíme, jedná se o kružnice se středem na ose x procházející počátkem souřadného systému.

Příslušnou DR dostaneme vyloučením konstanty C . K tomu potřebujeme kromě dané rovnice ještě jednu rovnost, kterou obdržíme derivací podle proměnné x , přičemž $y = y(x)$. Máme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= Cx \\ 2x + 2yy' &= C \end{aligned}$$

a odtud eliminací konstanty C

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2x + 2yy')x \\ y^2 - x^2 &= 2xyy', \end{aligned}$$

což je hledaná DR daného systému.

Nahradíme-li v této rovnici y' výrazem $-\frac{1}{y'}$, dostaneme DR ortogonálních trajektorií

$$y^2 - x^2 = 2xy\left(-\frac{1}{y'}\right),$$

odkud po úpravě máme

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

což je homogenní DR. Podle Věty 2.2.2 převedeme tuto rovnici substitucí $y = ux$ na separovanou DR

$$\frac{1-u^2}{u(u^2+1)} du = \frac{1}{x} dx,$$

která má obecné řešení

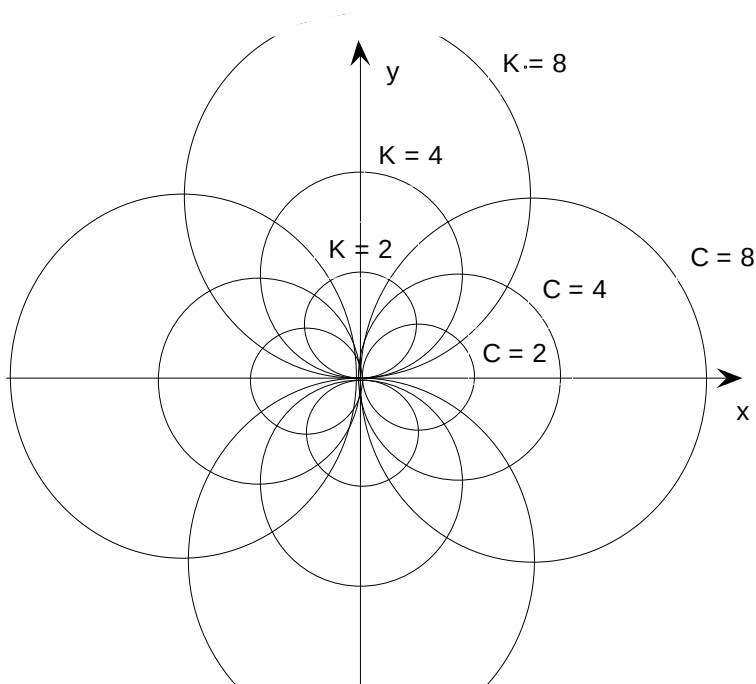
$$\frac{u}{u^2+1} = kx.$$

Dosazením $u = \frac{y}{x}$ a po úpravě obdržíme obecné řešení uvedené homogenní DR ve tvaru

$$x^2 + y^2 = Ky,$$

což je hledaná rovnice ortogonálních trajektorií.

Opět snadno zjistíme, že se jedná o kružnice se středem na ose y procházející počátkem souřadného systému. Zadaný systém rovinných křivek a jeho ortogonální trajektorie jsou znázorněny na obr. 2.4.



Obr. 2.4. Kružnice se středy na záporných poloosách odpovídají konstantám C a K s opačnými znaménky

Příklady k procvičení.

P2.5. Znázorněte směrové pole a načrtněte integrační křivky diferenciální rovnice:

a) $y' = x + y$,

b) $xy' + 2y = 0$,

c) $y' = x^2 + y^2 + 2xy$.

P2.6. Určete ortogonální trajektorie systému křivek o rovnici:

a) $y^2 = 4(x - C)$,

b) $x^2 + 4y^2 = C^2$,

c) $xy = C$.

Výsledky:

P2.6. a) $y = K.e^{-\frac{x}{2}}$, b) $y = K.x^4$, c) $x^2 - y^2 = K$.

2.10. Některé numerické metody řešení DR 1. řádu

2.10.1. Formy řešení DR. V předcházejících kapitolách jsme nacházeli řešení DR explicitním, resp. implicitním, resp. parametrickém tvaru. Možnost vyjádření řešení konečným počtem elementárních funkcí závisí především na následujících dvou faktorech.

a) Typ DR: V praxi se často setkáváme s diferenciálními rovnicemi, které nelze zařadit do žádného z uvedených (i dalších neuvedených) typů, tedy pro ně neexistuje algoritmus, který by vedl k nalezení řešení v analytickém tvaru.

b) Určení primitivní funkce: I když pro danou diferenciální rovnici existuje příslušný algoritmus, narazíme v mnoha případech na nemožnost nalezení primitivní funkce (např. vyšší transcendentní funkce).

Tyto důvody vedou k tomu, že hledané řešení dané diferenciální rovnice určíme buď grafem (viz kapitola 2.8) nebo tabulkou hodnot. Touto problematikou se zabývá zvláštní obor numerické matematiky, a proto v tomto skriptu uvedeme (spíše pro informaci) pouze dvě základní metody.

2.10.2. Eulerova metoda. Hledejme řešení DR $y' = f(x, y)$ pro $y(x_0) = y_0$.

Nechť funkce $y = y(x)$ představuje neznámé (přesné) řešení dané úlohy. Předpokládejme, že tato funkce je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a má derivaci na (a, b) . Potom podle Lagrangeovy věty (první věta o přírůstku funkce) existuje alespoň jedno reálné číslo $c \in (a, b)$ takové, že platí

$$y(b) - y(a) = y'(c) \cdot (b - a),$$

což lze zapsat také ve tvaru

$$y(b) - y(a) = y'(a + \theta \cdot (b - a)) \cdot (b - a), \text{ kde } \theta \in (0, 1).$$

Označíme-li $a = x_0$, $b = x_0 + h$, $h > 0$, dostaneme jednoduchými úpravami

$$y(x_0 + h) - y(x_0) = h \cdot y'(x_0 + h\theta)$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0 + h\theta)$$

$$y(x_0 + h) = y_0 + h \cdot f(x_0 + h\theta, y(x_0 + h\theta)).$$

Pro $h \rightarrow 0$ je také $h\theta \rightarrow 0$, a proto se nabízí pro výpočet přibližné hodnoty $\hat{y}$ hledané funkce v bodě $x_0 + h$ zvolit vztah

$$\hat{y}(x_0 + h) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

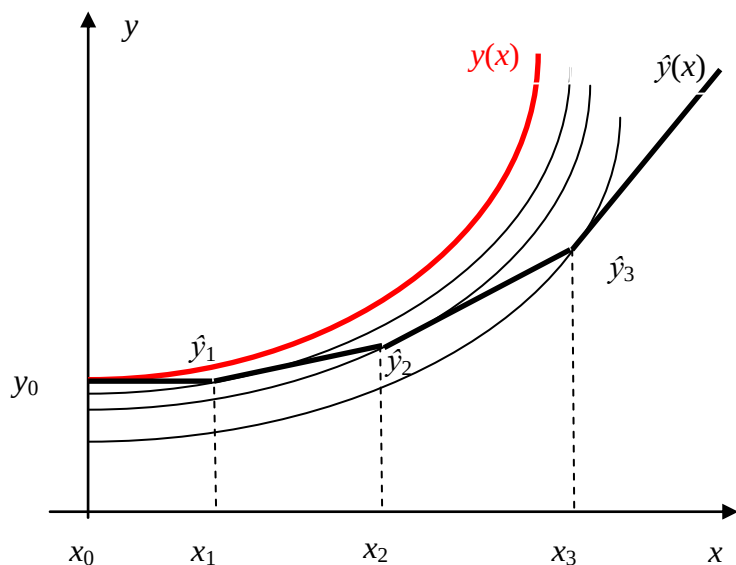
Označíme-li $x_1 = x_0 + h$, $\hat{y}_1 = \hat{y}(x_1)$ a dosadíme-li do předchozího vztahu za x_0 hodnotu x_1 a za y_0 hodnotu $\hat{y}_1$, dostaneme

$$\hat{y}(x_1 + h) = \hat{y}_1 + h \cdot f(x_1, \hat{y}_1).$$

Obecně tedy máme

$$\hat{y}(x_n) = \hat{y}_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, \hat{y}_{n-1}), \quad (2.21)$$

kde $x_n = x_{n-1} + h$ ($h > 0$), $\hat{y}_{n-1} = \hat{y}(x_{n-1})$ a $\hat{y}_0 = y_0 = y(x_0)$.



Obr. 2.5

Obdržíme tak posloupnost bodů $\{[x_i, \hat{y}_i]\}_{i=0}^n$, jejichž spojením je lomená čára, která aproximuje graf přesného řešení dané rovnice (obr.2.5).

Pro odhad chyby této metody lze ukázat, že existuje konstanta $K > 0$ taková, že platí

$$|\hat{y}_1 - y_1| \leq K \cdot h^2,$$

$$|\hat{y}_n - y_n| \leq K \cdot h, \text{ pro } n = 2, 3, \dots$$

pro „dostatečně malá“ $h > 0$.

Připomeňme, že symbol $\hat{y}_i$ označuje přibližnou hodnotu řešení v bodě x_i a symbol y_i je přesná hodnota řešení v tomto bodě. Je zřejmé, že tato metoda je obecně tím přesnější, čím menší zvolíme krok h .

2.10.3. Poznámka. Existuje ještě tzv. zpřesněná Eulerova metoda, která hodnotu $\hat{y}_n$ (vypočtenou podle vztahu 2.21) nahradí přesnější hodnotou

$$\tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + \frac{h}{2} [f(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}) + f(x_n, \hat{y}_n)], \quad (2.22)$$

přičemž $\hat{y}_n = \hat{y}(x_n) = \tilde{y}_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-1})$ a $\tilde{y}_0 = \hat{y}_0 = y_0 = y(x_0)$.

2.10.4. Příklad. Eulerovou (resp. zpřesněnou) metodou nalezněte přibližné řešení Cauchyho úlohy $y' = y - \frac{2x}{y}$, $y(0) = 1$ na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$ s krokem $h = 0,1$.

Řešení. a) Eulerova metoda využívá vztahu (2.21)

$$\hat{y}(x_n) = \hat{y}_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, \hat{y}_{n-1}),$$

kde $f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$, $x_0 = 0$, $\hat{y}_0 = y_0 = 1$.

Dosazením postupně dostáváme

$$\hat{y}_1 = \hat{y}_0 + h \cdot f(x_0, \hat{y}_0) = 1 + 0,1 \left(1 - \frac{2,0}{1} \right) = 1,1$$

$$\hat{y}_2 = \hat{y}_1 + h \cdot f(x_1, \hat{y}_1) = 1,1 + 0,1 \left(1,1 - \frac{2,0,1}{1,1} \right) \approx 1,1918$$

$$\hat{y}_3 = \hat{y}_2 + h \cdot f(x_2, \hat{y}_2) = 1,1918 + 0,1 \left(1,1918 - \frac{2,0,2}{1,1918} \right) \approx 1,2771$$

$$\hat{y}_4 = \hat{y}_3 + h \cdot f(x_3, \hat{y}_3) = 1,2771 + 0,1 \left(1,2771 - \frac{2,0,3}{1,2771} \right) \approx 1,3578$$

$$\hat{y}_5 = \hat{y}_4 + h \cdot f(x_4, \hat{y}_4) = 1,3578 + 0,1 \left(1,3578 - \frac{2,0,4}{1,3578} \right) \approx 1,4347.$$

b) Zpřesněná Eulerova metoda využívá vztahu (2.22)

$$\tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + \frac{h}{2} [f(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}) + f(x_n, \hat{y}_n)],$$

přičemž

$$\hat{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}),$$

kde opět $f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$, $x_0 = 0$, $\tilde{y}_0 = \hat{y}_0 = y_0 = 1$.

Postupným dosazováním do těchto vztahů obdržíme

$$\hat{y}_1 = \tilde{y}_0 + h \cdot f(x_0, \tilde{y}_0) = 1 + 0,1 \left(1 - \frac{2,0}{1} \right) = 1,1$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, \tilde{y}_0) + f(x_1, \hat{y}_1)] = 1 + \frac{0,1}{2} \left[\left(1 - \frac{2,0}{1} \right) + \left(1,1 - \frac{2,0,1}{1,1} \right) \right] \approx 1,0959$$

$$\hat{y}_2 = \tilde{y}_1 + h \cdot f(x_1, \tilde{y}_1) = 1,0959 + 0,1 \left(1,0959 - \frac{2,0,1}{1,0959} \right) \approx 1,1872$$

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + \frac{h}{2} [f(x_1, \tilde{y}_1) + f(x_2, \hat{y}_2)] = \dots \approx 1,1841$$

$$\hat{y}_3 = \tilde{y}_2 + h \cdot f(x_2, \tilde{y}_2) = 1,1841 + 0,1 \left(1,1841 - \frac{2,0,2}{1,1841} \right) \approx 1,2687$$

$$\tilde{y}_3 = \tilde{y}_2 + \frac{h}{2} [f(x_2, \tilde{y}_2) + f(x_3, \hat{y}_3)] = \dots \approx 1,2662$$

$$\hat{y}_4 = \tilde{y}_3 + h \cdot f(x_3, \tilde{y}_3) = 1,2662 + 0,1 \left(1,2662 - \frac{2,0,3}{1,2662} \right) \approx 1,3454$$

$$\tilde{y}_4 = \tilde{y}_3 + \frac{h}{2} [f(x_3, \tilde{y}_3) + f(x_4, \hat{y}_4)] = \dots \approx 1,3434$$

$$\hat{y}_5 = \tilde{y}_4 + h \cdot f(x_4, \tilde{y}_4) = 1,3434 + 0,1 \left(1,3434 - \frac{2,0,4}{1,3434} \right) \approx 1,4182$$

$$\tilde{y}_5 = \tilde{y}_4 + \frac{h}{2} [f(x_4, \tilde{y}_4) + f(x_5, \hat{y}_5)] = \dots \approx 1,4164$$

Pro přehlednost zapíšeme zjištěné hodnoty do tabulky:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\hat{y}$	1	1,1000	1,1918	1,2771	1,3578	1,4347
$\tilde{y}$	1	1,0959	1,1841	1,2662	1,3434	1,4162
y	1	1,0954	1,1832	1,2649	1,3416	1,4142

Vypočtené hodnoty jsme bez ohledu na přesnost metody zaokrouhlovali na čtyři desetinná místa. V posledním řádku tabulky jsou uvedeny přesné hodnoty řešení (opět zaokrouhleny). Daná rovnice je totiž Bernoulliho DR, jejímž řešením je pro danou počáteční podmínku funkce $y = \sqrt{2x+1}$. Tento příklad jsme volili proto, abychom ilustrovali rozdíly v přesnosti těchto metod.

2.10.5. Runge-Kuttovy metody. Hledejme opět řešení DR $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.

Hodnotu řešení v bodě $x_0 + h$ ($h > 0$ je pevně zvolený krok) lze vyjádřit pomocí Taylorovy formule ve tvaru

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x_0) + \dots$$

Zavedeme-li označení

$$k = y'(x_0 + h) - y'(x_0),$$

pak přírůstek k funkční hodnoty, odpovídající přírůstku h nezávisle proměnné, je dán vztahem

$$k = h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x_0) + \dots$$

Základem všech Runge-Kuttových metod je vyjádření přírůstku k ve tvaru

$$k = \sum_{i=1}^m w_i \cdot k_i,$$

kde

$$k_i = h \cdot f\left(x_0 + \alpha_i \cdot h, y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \cdot k_j\right), \quad (2.23)$$

přičemž $\alpha_1 = 0$.

Zatím neznámé konstanty $w_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ je třeba určit tak, aby platila rovnost

$$h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x_0) + \dots = \sum_{i=1}^m w_i \cdot k_i. \quad (2.24)$$

To ovšem znamená, že se musejí rovnat koeficienty u stejných mocnin h^r výrazů na obou stranách rovnice (2.24) pro $r = 1, 2, \dots, M$. Lze ukázat, že nejlepšího výsledku (co se týká přesnosti) lze dosáhnout pro $m = M$. Hovoříme pak o **Runge-Kuttově metodě řádu M** .

Pro ilustraci odvodíme vzorce pro Runge-Kuttovu metodu řádu $M = 2$, tj. porovnáme koeficienty u h a h^2 (koeficienty u vyšších mocnin neuvažujeme).

Protože $m = M = 2$, můžeme rovnost (2.24) zapsat ve tvaru

$$h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x_0) = w_1 \cdot k_1 + w_2 \cdot k_2. \quad (2.25)$$

Především je $y'(x) = f(x, y)$, přičemž $y(x_0) = y_0$, a tedy

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Dále je

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y'(x)$$

a tedy

$$\begin{aligned} y''(x_0) &= f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) \\ y''(x_0) &= f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Levá strana rovnice (2.25) je tedy tvaru

$$\begin{aligned} L &= h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \cdot [f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0)] \\ L &= h \cdot f(x_0, y_0) + h^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot f'_x(x_0, y_0) + h^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot f'_y(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Upravme nyní pravou stranu rovnice (2.25), tedy

$$P = w_1 \cdot k_1 + w_2 \cdot k_2,$$

kde podle vztahu (2.23) pro $m = 2$ je

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) \\ k_2 &= h \cdot f(x_0 + \alpha_2 \cdot h, y_0 + \beta_{21} \cdot k_1) = h \cdot \underbrace{f[x_0 + \alpha_2 \cdot h, y_0 + \beta_{21} \cdot h \cdot f(x_0, y_0)]}_{F(h)} = h \cdot F(h). \end{aligned}$$

Určíme nyní první dva členy Taylorova rozvoje funkce $F(h)$ v okolí bodu $h = 0$, tedy

$$F(h) = F(0) + h \cdot \frac{dF(0)}{dh}.$$

Protože funkce $F(h)$ je složená funkce, tj.

$$F(h) = f(x, y), \text{ kde } x = x_0 + \alpha_2 \cdot h, y = y_0 + \beta_{21} \cdot h \cdot f(x_0, y_0),$$

dostáváme

$$\begin{aligned} F(h) &= f(x_0, y_0) + h \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dh} \right]_{h=0} = \\ &= f(x_0, y_0) + h \cdot [f'_x(x_0, y_0) \cdot \alpha_2 + f'_y(x_0, y_0) \cdot \beta_{21} \cdot f(x_0, y_0)]. \end{aligned}$$

Máme tedy

$$k_2 = h \cdot F(h) = h \cdot f(x_0, y_0) + h^2 \cdot [f'_x(x_0, y_0) \cdot \alpha_2 + f'_y(x_0, y_0) \cdot \beta_{21} \cdot f(x_0, y_0)].$$

Pravou stranu rovnice (2.25) můžeme proto zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} P &= w_1 \cdot k_1 + w_2 \cdot k_2 = \\ &= w_1 \cdot h \cdot f(x_0, y_0) + w_2 \cdot \{ h \cdot f(x_0, y_0) + h^2 \cdot [f'_x(x_0, y_0) \cdot \alpha_2 + f'_y(x_0, y_0) \cdot \beta_{21} \cdot f(x_0, y_0)] \}, \end{aligned}$$

odkud po jednoduché úpravě je

$$P = h \cdot (w_1 + w_2) \cdot f(x_0, y_0) + h^2 \cdot w_2 \cdot \alpha_2 \cdot f'_x(x_0, y_0) + h^2 \cdot w_2 \cdot \beta_{21} \cdot f'_y(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0).$$

Porovnáním s levou stranou, tj. se vztahem (2.26), dostaneme soustavu tří rovnic pro čtyři neznámé:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ w_2 \cdot \alpha_2 &= \frac{1}{2} \\ w_2 \cdot \beta_{21} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jednu z neznámých můžeme tedy zvolit libovolně. Nejpoužívanější je případ volby $\alpha_2 = \frac{1}{2}$,

odkud dostaneme $w_2 = 1, w_1 = 0, \beta_{21} = \frac{1}{2}$.

Máme tedy

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2} \cdot h, y_0 + \frac{1}{2} \cdot k_1\right) \\ k &= 0 \cdot k_1 + 1 \cdot k_2 = k_2. \end{aligned}$$

Runge-Kuttova metoda řádu $M = 2$ umožňuje určit přibližnou hodnotu řešení v bodě $x_0 + h$ podle vztahu

$$\bar{y}(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2} \cdot h, y_0 + \frac{1}{2} \cdot k_1\right), \text{ kde } k_1 = h \cdot f(x_0, y_0).$$

Označíme-li $x_1 = x_0 + h, \bar{y}_1 = \bar{y}(x_1)$ a dosadíme-li do předchozího vztahu za x_0 hodnotu x_1 a za y_0 hodnotu $\bar{y}_1$, dostaneme

$$\bar{y}(x_1 + h) = \bar{y}(x_1) + h \cdot f\left(x_1 + \frac{1}{2} \cdot h, \bar{y}_1 + \frac{1}{2} \cdot k_1\right), \text{ kde } k_1 = h \cdot f(x_1, \bar{y}_1).$$

Obecně

$$\bar{y}(x_{n+1}) = \bar{y}(x_n) + h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2} \cdot h, \bar{y}_n + \frac{1}{2} \cdot k_{1n}\right), \quad k_{1n} = h \cdot f(x_n, \bar{y}_n) \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $x_{n+1} = x_n + h$ ($h > 0$), $\bar{y}_n = \bar{y}(x_n)$ a $\bar{y}_0 = y_0 = y(x_0)$.

V praxi nejužívanější je Runge-Kuttova metoda řádu $M = 4$, pro kterou lze analogicky odvodit vzorce

$$\bar{y}(x_{n+1}) = \bar{y}(x_n) + \frac{1}{6} \cdot (k_{1n} + 2k_{2n} + 2k_{3n} + k_{4n}),$$

přičemž

$$\begin{aligned} k_{1n} &= h \cdot f(x_n, \bar{y}_n) \\ k_{2n} &= h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, \bar{y}_n + \frac{k_{1n}}{2}\right) \\ k_{3n} &= h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, \bar{y}_n + \frac{k_{2n}}{2}\right) \\ k_{4n} &= h \cdot f(x_n + h, \bar{y}_n + k_{3n}), \end{aligned}$$

kde $x_{n+1} = x_n + h$ ($h > 0$), $\bar{y}_n = \bar{y}(x_n)$ a $\bar{y}_0 = y_0 = y(x_0)$.

Při vhodných předpokladech o funkci $f(x, y)$ lze ukázat, že pro odhady chyb zde platí

$$|y(x_1) - \bar{y}(x_1)| \leq K \cdot h^5$$

$$|y(x_n) - \bar{y}(x_n)| \leq K \cdot h^4, \quad n = 2, 3, \dots; \quad x_n = x_{n-1} + h,$$

kde $K > 0$ je vhodná konstanta. Přesnost této metody je tedy o několik řádů vyšší než u metody Eulerovy.

2.10.6. Příklad. Runge-Kuttovou metodou 4. řádu nalezněte přibližné řešení Cauchyho úlohy

$$y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1 \quad \text{na intervalu } \langle 0; 0,5 \rangle \text{ s krokem } h = 0,1.$$

Řešení. K určení přibližných hodnot řešení použijeme výše uvedených vztahů, kde

$$f(x, y) = y - \frac{2x}{y}, \quad x_0 = 0, \quad \bar{y}_0 = y_0 = 1.$$

Je tedy

$$k_{10} = h \cdot f(x_0, \bar{y}_0) = 0,1 \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1} \right) = 0,1$$

$$k_{20} = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \bar{y}_0 + \frac{k_{10}}{2}\right) = 0,1 \left(1,05 - \frac{2 \cdot 0,05}{1,05} \right) \approx 0,09548$$

$$k_{30} = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \bar{y}_0 + \frac{k_{20}}{2}\right) = 0,1 \left(1,04774 - \frac{2 \cdot 0,05}{1,04774} \right) \approx 0,09523$$

$$k_{40} = h \cdot f(x_0 + h, \bar{y}_0 + k_{30}) = 0,1 \left(1,09523 - \frac{2 \cdot 0,1}{1,09523} \right) \approx 0,09126$$

$$\bar{y}(x_1) = \bar{y}(x_0) + \frac{1}{6} \cdot (k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}) \approx 1,0954$$

$$k_{11} = h \cdot f(x_1, \bar{y}_1) = 0,1 \left(1,0954 - \frac{2 \cdot 0,1}{1,0954} \right) \approx 0,09128$$

⋮

$$\bar{y}(x_2) = \bar{y}(x_1) + \frac{1}{6} \cdot (k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) \approx 1,1832$$

$$k_{12} = h \cdot f(x_2, \bar{y}_2) = 0,1 \left(1,1832 - \frac{2 \cdot 0,2}{1,1832} \right) \approx 0,08451$$

⋮

$$\bar{y}(x_3) = \bar{y}(x_2) + \frac{1}{6} \cdot (k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \approx 1,2649$$

$$k_{13} = h \cdot f(x_3, \bar{y}_3) = 0,1 \left(1,2649 - \frac{2 \cdot 0,3}{1,2649} \right) \approx 0,07905$$

⋮

$$\bar{y}(x_4) = \bar{y}(x_3) + \frac{1}{6} \cdot (k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43}) \approx 1,3416$$

$$k_{14} = h \cdot f(x_4, \bar{y}_4) = 0,1 \left(1,3416 - \frac{2,0,4}{1,3416} \right) \approx 0,07453$$

$$\vdots$$

$$\bar{y}(x_5) = \bar{y}(x_4) + \frac{1}{6} \cdot (k_{14} + 2k_{24} + 2k_{34} + k_{44}) \approx 1,4142.$$

Výsledky pro přehlednost opět zapíšeme do tabulky:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\bar{y}$	1	1,0954	1,1832	1,2649	1,3416	1,4142

Porovnání s výsledky získanými pro stejnou úlohu v příkladu 2.10.4 názorně dokumentuje rozdíl v přesnosti použitých metod. Runge-Kuttovy metody lze snadno implementovat na počítači a patří proto ke standardním algoritmům pro praktické řešení diferenciálních rovnic.

Příklady k procvičení.

P2.7. Řešte diferenciální rovnici:

a) $y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0$, **b)** $y + (1 - y + y') \cdot y' = 0$, **c)** $(x + y - 2)^2 \cdot y' = 4$,

d) $y' = \frac{\cos x \cdot \sin y + \operatorname{tg}^2 x}{\sin x \cdot \cos y}$, **e)** $y = x \cdot (1 + y') + (y')^2$,

f) $\left(y - \frac{\sin^2 y}{x^2} \right) dx + \left(x + \frac{\sin 2y}{x} + 1 \right) dy = 0$,

g) $y' = 2 \cdot \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2$, **h)** $(2 + x^2 y) \cdot xy' + (1 + x^2 y) \cdot y = 0$.

P2.8. Řešte Cauchyho úlohu:

a) $4y' + 2 \arctg(y') - x = 0$ pro $y(0) = -2$, **b)** $2(1 + e^x)yy' - e^x = 0$ pro $y(0) = 0$,

c) $(1 + x^2)y' + 4xy - 3 = 0$ pro $y(0) = 1$, **d)** $y = xy' - 3(y')^3$ pro $y(0) = 3$,

e) $(2x^2 + xy)y' = xy + y^2$ pro $y(1) = 1$.

P2.9. Najděte rovnici křivky, jejíž tečna v libovolném bodě protíná osu y v bodě, který je stejně vzdálen od bodu dotyku a od počátku souřadného systému.

P2.10. Nalezněte rovnici křivky jdoucí bodem $[2;3]$ a mající tu vlastnost, že úsek libovolné její tečny, vyřtáý souřadnými osami, je půlen bodem dotyku (viz P1.4.).

P2.11. Určete rovnici křivky procházející bodem $[1;1]$, jejíž každá tečna protíná osu y v bodě, jehož vzdálenost od počátku je rovna vzdálenosti bodu dotyku od osy y .

P2.12. Kapka vody, která má počáteční hmotnost M_0 , padá volným pádem (gravitační zrychlení g). Její hmotnost se přitom odpařováním rovnoměrně zmenšuje s časem (konstanta úměrnosti c). Stanovte závislost rychlosti pohybu kapky na čase, je-li odpor prostředí přímo úměrný rychlosti pádu kapky (konstanta úměrnosti $k \neq 2c$).

Výsledky:

$$\text{P2.7. a) } y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+C}, \quad y=0; \text{ b) } x = \ln \frac{(t-1)^2}{|t|} + \frac{2}{t-1} + C, \quad y = \frac{t(t+1)}{t-1}; \quad y=0$$

$$\text{c) } y - 2 \arctg \frac{x+y-2}{2} = C; \text{ d) } \tg x - \frac{\sin y}{\sin x} = C; \text{ e) } x = C \cdot e^{-t} + 2(1-t), \quad y = C \cdot (1+t)e^{-t} + 2 - t^2;$$

$$\text{f) } y(x+1) + \frac{\sin^2 y}{x} = C; \text{ g) } \ln|y+2| + 2 \arctg \frac{y+2}{x-3} = C, \quad y=-2; \text{ h) } x^3 y^3 + 3xy^2 = C.$$

$$\text{P2.8. a) } x = 4t + 2 \arctgt, \quad y = 2t^2 + \ln(t^2 + 1) - 2; \quad \text{b) } y^2 = \ln \frac{e^x + 1}{2}; \quad \text{c) } y = \frac{x^3 + 3x + 1}{(x^2 + 1)^2};$$

$$\text{d) } y = 3 - x; \quad \text{e) } y^2 = x \cdot e^{\frac{x-y}{x}}.$$

$$\text{P.2.9. } x^2 + y^2 = Cx; \quad \text{P2.10. } xy = 6; \quad \text{P2.11. } y = x - x \ln|x|.$$

$$\text{P2.12. } v = \frac{g}{2c-k} (M_0 - ct) \cdot \left[\left(1 - \frac{c}{M_0} \right)^{\frac{k}{c}-2} - 1 \right],$$

$$\text{výchozí pohybová rovnice } \frac{d(mv)}{dt} = mg - kv.$$

3. Diferenciální rovnice vyšších řádů

3.1. Základní pojmy

Budeme se nyní zabývat diferenciálními rovnicemi, v nichž hledaná funkce vystupuje ve druhé a vyšší derivaci. Úlohu s diferenciální rovnicí druhého řádu ukazuje příklad 1.1.2.

3.1.1. Tvary DR vyšších řádů. Diferenciální rovnici řádu n je možno zadat

a) v explicitním tvaru : $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$,

b) v implicitním tvaru : $F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

3.1.2. Definice. Řešením (integrálem) diferenciální rovnice (3.2) na intervalu J nazýváme každou funkci $y(x)$, která má na J spojitě derivace až do řádu n včetně a vyhovuje dané diferenciální rovnici. Křivka, která znázorňuje některé řešení diferenciální rovnice (3.2), se nazývá **integrální křivkou**.

Počáteční (Cauchyho) úlohou pro rovnici (3.2) nazýváme úlohu najít takové řešení $y(x)$ této rovnice, které splňuje počáteční podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \text{ kde } x_0, y_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Obecným řešením (integrálem) rovnice (3.2) nazýváme soustavu křivek o rovnicích $\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, z nichž postupným derivováním podle x a následným vyloučením nezávislých konstant $C_1, C_2, \dots, C_n$ dostaneme danou rovnici.

Partikulárním řešením (integrálem) rovnice (3.2) nazýváme řešení, které obdržíme z obecného řešení $\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ dosazením konkrétních hodnot za $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Regulárním řešením rovnice (3.2) nazýváme takové řešení, v jehož žádném bodě není porušena jednoznačnost.

Singulárním řešením rovnice (3.2) nazýváme takové řešení, v jehož každém bodě je porušena jednoznačnost řešení, tj. každým bodem singulárního řešení procházejí alespoň dvě integrální křivky.

3.1.3. Poznámky. a) Obecným řešením rovnice (3.2) je n parametrický systém křivek (parametry jsou konstanty $C_1, C_2, \dots, C_n$).

b) Partikulární řešení rovnice (3.2), které splňuje Cauchyho úlohu, je integrální křivka, která prochází bodem $[x_0, y_0]$.

c) Při řešení Cauchyho úlohy postupujeme tak, že nejprve určíme obecné řešení rovnice (3.2). Pak dosazením podmínek (3.3) do obecného řešení získáme soustavu n rovnic o n neznámých pro konstanty $C_1, C_2, \dots, C_n$, kterou vyřešíme. Nakonec dosadíme za $C_1, C_2, \dots, C_n$ do obecného řešení $\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$.

d) Funkci f ve výrazu (3.1) je třeba chápat jako funkci $n+1$ proměnných $f(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$, kde $z_1 = y, z_2 = y', \dots, z_n = y^{(n-1)}$. Obdobně lze interpretovat i funkci F ve (3.2).

3.1.4. Příklad. Necht' je dána diferenciální rovnice $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \neq 0$ je libovolná konstanta. Ověřte, že funkce $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ je obecným řešením této rovnice a dále určete partikulární řešení, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Řešení. Ze soustavy tvořené obecným řešením a jeho první a druhou derivací

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \\ y' &= -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x \\ y'' &= -\omega^2 C_1 \cos \omega x - \omega^2 C_2 \sin \omega x \end{aligned}$$

vyloučíme konstanty C_1, C_2 : vynásobíme první rovnici ω^2 a sečteme s třetí rovnicí, takže obdržíme zadanou DR.

Nyní určíme partikulární řešení dosazením počátečních podmínek do obecného řešení a jeho první derivace:

$$\left. \begin{aligned} y(0) = 1 &\Rightarrow 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ y'(0) = 0 &\Rightarrow 0 = -C_1 \omega \sin 0 + C_2 \omega \cos 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 0.$$

Dosazením do obecného řešení dostaneme $y = \cos \omega x$, což je hledané partikulární řešení.

3.1.5. Příklad. K danému dvouparametrickému systému křivek $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, kde $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, určete příslušnou diferenciální rovnici.

Řešení. Kromě zadaného výrazu potřebujeme k vyloučení dvou konstant další dvě rovnice, které dostaneme derivováním:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (a)$$

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} \quad (b)$$

$$y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} \quad (c)$$

Eliminaci konstant provedeme například takto:

$$(b) - (a): y' - y = C_2 e^{2x} \Rightarrow 2y' - 2y = 2C_2 e^{2x}$$

$$(c) - (b): y'' - y' = 2C_2 e^{2x}$$

Z rovnosti pravých stran posledních dvou rovnic plyne $y'' - y' = 2y' - 2y$ a odtud $y'' - 3y' + 2y = 0$, což je hledaná diferenciální rovnice.

3.1.6. Věta o existenci řešení. Je dána diferenciální rovnice tvaru $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Necht' funkce $f: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitou funkcí argumentů $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ v okolí bodu $A = [x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}]$, kde $x_0, y_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Pak v určitém okolí bodu x_0 existuje řešení této rovnice, které splňuje počáteční podmínky Cauchyho úlohy (3.3), tj.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

3.1.7. Věta o jednoznačnosti řešení. Je-li dána diferenciální rovnice ve tvaru (3.1) a funkce $f, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ jsou spojitě v okolí bodu $A = [x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}]$, pak v určitém okolí bodu A existuje právě jedno řešení rovnice (3.1), které splňuje počáteční podmínky (3.3).

3.1.8. Poznámky. a) Spojitost funkce f zaručuje existenci řešení, spjitost funkce f a jejích derivací $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ ve smyslu poznámky 3.1.3d zaručuje jeho jednoznačnost.

b) V bodech, v nichž je porušena spjitost některé z funkcí $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ a funkce f je spjitá, řešení existuje, ale není zde zaručena jednoznačnost řešení, tj. v těchto bodech může existovat singulární řešení.

c) Obě předchozí věty jsou analogií obdobných tvrzení 1.3.7 a 1.3.11 pro DR prvního řádu v první kapitole. Jejich důkazy lze provést příslušným zobecněním.

3.2. Speciální typy diferenciálních rovnic n -tého řádu

Diferenciální rovnici tvaru (3.1), resp. (3.2) je možno analytickým postupem vyřešit jen v některých případech. Z nich jmenujme rovnice lineární, kterými se v dalších kapitolách budeme zabývat podrobně, a pak několik dalších jednoduchých typů, které nyní uvedeme.

3.2.1. Rovnice tvaru $y^{(n)} = f(x)$. Tento nejjednodušší typ řešíme n -násobnou integrací, jak ukazuje následující úloha.

3.2.2. Příklad. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y''' = \sin x$.

Řešení. $y'' = \int \sin x \, dx = -\cos x + C_1$, $y' = \int (-\cos x + C_1) \, dx = -\sin x + C_1x + C_2$,

$$y = \int (-\sin x + C_1x + C_2) \, dx = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Obecným řešením je tedy funkce $y = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$, kde $C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}$.

3.2.3. Rovnice tvaru $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. V takovéto rovnici se nevyskytuje y , a proto ji lze řešit zavedením substituce $z = y'$, která sníží její řád o jedničku. V případě, že nejnižší derivace v rovnici má řád $k < n$, použije se substituce $z = y^{(k)}$, která rovněž odpovídajícím způsobem sníží řád.

3.2.4. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $y'' = 1 + (y')^2$.

Řešení. Položme $z = y'$, takže rovnice přejde na tvar $z' = 1 + z^2 \Rightarrow \frac{dz}{1+z^2} = dx$. Integrací

dostaneme $\arctg z = x + C_1 \Rightarrow z = \tg(x + C_1)$. Dosadíme do substitučního vztahu a obdržíme $y' = \tg(x + C_1)$ a odtud obecné řešení zadané rovnice:

$$y = \int \tg(x + C_1) \, dx = \int \frac{\sin(x + C_1)}{\cos(x + C_1)} \, dx = -\ln \cos(x + C_1) + C_2$$

3.2.5. Příklad. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0$.

Řešení. Substituce $z = y^{(4)}$ převádí rovnici na homogenní lineární diferenciální rovnici $z' - \frac{1}{x}z = 0$, která má obecné řešení $z = C_1 e^{\int \frac{1}{x} dx} = C_1 e^{\ln|x|} = C_1 x$. Je tedy $y^{(4)} = C_1 x$, odkud čtyřnásobnou integrací dostaneme

$$y = C_1 \frac{x^5}{120} + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5,$$

což lze zapsat jednodušeji ve tvaru:

$$y = K_1 x^5 + K_2 x^3 + K_3 x^2 + K_4 x + K_5.$$

3.2.6. Rovnice tvaru $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Jde o rovnici, v níže se nevyskytuje proměnná x . Položíme-li $y' = z(y)$, můžeme určit další derivace funkce y . Protože je ale $y = y(x)$, musíme derivovat jako v případě složené funkce, takže

$$y'' = z'(y) \cdot y' = z \cdot z', \quad y''' = z''(y) \cdot (y')^2 + z'(y) \cdot y'' = z'' \cdot z^2 + z \cdot (z')^2 \quad \text{atd.}$$

Dosazením do původní rovnice snížíme její řád.

3.2.7. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $yy'' - (y')^2 = 0$.

Řešení. Položme $y' = z(y) \Rightarrow y'' = z'z$. Zadání přejde na tvar

$$yz'z - z^2 = 0 \Rightarrow z(yz' - z) = 0,$$

odkud plynou jednoduché separovatelné rovnice

$$\text{a) } z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C,$$

$$\text{b) } yz' - z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z| = \ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow z = C_1 y.$$

$$\text{Je tedy } y' = C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|, \text{ tj. } y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Tato funkce je obecným řešením dané rovnice (řešení ad a) dostaneme volbou $C_1 = 0$).

Příklady k procvičení.

P3.1. Řešte diferenciální rovnici:

$$\text{a) } y''' = \sin x + \ln x; \quad \text{b) } (x^2 + 1) \cdot y^{(5)} = 2xy^{(4)}; \quad \text{c) } y \cdot y'' = (y')^2 - (y')^3.$$

P3.2. Řešte Cauchyho úlohu:

$$\text{a) } y'' - x^3 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{pro } y(0) = 0, y'(0) = 0;$$

$$\text{b) } y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x - \cos x = 0 \quad \text{pro } y(0) = 0, y'(0) = 0;$$

$$\text{c) } y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0 \quad \text{pro } y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

P3.3. Diferenciální rovnice $y'' = a \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$ popisuje průhyb lana upevněného v bodech A, B působením gravitačního pole Země (a je konstanta určená vlastnostmi lana - průřezem, materiálem apod.). Najděte její obecné řešení.

Výsledky:

P3.1. a) $y = \cos x + \frac{x^3}{6} \ln x - \frac{11}{36} x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$;

b) $y = C_1(x^6 + 15x^4) + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$; c) $y + C_1 \ln|y| = x + C_2$, $y = C$.

P3.2. a) $y = \frac{x^5}{20} + \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|$; b) $y = x \sin x + \cos x - 1$; c) $y^3 + 3y - 3x = 0$.

P3.3. $y = \frac{1}{a} \cosh(ax + C_1) + C_2$... řetězovka; konstanty C_1, C_2 lze určit ze zadaných souřadnic koncových bodů A, B.

3.3. Vlastnosti lineárních diferenciálních rovnic

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu jsme se zabývali v druhé kapitole. Nyní zobecníme naše úvahy na lineární diferenciální rovnice vyšších řádů. Přestože řešení těchto rovnic umíme nalézt jen v některých speciálních případech, především pro lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, je důležité studovat jejich strukturu a vlastnosti, neboť k nim vedou mnohé problémy mechaniky, fyziky a technických disciplín. Významnou skupinu aplikací ukážeme v závěrečné kapitole o harmonických kmitech.

3.3.1. Definice. Lineární diferenciální rovnicí (LDR) n -tého řádu nazýváme rovnici tvaru

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + A_1(x)y' + A_0(x)y = B(x), \quad (3.4)$$

kde funkce $A_i(x), B(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ jsou spojité na intervalu J a $A_n(x) \neq 0$.

Je-li $B(x) \equiv 0$, mluvíme o **zkrácené (homogenní) LDR**, je-li $B(x) \neq 0$, jde o **úplnou (nehomogenní) LDR**. Je-li $A_n(x) \equiv 1$, jedná se o **normovanou LDR**.

3.3.2. Poznámka. Dále budeme používat toto označení pro tzv. diferenciální operátor levé strany:

$$L^n(y) = A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + A_1(x)y' + A_0(x)y,$$

$$\tilde{L}^n(y) = y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + A_1(x)y' + A_0(x)y.$$

Rovnici (3.4) lze nyní zapsat ve tvaru $L^n(y) = B(x)$ a normovanou rovnici $\tilde{L}^n(y) = B(x)$.

Diferenciální operátory $L^n, \tilde{L}^n$ jsou **lineární**, neboť pro libovolné n -krát diferencovatelné funkce $u(x), v(x)$ a konstantu c platí

$$L^n(c \cdot u) = c \cdot L^n(u) \quad (\text{homogenita}),$$

$$L^n(u + v) = L^n(u) + L^n(v) \quad (\text{aditivita})$$

(analogicky pro operátor normované rovnice).

3.3.3. Věta. Jsou-li v rovnici $\tilde{L}^n(y) = B(x)$ všechny funkce $A_i(x), B(x)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak pro každý bod $x_0 \in (a, b)$ existuje právě jedno řešení $y = y(x)$, které splňuje počáteční podmínky (3.3).

Důkaz. Je důsledkem věty 3.1.7.

3.3.4. Poznámka. Upozorňujeme, že věta obecně neplatí pro lineární rovnici $L^n(y) = B(x)$, kde funkce $A_n(x) = 0$ pro některé $x_0 \in (a, b)$. Je-li ovšem $A_n(x) \neq 0$ v celém intervalu (a, b) , pak dělením celé rovnice výrazem $A_n(x)$ převedeme tento případ na předchozí větu.

3.3.5. Věta o snížení řádu LDR. Necht' je dána LDR $L^n(y) = B(x)$. Známe-li jedno nenulové řešení $y_1(x)$ zkrácené rovnice $L^n(y) = 0$, pak substitucí

$$y = y_1(x) \cdot \int v(x) dx,$$

kde $v(x)$ je spojitá funkce, přejde rovnice $L^n(y) = B(x)$ v LDR řádu $n-1$ pro novou neznámou funkci $v(x)$.

Důkaz. Provedeme pro jednoduchost pro $n = 2$, pro $n > 2$ je důkaz analogický.

Necht' $y_1(x)$ je nenulové řešení rovnice $L^2(y) = 0$. Položme $y = y_1 \cdot \int v(x) dx$. Odtud

$$y' = y_1' \cdot \int v dx + y_1 \cdot v, \quad y'' = y_1'' \cdot \int v dx + 2y_1' \cdot v + y_1 \cdot v'.$$

Získané výrazy pro y, y', y'' dosadíme do $L^2(y) = B(x)$:

$$A_2(x) \cdot (y_1'' \cdot \int v dx + 2y_1' \cdot v + y_1 \cdot v') + A_1(x) \cdot (y_1' \cdot \int v dx + y_1 \cdot v) + A_0(x) \cdot y_1 \cdot \int v dx = B(x).$$

Po úpravě dostáváme

$$[A_2(x) \cdot y_1'' + A_1(x) \cdot y_1' + A_0(x) \cdot y_1] \cdot \int v dx + A_2(x) \cdot y_1 \cdot v' + [2A_2(x) \cdot y_1' + A_1(x) \cdot y_1] \cdot v = B(x).$$

Protože je y_1 řešením dané rovnice, je výraz $A_2(x) \cdot y_1'' + A_1(x) \cdot y_1' + A_0(x) \cdot y_1$ roven nule a dostáváme rovnici

$$A_2(x) \cdot y_1 \cdot v' + [2A_2(x) \cdot y_1' + A_1(x) \cdot y_1] \cdot v = B(x),$$

což je LDR prvního řádu pro neznámou funkci $v(x)$.

Uvedený problém se zjednoduší pro normovanou zkrácenou LDR druhého řádu, kde můžeme přímo určit výsledné obecné řešení (viz věta 3.3.7).

3.3.6. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$, znáte-li jedno řešení $y_1 = x$ příslušné zkrácené rovnice.

Řešení. Podle předchozí věty položíme $y = x \cdot \int v dx \Rightarrow y' = \int v dx + x \cdot v, \quad y'' = 2v + x \cdot v'$

a dosadíme do dané rovnice:

$$x^2 \cdot (2v + x \cdot v') - x \cdot \left(\int v dx + x \cdot v \right) + x \cdot \int v dx = 8x^3.$$

Po roznásobení a úpravě dostaneme $x^3 v' + x^2 v = 8x^3$, neboli $v'x + v = 8x$, což je lineární

diferenciální rovnice 1.řádu. Její obecné řešení je $v = \frac{C_1}{x} + 4x$ a jeho dosazením do původního vztahu pro y dostaneme

$$y = x \int v(x) dx = x \int \left(\frac{C_1}{x} + 4x \right) dx = C_1 x \ln|x| + 2x^3 + C_2 x,$$

což je obecné řešení dané rovnice.

3.3.7. Věta. Je dána zkrácená LDR $y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0$ a necht' jedno její řešení je $y_1(x)$. Potom obecné řešení této rovnice má tvar $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, kde $y_2(x)$ určíme ze vztahu

$$y_2 = y_1 \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{u(x)} \right) dx, \text{ kde } u(x) = -\int A_1(x) dx.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z důkazu věty 3.3.5 pro $A_2(x) \equiv 1$ a $B(x) \equiv 0$.

3.3.8. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$, znáte-li jedno její řešení $y_1 = x$.

Řešení. Rovnici převedeme (pro $x \neq \pm 1$) na tvar $y'' + \frac{2x}{1-x^2} y' - \frac{2}{1-x^2} y = 0$. Podle předchozí věty určíme y_2 :

$$y_2 = x \int \left(\frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{2x}{1-x^2} dx} \right) dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\ln|1-x^2|} dx = x \int \frac{1}{x^2} |1-x^2| dx, \text{ tedy}$$

$$y_2 = \begin{cases} -(x^2 + 1) & \text{pro } |x| < 1 \\ x^2 + 1 & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}.$$

Obecné řešení lze tedy zapsat ve tvaru $y = C_1 x + C_2 (x^2 + 1)$.

Příklady k procvičení.

P3.4. Určete obecné řešení rovnice $y'' - \frac{1+x}{x} y' - 2 \frac{x-1}{x} y = 0$, znáte-li jedno její řešení $y_1 = e^{2x}$.

P3.5. Řešte Cauchyho úlohu $x(2-x)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y = 0$ pro $y(1) = 0$ a $y'(1) = 1$, je-li funkce $y = e^x$ řešením dané rovnice.

P3.6. Určete obecné řešení rovnice $(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2$, znáte-li jedno řešení $y_1 = x$ příslušné zkrácené rovnice.

Výsledky:

P3.4. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} (3x+1)$; P3.5. $y = x^2 - e^{x-1}$; P3.6. $y = C_1 x + C_2 e^x + x^2$.

3.4. Struktura řešení zkrácené lineární DR

3.4.1. Definice. Řekneme, že funkce

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \quad (3.5)$$

jsou na intervalu $\langle a, b \rangle$ **lineárně závislé**, jestliže existují konstanty $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbf{R}$ tak, že

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0, \quad (3.6)$$

přičemž alespoň jedno z čísel C_i je různé od nuly. Platí-li vztah (3.6) pouze pro $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$, pak jsou funkce (3.5) na intervalu $\langle a, b \rangle$ **lineárně nezávislé**.

3.4.2. Poznámka. Z lineární algebry je známo, že například množina všech funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$ tvoří lineární prostor. Také definice lineární závislosti a nezávislosti funkcí je obdobou definice lineární závislosti a nezávislosti vektorů.

3.4.3. Definice. Necht' funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ mají na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitě derivace až do řádu $n-1$ včetně. Potom determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

se nazývá **Wronského determinant (wronskián)** příslušný k funkcím $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

3.4.4. Liouvillova věta. Jsou-li funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ řešeními rovnice $L^n(y) = 0$, jejíž koeficienty $A_n(x), A_{n-1}(x), \dots, A_0(x)$ jsou funkce spojitě na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $A_n(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$, pak wronskián $W(x)$ těchto řešení splňuje pro libovolný pevně zvolený bod $x_0 \in \langle a, b \rangle$ vztah

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \frac{A_{n-1}(x)}{A_n(x)} dx}. \quad (3.8)$$

Důkaz. (Omezíme se na $n = 2$, pro $n > 2$ je důkaz analogický). Protože y_1, y_2 jsou řešením rovnice $L^2(y) = 0$, kde $A_2(x) \neq 0$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, platí vztahy:

$$\begin{aligned} A_2 y_1'' + A_1 y_1' + A_0 y_1 &= 0, \\ A_2 y_2'' + A_1 y_2' + A_0 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme funkcí y_2 , druhou funkcí y_1 a takto vzniklé rovnice od sebe odečteme:

$$A_2(y_1' y_2 - y_2' y_1) + A_1(y_1' y_2 - y_1 y_2') = 0. \quad (3.9)$$

Protože $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, platí dále $W'(x) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$. Rovnici (3.9) můžeme nyní zapsat ve tvaru $-A_2 W' - A_1 W = 0$ a odtud

$$\frac{W'}{W} = -\frac{A_1}{A_2}.$$

Integrací od x_0 do x obdržíme $\ln|W| = -\int_{x_0}^x \frac{A_1}{A_2} dx + \ln C$ a tedy

$$W(x) = C \cdot e^{-\int_{x_0}^x \frac{A_1}{A_2} dx}. \quad (3.10)$$

Pokud zde položíme $x = x_0$, dostaneme $W(x_0) = C$ a dosazením do (3.10) obdržíme dokazovaný vztah.

3.4.5. Poznámka. Exponenciální výraz ve vyjádření wronskiánu (3.8) je kladný (tedy různý od nuly) pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Z toho vyplývá, že $W(x)$ je na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ buď roven nule nebo různý od nuly. Důsledkem je následující věta.

3.4.6. Věta. Jsou-li funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ lineárně závislá řešení rovnice $\tilde{L}^n(y) = 0$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, ve kterém jsou koeficienty $A_{n-1}(x), \dots, A_0(x)$ spojité funkce, pak jejich wronskián $W(x) = 0$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$.

Důkaz. Necht' jsou funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ lineárně závislé, tedy rovnice (3.6)

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$$

je splněna pro alespoň jedno $C_i \neq 0$.

Derivujme tuto rovnici až do řádu $n-1$ včetně a dostaneme soustavu n homogenních lineárních rovnic

$$\begin{array}{cccccc} C_1 y_1 & + & C_2 y_2 & + & \dots & + & C_n y_n & = & 0 \\ C_1 y_1' & + & C_2 y_2' & + & \dots & + & C_n y_n' & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} & + & C_2 y_2^{(n-1)} & + & \dots & + & C_n y_n^{(n-1)} & = & 0 \end{array}$$

pro n neznámých $C_1, C_2, \dots, C_n$, kterou lze zapsat maticově

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Má-li mít tato soustava nenulové řešení (tj. alespoň jedno $C_i \neq 0$), musí být determinant matice této soustavy roven nule, tedy $W(x) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$.

3.4.7. Poznámky. a) Zřejmým důsledkem vět 3.1.7, 3.4.4 a 3.4.6 je následující tvrzení: Je-li $W(x_0) \neq 0$ v některém bodě $x_0 \in \langle a, b \rangle$, potom uvedené funkce jsou na tomto intervalu lineárně nezávislé.

b) Zkoumáme-li tedy lineární závislost nebo nezávislost funkcí $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, které jsou řešením normované rovnice $\tilde{L}^n(y) = 0$, stačí vyčíslit Wronského determinant v jediném bodě $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Je-li $W(x_0) = 0$, jsou tyto funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$ lineárně závislé, je-li $W(x_0) \neq 0$, jsou lineárně nezávislé. Tyto vlastnosti úzce souvisí se strukturou obecného řešení lineární DR, jak je patrné z následujícího tvrzení.

3.4.8. Věta. Necht' koeficienty $A_n(x), \dots, A_1(x), A_0(x)$ rovnice $L^n(y) = 0$ jsou funkce spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$. Jsou-li $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ řešení rovnice $L^n(y) = 0$ a $C_1, C_2, \dots, C_k$ jsou libovolné (i komplexní) konstanty, potom také funkce $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_k y_k(x)$ je řešením této rovnice.

Důkaz. Dosazením do rovnice $L^n(y) = 0$ obdržíme:

$$L^n(y) = L^n[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_k y_k(x)] = C_1 L^n(y_1) + C_2 L^n(y_2) + \dots + C_k L^n(y_k) = 0,$$

protože každá z funkcí je řešením rovnice a tedy $L^n(y_i) = 0$ pro $i = 1, \dots, k$.

3.4.9. Věta. Množina všech řešení LDR $L^n(y) = 0$ tvoří vektorový prostor, jehož dimenze je rovna řádu dané diferenciální rovnice n .

Důkaz. Snadno lze ukázat, že množina řešení je uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení konstantou, stejně jako potřebné vlastnosti uvedených operací. Dále lze dokázat, že množina všech řešení zkrácené LDR je izomorfní s n -rozměrným aritmetickým vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel, a tedy dimenze tohoto prostoru je rovna n . (Podrobněji viz např. [Br], str. 216).

3.4.10. Definice. Každou bázi prostoru všech řešení lineární diferenciální rovnice n -tého řádu $L^n(y) = 0$, tj. libovolnou n -tici lineárně nezávislých řešení této rovnice, nazýváme **fundamentálním systémem řešení** této rovnice.

3.4.11. Důsledek Věty 3.4.9. - Struktura obecného řešení LDR n -tého řádu. Věta vyjadřuje základní vlastnost báze vektorového prostoru, totiž to, že každý vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze. Tvoří-li funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fundamentální systém řešení rovnice $L^n(y) = 0$, potom obecné řešení této rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_n$ jsou libovolné konstanty.

3.4.12. Příklad. Dokažte, že funkce $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = e^x$ tvoří pro všechna $x \in \mathbf{R}$ fundamentální systém řešení rovnice $(x^2 - 2x + 2).y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$ a určete její obecné řešení.

Řešení. Ověřit, že se v každém případě jedná o řešení dané rovnice, můžeme nejrychleji dosazením. Například pro $y_2 = x^2$ je $y_2' = 2x, y_2'' = 2, y_2''' = 0$, takže po dosazení je ihned $-x^2 \cdot 2 + 2x \cdot 2x - 2x^2 = 0$. Podobně snadno se provede ověření pro zbývající dvě funkce.

Lineární nezávislost posoudíme výpočtem wroskiánu (věta 3.4.6):

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} = e^x \cdot \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) .$$

Tento determinant je různý od nuly pro všechna reálná x , neboť polynom v závorce nemá reálné kořeny. Zadané funkce tudíž tvoří fundamentální systém a obecné řešení rovnice bude podle 3.4.11 jejich lineární kombinací s libovolnými reálnými konstantami C_1, C_2, C_3 :

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 e^x .$$

Příklady k procvičení.

P3.7. Rozhodněte, zda uvedené funkce y_i tvoří na průniku definičních oborů koeficientů $A_j(x)$ fundamentální systém řešení dané rovnice:

a) $y_1 = x, y_2 = \sin x$;

$$y'' + \frac{x \sin x}{x \cos x - \sin x} y' + \frac{\sin x}{\sin x - x \cos x} y = 0 ;$$

b) $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{-x}$;

$$y''' - \frac{1}{x} y'' - y' + \frac{1}{x} y = 0 ;$$

c) $y_1 = x^2, y_2 = x^3, y_3 = e^{2x}$;

$$x^2(2x^2 - 4x + 3)y''' - 2x(2x^3 - 3x + 3)y'' + 2(8x^3 - 6x^2 + 3)y' - 12(2x^2 - 2x + 1)y = 0 ;$$

d) $y_1 = x^2, y_2 = 3x^2, y_3 = e^{-x}$;

$$(x^2 + 2x + 2)y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 .$$

Výsledky:

P3.7. a) ano , b) ano , c) ano, pro $x \neq 0$, d) ne, funkce y_1, y_2, y_3 jsou lineárně závislé.

3.5. Zkrácená LDR s konstantními koeficienty

3.5.1. Motivace. Řešíme-li konkrétní technické, ekonomické nebo jiné aplikace, které jsou popsány diferenciálními rovnicemi, velmi často zjistíme, že fyzikální nebo další parametry problému (hmotnost, hustota, frekvence, elektrický odpor aj.), které obvykle vystupují jako koeficienty DR, jsou konstantami. Takovéto úlohy tvoří základní skupinu i mezi LDR vyšších řádů, a budeme se jimi proto zabývat podrobně, v neposlední řadě i z toho důvodu, že jejich řešení lze úspěšně získat analytickými metodami.

Zaměříme se nejprve na zkrácené (homogenní) LDR n -tého řádu s konstantními koeficienty ve tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \text{ kde } a_i \in \mathbf{R}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Ukážeme nejprve zásadní skutečnost, že existují řešení této rovnice ve tvaru $y = e^{rx}$, kde r je zatím nespecifikovaná konstanta. Pro derivace snadno určíme vztahy

$$y' = re^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}, \dots, y^{(n)} = r^n e^{rx},$$

které dosadíme do rovnice (3.11). Po vydělení této rovnice výrazem e^{rx} dostaneme

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0, \quad (3.12)$$

což je algebraická rovnice n -tého stupně pro neznámou r . Získaný výsledek znamená, že funkce $y = e^{rx}$ bude řešením rovnice (3.11) právě tehdy, když r je řešením rovnice (3.12).

3.5.2. Definice. Algebraickou rovnici (3.12) nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice (3.11).

3.5.3. Poznámka. Charakteristická rovnice (3.12) je algebraická rovnice n -tého řádu s reálnými koeficienty, která může mít reálné i komplexní kořeny s různou násobností. V následující větě ukážeme, jak lze pomocí kořenů charakteristické rovnice najít fundamentální systém řešení (tedy i obecné řešení) LDR druhého řádu. Tento výsledek pak ve větě 3.5.8 zobecníme pro LDR n -tého řádu.

3.5.4. Věta. Necht' je dána LDR s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (3.13)$$

s charakteristickou rovnicí $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$.

a) Má-li příslušná charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny r_1, r_2 , potom fundamentální systém řešení rovnice (3.13) je $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \text{ kde } C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

b) Má-li příslušná charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen r , potom fundamentální systém řešení je e^{rx}, xe^{rx} a její obecné řešení je

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}, \text{ kde } C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

c) Má-li příslušná charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = a \pm ib$, potom fundamentální systém řešení je $e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx \text{ kde } C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Důkaz. Podle definice 3.4.10 je nutné dokázat, že uvedené funkce jsou lineárně nezávislémi řešeními rovnice (3.13).

a) Funkce $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$ jsou řešením rovnice (3.13), jak se snadno přesvědčíme dosazením.

Pro $y_1 = e^{r_1 x}$ je $y_1' = r_1 e^{r_1 x}, y_1'' = r_1^2 e^{r_1 x}$, a tedy

$$a_2 r_1^2 e^{r_1 x} + a_1 r_1 e^{r_1 x} + a_0 e^{r_1 x} = 0 \Rightarrow \underbrace{(a_2 r_1^2 + a_1 r_1 + a_0)}_0 e^{r_1 x} = 0, \text{ protože } r_1 \text{ je kořenem}$$

charakteristické rovnice. Analogicky lze totéž dokázat pro funkci $y_2 = e^{r_2 x}$.

Lineární nezávislost těchto funkcí ověříme pomocí Wronskiánu:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{r_1 x} r_2 e^{r_2 x} - e^{r_2 x} r_1 e^{r_1 x} = (r_2 - r_1) \cdot e^{(r_1 + r_2)x}$$

Podle předpokladu je $r_1 \neq r_2$, takže $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ a podle věty 3.4.6 jsou tyto funkce lineárně nezávislé, tedy tvoří fundamentální systém řešení.

b) Skutečnost, že funkce $y_1 = e^{rx}$ je řešením dané rovnice lze ověřit stejně jako v odstavci a). Ukažme, že funkce $y_2 = xe^{rx}$ je také řešením dané rovnice. Dosadíme tuto funkci a její první a druhou derivaci do rovnice (3.13):

$$a_2(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + a_1(e^{rx} + rxe^{rx}) + a_0xe^{rx} = 0$$

$$\underbrace{(a_2r^2 + a_1r + a_0)}_0 xe^{rx} + \underbrace{(2a_2r + a_1)}_0 e^{rx} = 0.$$

Výrazy v závorkách jsou rovny nule, protože r je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice,

tj. $r = r_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2}.$

Ukážeme ještě, že funkce $y_1 = e^{rx}, y_2 = xe^{rx}$ jsou lineárně nezávislé:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx} + xre^{rx} \end{vmatrix} = e^{rx}(e^{rx} + xre^{rx}) - xe^{rx}re^{rx} = e^{2rx} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

c) O tom, že funkce $y_1 = e^{r_1x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx}$ a $y_2 = e^{r_2x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}e^{-ibx}$ jsou řešením rovnice (3.13) se snadno přesvědčíme stejně jako v odstavci a). Použitím Eulerových vztahů dostaneme

$$y_1 = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx$$

$$y_2 = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) = e^{ax} \cos bx - ie^{ax} \sin bx.$$

Podle věty 3.4.8 jsou také funkce

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{ax} \cos bx \quad \text{a} \quad \tilde{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{ax} \sin bx \quad \text{řešením rovnice (3.13).}$$

Protože

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{ax} \cos bx & e^{ax} \sin bx \\ ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx & ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx \end{vmatrix} =$$

$$= e^{ax} \cos bx (ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx) - e^{ax} \sin bx (ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx) = be^{2ax} \neq 0,$$

jsou tyto funkce lineárně nezávislé (pro $b = 0$ se nejedná o komplexní kořeny).

3.5.5. Příklad. Určete fundamentální systém řešení a obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice je $r^2 - r - 2 = 0$, její kořeny jsou $r_1 = 2, r_2 = -1$.

Fundamentální systém řešení tvoří funkce e^{2x}, e^{-x} a obecné řešení je

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \text{ kde } C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

3.5.6. Příklad. Určete fundamentální systém řešení a obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice $r^2 - 4r + 4 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $r = 2$.

Fundamentální systém řešení tvoří funkce e^{2x}, xe^{2x} a obecné řešení je

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x}, \text{ kde } C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

3.5.7. Příklad. Určete fundamentální systém a obecné řešení rovnice $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice $r^2 - 6r + 13 = 0$ má kořeny $r_{1,2} = 3 \pm 2i$.

Fundamentální systém řešení tvoří funkce $e^{3x} \cos 2x$, $e^{3x} \sin 2x$ a obecné řešení je

$$y = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x, \text{ kde } C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Předchozí větu nyní zobecníme pro homogenní LDR řádu n .

3.5.8. Věta. Necht' je dána LDR $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

a) Má-li příslušná charakteristická rovnice n různých reálných kořenů $r_1, r_2, \dots, r_n$, potom fundamentální systém řešení této rovnice je

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}.$$

b) Má-li příslušná charakteristická rovnice k -násobný reálný kořen r , potom tomuto kořenu odpovídá k lineárně nezávislých řešení této rovnice

$$y_1 = e^{rx}, y_2 = x e^{rx}, \dots, y_k = x^{k-1} e^{rx}.$$

c) Má-li příslušná charakteristická rovnice k -násobný komplexní kořen $r = a + ib$ (tedy i komplexně sdružený kořen $\bar{r} = a - ib$ stejné násobnosti), potom této dvojici kořenů odpovídá $2k$ lineárně nezávislých řešení

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, y_2 = x e^{ax} \cos bx, \dots, y_k = x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ y_{k+1} = e^{ax} \sin bx, y_{k+2} = x e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx.$$

3.5.9. Poznámky. **a)** Důkaz této věty se provede analogicky jako u věty 3.5.4.

b) Příslušná charakteristická rovnice je algebraická rovnice stupně n s reálnými koeficienty, která má v oboru komplexních čísel právě n kořenů (počítaných s jejich násobností) a jsme tedy schopni určit fundamentální systém řešení (tj. n lineárně nezávislých řešení dané rovnice $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$). Podle důsledku 3.4.11 je možno obecné řešení psát ve tvaru

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

3.5.10. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice je $r^4 + 3r^3 + 3r^2 + r = 0$. Najdeme její kořeny

$$r(r^3 + 3r^2 + 3r + 1) = 0 \Rightarrow r(r+1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_{2,3,4} = -1.$$

Kořenu $r_1 = 0$ odpovídá řešení $y_1 = e^{0x} = 1$, trojnásobnému kořenu $r_{2,3,4} = -1$ odpovídají tři řešení $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = x e^{-x}$, $y_4 = x^2 e^{-x}$.

Fundamentální systém řešení tvoří funkce $1, e^{-x}, x e^{-x}, x^2 e^{-x}$ a obecné řešení je

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 x^2 e^{-x}, \text{ kde } C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbf{R}.$$

3.5.11. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice je $r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0$, což je kladně reciproká rovnice 5. stupně, a proto je jeden kořen $r_1 = -1$. Hornerovým schématem snížíme stupeň této rovnice :

	1	1	2	2	1	1
-1	1	0	2	0	1	0

Zbývající kořeny jsou tedy řešeními rovnice

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \Rightarrow (r^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow r_{2,3} = i, r_{4,5} = -i.$$

Reálnému kořenu $r_1 = -1$ odpovídá řešení $y_1 = e^{-x}$,

dvojnásobným komplexně sdruženým kořenům $r_{2,3} = i$ a $r_{4,5} = -i$ odpovídají řešení

$$y_2 = e^{0x} \cos x, y_3 = x e^{0x} \cos x, y_4 = e^{0x} \sin x, y_5 = x e^{0x} \sin x.$$

Fundamentální systém tvoří funkce $e^{-x}, \cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x$ a obecné řešení je

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 x \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \sin x, \text{ kde } C_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, 5.$$

Příklady k procvičení.

P3.8. Určete obecné řešení rovnice:

a) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y''' - 6y'' + y' - 3y = 0,$

b) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' + 8y'' - 19y' + 10y = 0,$

c) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 8y^{(5)} + 16y^{(4)} + 19y''' + 17y'' + 12y' + 4y = 0,$

d) $y^{(6)} - 64y = 0,$

e) $4y^{(5)} - 16y^{(4)} + 29y''' - 29y'' + 16y' - 4y = 0.$

P3.9. Určete integrální křivku diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, která prochází bodem

$$M = [\pi, -1] \text{ a dotýká se v tomto bodě přímky } y = x - \pi - 1.$$

Výsledky:

P3.8. a) $y = C_1 e^{3x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x,$

b) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x) e^x + C_5 e^{-2x},$

c) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x + C_6 \cos 2x + C_7 \sin 2x,$

d) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x) e^x + (C_5 \cos \sqrt{3}x + C_6 \sin \sqrt{3}x) e^{-x},$

e) $y = C_1 e^x + \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{7}x}{4} + C_3 x \cos \frac{\sqrt{7}x}{4} \right) e^{\frac{3x}{4}} + \left(C_4 \sin \frac{\sqrt{7}x}{4} + C_5 x \sin \frac{\sqrt{7}x}{4} \right) e^{\frac{3x}{4}},$

P3.9. $y = \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x.$

3.6. Řešení úplné LDR metodou variace konstant

3.6.1. Úvodní poznámka. Metodu variace konstanty pro řešení LDR prvního řádu (kap. 2.3) můžeme použít i pro lineární rovnice n -tého řádu (obecně i s nekonstantními koeficienty), známe-li obecné řešení přiřazené zkrácené LDR. Rozdíl spočívá v tom, že obecné řešení LDR n -tého řádu obsahuje n konstant, k jejichž určení je třeba n podmínek. Jedna podmínka je dána samotnou rovnicí $L^n(y) = B(x)$, zbývajících $n-1$ volíme v průběhu výpočtu. Způsob volby ukážeme na příkladu pro $n = 2$ a výsledek potom zobecníme.

3.6.2. Příklad.

Určete obecné řešení rovnice

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0y = B(x), \quad (3.14)$$

znáte-li obecné řešení zkrácené LDR $\hat{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, kde $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Řešení. Předpokládáme, že obecné řešení úplné rovnice (3.14) je tvaru

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (3.15)$$

takže

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x). \quad (3.16)$$

Volba dvojice nových funkcí $C_1(x), C_2(x)$ umožňuje stanovit vhodnou doplňující podmínku. Nejvýhodnější (pro snadné řešení soustavy, kterou obdržíme) je požadavek

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (3.17)$$

Tuto podmínku dosadíme do (3.16), takže

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x). \quad (3.18)$$

Nyní opět derivujeme a získáme výraz

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x). \quad (3.19)$$

Vztahy (3.15), (3.18) a (3.19) dosadíme do (3.14) a po snadné úpravě obdržíme

$$C_1(A_2y_1'' + A_1y_1' + A_0y_1) + C_2(A_2y_2'' + A_1y_2' + A_0y_2) + A_2(C_1'y_1' + C_2'y_2') = B.$$

Výrazy v prvních dvou závorkách jsou rovny nule, neboť y_1, y_2 jsou podle předpokladu řešeními příslušné zkrácené rovnice. Dostáváme tedy $A_2(C_1'y_1' + C_2'y_2') = B$ a odtud

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = \frac{B}{A_2}. \quad (3.20)$$

Současně s podmínkou (3.17) tak dostáváme pro derivace neznámých funkcí $C_1(x), C_2(x)$ soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) &= 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) &= \frac{B(x)}{A_2(x)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Její determinant je wronskiánem funkcí y_1, y_2 , který je různý od nuly, neboť řešení y_1, y_2 jsou podle předpokladu lineárně nezávislá (tvoří fundamentální systém řešení příslušné zkrácené rovnice). Soustava (3.21) má tedy vždy jediné řešení, které určíme Cramerovým pravidlem:

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}.$$

Determinant $W_1(x)$ (resp. $W_2(x)$) získáme tak, že první (resp. druhý) sloupec wronskiánu $W(x)$ nahradíme sloupcem pravých stran soustavy (3.21).

Integrací předchozích vztahů dostaneme

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + K_1, \quad C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx + K_2, \quad \text{kde } K_1, K_2 \in \mathbf{R}.$$

Dosadíme-li odtud do předpokládaného řešení (3.15), dostaneme obecné řešení zadané rovnice (3.14):

$$y = \left(\int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + K_1 \right) \cdot y_1(x) + \left(\int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx + K_2 \right) \cdot y_2(x). \quad (3.22)$$

3.6.3. Věta (variace konstant pro LDR n -tého řádu). Obecné řešení rovnice

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + A_1(x)y' + A_0(x)y = B(x) \quad (3.23)$$

se spojitými koeficienty $A_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, lze vyjádřit ve tvaru

$$y = \hat{y} + \sum_{i=1}^n y_i(x) \cdot \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx, \quad (3.24)$$

kde $\hat{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ je obecné řešení příslušné zkrácené rovnice, $W(x)$ wronskián jejího fundamentálního systému a $W_i(x)$ jsou determinanty, vytvořené z wronskiánu $W(x)$ nahrazením i -tého sloupce vektorem $(0, 0, \dots, B/A_n)$.

Důkaz. Postup z předchozího příkladu zobecníme pro rovnici n -tého řádu (3.23), pro niž předpokládáme řešení ve tvaru

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x). \quad (3.25)$$

Pro hledané funkce $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ sestavíme na stejném principu jako ve výše uvedené úloze soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n &= 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} &= \frac{B(x)}{A_n(x)}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

jejímž determinantem je wronskián $W(x)$ lineárně nezávislých funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n$, který je tedy různý od nuly. Jedná se o soustavu lineárních rovnic pro neznámé $C_1', \dots, C_n'$ s regulární maticí, která má právě jedno řešení.

Užitím Cramerova pravidla dostaneme

$$C_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.27)$$

kde $W(x)$ je determinant soustavy (3.26) a $W_i(x)$ získáme tak, že v tomto determinantu nahradíme i -tý sloupec sloupcem pravých stran soustavy.

Integrací vztahů (3.27) dostáváme

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} + K_i, \quad (3.28)$$

takže dosazením těchto výrazů do (3.25) obdržíme obecné řešení úplné LDR (3.23) ve tvaru

$$y = \left(\int \frac{W_1(x)}{W(x)} + K_1 \right) \cdot y_1(x) + \left(\int \frac{W_2(x)}{W(x)} + K_2 \right) \cdot y_2(x) + \dots + \left(\int \frac{W_n(x)}{W(x)} + K_n \right) \cdot y_n(x)$$

neboli

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \dots + K_n y_n + y_1 \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + y_2 \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx + \dots + y_n \int \frac{W_n(x)}{W(x)} dx, \quad (3.29)$$

což lze zkráceně zapsat vztahem (3.24), jak jsme měli dokázat.

3.6.4. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $y''' + y' = \cos^2 x$.

Řešení. Řešíme nejprve příslušnou zkrácenou rovnici $y''' + y' = 0$; charakteristická rovnice $r^3 + r = 0$ má kořeny $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm i$, takže obecné řešení zkrácené rovnice je

$$\hat{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Ve shodě s důkazem předchozí věty předpokládáme řešení úplné rovnice ve tvaru

$$y = C_1(x) + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x. \quad (3.30)$$

Pro určení neznámých funkcí $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ vypočteme příslušné determinaty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1, \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \cos^2 x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \cos^2 x,$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \cos^2 x & -\sin x \end{vmatrix} = -\cos^3 x, \quad W_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \cos^2 x \end{vmatrix} = -\sin x \cos^2 x.$$

Dále bude

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = \cos^2 x \Rightarrow C_1(x) = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + K_1,$$

$$C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = -\cos^3 x \Rightarrow C_2(x) = -\int \cos^3 x dx = -\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + K_2,$$

$$C_3'(x) = \frac{W_3(x)}{W(x)} = -\sin x \cos^2 x \Rightarrow C_3(x) = -\int \sin x \cos^2 x dx = \frac{\cos^3 x}{3} + K_3.$$

Za $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ dosadíme do (3.30) a dostaneme obecné řešení zadané rovnice

$$y = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + K_1 \right) + \left(\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + K_2 \right) \cos x + \left(\frac{\cos^3 x}{3} + K_3 \right) \sin x,$$

které můžeme po úpravě uvést ve tvaru

$$y = K_1 + K_2 \cos x + K_3 \sin x + \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \sin x \cdot \cos x.$$

3.6.5. Poznámka. Výsledek uvedeného příkladu nabízí domněnku, že obecné řešení úplné rovnice je součtem obecného řešení zkrácené rovnice a dalších výrazů, které samy o sobě vyhovují rovnici. Nazýváme je **partikulárními integrály** rovnice (podle okolností jich může

být více a jejich součet je rovněž partikulární integrál) a v tomto smyslu dokážeme následující větu a dále její jisté zobecnění (princip superpozice).

Zde se nabízí připomenout analogickou situaci z lineární algebry, kde obecné řešení soustavy algebraických lineárních rovnic lze také zapsat ve tvaru součtu obecného řešení příslušné homogenní soustavy a libovolného řešení dané soustavy.

3.6.6. Věta. Obecné řešení rovnice $L^n(y) = B(x)$ lze zapsat ve tvaru $y = \hat{y} + y_p$, kde $\hat{y}$ je obecné řešení příslušné zkrácené rovnice $L^n(y) = 0$ a y_p je libovolný partikulární integrál úplné rovnice $L^n(y) = B(x)$.

Důkaz. Protože diferenciální operátor $L^n(y)$ je lineární, platí:

$$L^n(y) = L^n(\hat{y} + y_p) = L^n(\hat{y}) + L^n(y_p) = 0 + B(x),$$

což je tvrzení věty.

3.6.7. Věta (princip superpozice partikulárních integrálů). Lze-li v rovnici $L^n(y) = B(x)$ funkci $B(x)$ rozložit na součet tvaru

$$B(x) = B_1(x) + B_2(x) + \dots + B_m(x), \quad m \geq 2,$$

přičemž rovnice $L^n(y) = B_i(x)$ mají partikulární integrály y_{pi} , $i = 1, 2, \dots, m$, potom původní rovnice $L^n(y) = B(x)$ má partikulární integrál $y_p = y_{p1} + y_{p2} + \dots + y_{pm}$.

Důkaz. Zřejmě platí $L^n(y_{p1}) = B_1(x)$, $L^n(y_{p2}) = B_2(x)$, $\dots$, $L^n(y_{pm}) = B_m(x)$,

tudíž po sečtení těchto rovnic bude

$$L^n(y_{p1} + y_{p2} + \dots + y_{pm}) = B_1(x) + B_2(x) + \dots + B_m(x),$$

tj. $L^n(y_p) = B(x)$.

3.6.8. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $y'' - 4y = 5e^{3x} + 4x$. Dále najděte řešení Cauchyho úlohy pro počátešní podmínky $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$.

Řešení. Charakteristická rovnice $r^2 - 4 = 0$ má kořeny 2, -2, takže fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$ a obecné řešení zkrácené rovnice bude

$$\hat{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Pravá strana je součtem dvou funkcí $B_1 = 5e^{3x}$, $B_2 = 4x$ a my můžeme podle předchozí věty provést variaci konstant pro každou z nich zvlášť a najít jednotlivé partikulární integrály. Nejprve vyjádříme potřebné determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4,$$

$$W_{11}(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ B_1 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 5e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -5e^x, \quad W_{12}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 5e^{3x} \end{vmatrix} = 5e^{5x},$$

$$W_{21}(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ B_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 4x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4xe^{-2x}, \quad W_{22}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 4x \end{vmatrix} = 4xe^{2x}.$$

Nyní vyjádříme jednotlivé partikulární integrály podle (3.29):

$$y_{p1} = y_1 \cdot \int \frac{W_{11}(x)}{W(x)} dx + y_2 \cdot \int \frac{W_{12}(x)}{W(x)} dx = \frac{5}{4} e^{2x} \cdot \int e^x dx - \frac{5}{4} e^{-2x} \cdot \int e^{5x} dx = e^{3x},$$

$$y_{p2} = y_1 \cdot \int \frac{W_{21}(x)}{W(x)} dx + y_2 \cdot \int \frac{W_{22}(x)}{W(x)} dx = e^{2x} \cdot \int x \cdot e^{-2x} dx - e^{-2x} \cdot \int x \cdot e^{2x} dx = -x.$$

Obecné řešení úplné rovnice zapíšeme ve tvaru $y = \hat{y} + y_{p1} + y_{p2}$, tedy

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + e^{3x} - x.$$

Cauchyho úlohu vyřešíme dosazením zadaných podmínek do obecného řešení a jeho derivace

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} + 3e^{3x} - 1.$$

Obdržíme tak pro hledané konstanty soustavu

$$\begin{aligned} 3 &= C_1 + C_2 + 1 \\ 6 &= 2C_1 - 2C_2 + 3 - 1 \end{aligned}$$

s řešením $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Po dosazení těchto hodnot do obecného řešení získáme tento výsledek:

$$y_C = 2e^{2x} + e^{3x} - x.$$

Příklady k procvičení.

P3.10. Určete obecné řešení rovnice:

$$\text{a) } y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{2x} + 1}; \quad \text{b) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}; \quad \text{c) } y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

P3.11. Najděte partikulární řešení rovnice, odpovídající daným počátečním podmínkám:

$$\text{a) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, y(1) = 0, y'(1) = 0; \quad \text{b) } y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Výsledky:

$$\text{P3.10. a) } y = (C_1 + \operatorname{arctg} e^x) \cdot e^{-x} + \left(C_2 - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) \right) \cdot e^{-2x};$$

$$\text{b) } y = \left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} \right) \cdot e^x;$$

$$\text{c) } y = \left(C_1 + \frac{x}{2} \right) \cdot e^x + \left(C_2 + \frac{x}{3} \right) \cdot e^{2x} + C_3 e^{-x} + \frac{1}{6} (e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x}) \cdot \ln(e^x + 1) + \frac{1}{3}.$$

$$\text{P3.11. a) } y = (1 - x + x \ln|x|) \cdot e^x; \quad \text{b) } y = \frac{\sin^2 x}{2 \cos x}.$$

3.7. LDR se speciální pravou stranou

3.7.1. Motivace. Pozorný čtenář si jistě všiml, že ve fundamentálním systému kterékoli lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty se mohou vyskytnout pouze polynomy, přirozené exponenciální funkce nebo funkce goniometrické, popřípadě jejich součiny. To plyne z věty 3.5.8 a demonstrují to také příklady 3.5.10, 11. Rovněž lze snadno ukázat, že i derivace jmenovaných funkcí budou téhož typu. Je-li také pravá strana $B(x)$ v diferenciální rovnici polynom, exponenciální či goniometrická funkce (resp. jejich součin), lze partikulární integrál úplné rovnice nalézt jednodušší metodou než je variace konstant.

V principu lze postupovat tak, že partikulární integrál zvolíme předem, a to téhož typu, jako je pravá strana rovnice, ale s obecnými koeficienty, které následně určíme dosazením partikulárního integrálu do původní rovnice a porovnáním obou jejích stran. Než tuto úvahu formálně zobecníme, ukažme vlastní realizaci na několika úlohách.

3.7.2. Příklad. Nalezněte obecné řešení těchto diferenciálních rovnic:

- a) $y'' + 3y' + 2y = e^x$,
- b) $y''' + y' = 24 \sin 3x$,
- c) $y'' - 4y = 5e^{3x} + 4x$.

Řešení. a) Určíme nejprve obecné řešení zkrácené rovnice prostřednictvím příslušné charakteristické rovnice:

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -2, r_2 = -1 \Rightarrow \hat{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Na pravé straně rovnice je funkce e^x , proto předpokládáme, že hledaný partikulární integrál bude tvaru

$$y_p = Ae^x,$$

kde A je reálná konstanta. Odtud $y_p' = Ae^x, y_p'' = Ae^x$ a za y_p, y_p', y_p'' dosadíme do dané rovnice, čímž máme možnost vypočítat koeficient A :

$$Ae^x + 3Ae^x + 2Ae^x = e^x \Rightarrow 6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}.$$

Partikulárním řešením je tedy funkce $y_p = \frac{1}{6}e^x$ a obecné řešení zapíšeme ve tvaru

$$y = \hat{y} + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{6}e^x.$$

b) Obecné řešení zkrácené rovnice pro LDR $y''' + y' = 24 \sin 3x$ jsme již našli v příkladu 3.6.4 ve tvaru

$$\hat{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Pravou stranu zadané rovnice představuje goniometrická funkce, zvolíme proto partikulární integrál ve tvaru

$$y_p = b_1 \cos 3x + b_2 \sin 3x,$$

kde koeficienty b_1, b_2 je nutno určit. Obě goniometrické funkce musíme uvažovat z toho důvodu, že při derivování (resp. integrování) přechází jedna v druhou a naopak.

Po výpočtu potřebných derivací dosadíme předpokládané partikulární řešení do úplné rovnice:

$$\underbrace{27b_1 \sin 3x - 27b_2 \cos 3x}_{y_p'''} - \underbrace{3b_1 \sin 3x + 3b_2 \cos 3x}_{y_p'} = 24 \sin 3x.$$

Nyní porovnáme koeficienty u funkcí $\sin 3x$, $\cos 3x$ na obou stranách této rovnice, čímž získáme - v tomto případě velmi jednoduchou - soustavu rovnic pro b_1, b_2 :

$$\begin{array}{lcl} \sin 3x : & 27b_1 - 3b_1 = 24 & \Rightarrow b_1 = 1, \\ \cos 3x : & -27b_2 + 3b_2 = 0 & \Rightarrow b_2 = 0. \end{array}$$

Výsledkem je partikulární integrál $y_p = \cos 3x$ a obecné řešení rovnice má tudíž tvar

$$y = \hat{y} + y_p = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \cos 3x.$$

c) S diferenciální rovnicí $y'' - 4y = 5e^{3x} + 4x$ jsme se již setkali v příkladu 3.6.8, kde byla řešena variací konstant. Obecné řešení zkrácené rovnice zde bylo určeno ve tvaru

$$\hat{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Exponenciální a lineární funkce na pravé straně nabízejí možnost použít i zde metodu neurčitých koeficientů, kterou rozšíříme aplikací principu superpozice (věta 3.6.7). Hledaný partikulární integrál zapíšeme jako součet integrálu pro exponenciální funkci (viz a)) a polynomu prvního stupně:

$$y_p = K \cdot e^{3x} + b_1 x + b_2.$$

Dále postupujeme jako v předchozích dvou příkladech:

$$y'_p = 3K \cdot e^{3x} + b_1, \quad y''_p = 9K \cdot e^{3x},$$

dosadíme do původní rovnice a upravíme:

$$5K \cdot e^{3x} - 4b_1 x - 4b_2 = 5e^{3x} + 4x,$$

porovnáme koeficienty u funkcí téhož typu a dostaneme:

$$\begin{array}{lcl} e^{3x} : & 5K & = 5 \quad \Rightarrow \quad K = 1 \\ x^1 : & -4b_1 & = 4 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -1 \\ x^0 : & -4b_2 & = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 0, \end{array}$$

tedy partikulární integrál je ve tvaru

$$y_p = e^{3x} - x.$$

Obecné řešení má tedy tvar

$$y = \hat{y} + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + e^{3x} - x.$$

3.7.3. Princip metody neurčitých koeficientů. Má-li pravá strana LDR s konstantními koeficienty tvar

$$B(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_m(x) \cdot \cos \beta x + Q_n(x) \cdot \sin \beta x), \quad (3.31)$$

kde $P_m(x)$, $Q_n(x)$ jsou polynomy stupňů m, n se zadanými koeficienty, volíme partikulární integrál ve tvaru

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \cdot (p_M(x) \cdot \cos \beta x + q_M(x) \cdot \sin \beta x), \quad (3.32)$$

kde $M = \max\{m, n\}$. Koeficienty polynomů p_M, q_M určíme porovnávací metodou po dosazení partikulárního integrálu do zadané rovnice.

3.7.4. Poznámky. a) Ve výše uvedeném smyslu je v příkladu 3.7.2a) $\alpha = 1, \beta = 0, P_m \equiv 1, m = 0$, v příkladu 3.7.2b) $\alpha = 0, \beta = 3, Q_n \equiv 24, n = 0$.

b) Je nutno upozornit, že uvedený postup se zkomplikuje, jestliže charakteristická rovnice pro příslušnou zkrácenou LDR bude mít kořeny $r = \alpha \pm \beta i$ (α, β viz ve výrazu (3.31)). Jako ukázkou uvádíme následující příklad.

3.7.5. Příklad. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 6y' + 9y = 12.e^{3x}$.

Řešení. Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $r_{1,2} = 3$, tj. $\alpha = 3, \beta = 0$. Obecné řešení zkrácené rovnice bude podle věty 3.5.4b)

$$\hat{y} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Položme $y_p = K.e^{3x}$, a tedy $y'_p = 3K.e^{3x}$, $y''_p = 9K.e^{3x}$. Po dosazení do rovnice je

$$9K.e^{3x} - 18K.e^{3x} + 9K.e^{3x} = 12.e^{3x}, \quad \text{tj. } 0 = e^{3x},$$

což není možné. Podobně sporný výsledek obdržíme při volbě $y_p = Kx.e^{3x}$.

Důvodem je skutečnost, že funkce $e^{3x}, x.e^{3x}$ patří do fundamentálního systému zkrácené rovnice. Je to patrné také z toho, že pro pravou stranu $B(x) = 12.e^{3x}$ je $\alpha = 3, \beta = 0$, což právě odpovídá dvojnásobnému kořenu charakteristické rovnice.

Zvolíme-li však $y_p = Kx^2.e^{3x}$, bude

$$y'_p = K(2x + 3x^2).e^{3x}, \quad y''_p = K(2 + 12x + 9x^2).e^{3x}$$

a dále po dosazení do původní rovnice

$$K(2 + 12x + 9x^2).e^{3x} - 6K(2x + 3x^2).e^{3x} + 9Kx^2.e^{3x} = 12.e^{3x},$$

tedy po úpravě $2K.e^{3x} = 12.e^{3x}$, odkud $K = 6$. Partikulární integrál je tedy nalezen a má tvar

$$y_p = 6x^2.e^{3x},$$

proto hledané obecné řešení je

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x.e^{3x} + 6x^2.e^{3x}.$$

3.7.6. Metoda neurčitých koeficientů - dokončení. Je-li pro pravou stranu LDR s konstantními koeficienty ve tvaru (3.31) číslo $\alpha \pm \beta i$ k -násobným kořenem její charakteristické rovnice, pak je třeba partikulární integrál zvolit ve tvaru

$$y_p(x) = x^k . e^{\alpha x} . (p_M(x) . \cos \beta x + q_M(x) . \sin \beta x), \quad (3.33)$$

přičemž pro polynomy p_M, q_M platí totéž jako v článku 3.7.3.

Názornější pohled na aplikaci výše uvedeného vztahu poskytuje následující tabulka, v níž jsou vyčleněny nejdůležitější speciální případy.

Pravá strana LDR $B(x)$	k -násobný kořen char. rovnice.	Partikulární integrál y_p
$P_m(x)$	$r = 0$	$x^k \cdot p_m(x)$
$e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$	$r = \alpha \in \mathbf{R}$	$x^k \cdot e^{\alpha x} \cdot p_m(x)$
$P_m(x) \cdot \cos \beta x, P_m(x) \cdot \sin \beta x$	$r = \pm i\beta, \beta \in \mathbf{R}$	$x^k \cdot (p_M \cdot \cos \beta x + q_M \cdot \sin \beta x)$
$e^{\alpha x} \cdot P_m \cdot \cos \beta x, e^{\alpha x} \cdot P_m \cdot \sin \beta x$	$r = \alpha \pm i\beta$	$x^k \cdot e^{\alpha x} \cdot (p_M \cdot \cos \beta x + q_M \cdot \sin \beta x)$

3.7.7. Poznámky. a) Neurčitými koeficienty jsou ve všech případech koeficienty polynomů.

b) Je-li pravá strana součtem několika funkcí různého typu z prvního sloupce, je možno použít princip superpozice.

c) Ve všech uvedených případech lze použít i metodu variace konstant, ta je však zpravidla mnohem pracnější (srovnej příklady 3.6.8 a 3.7.2c)).

d) Metodu neurčitých koeficientů lze aplikovat pouze na DR s konstantními koeficienty.

3.7.8. Příklad. Je dána LDR $y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = B(x)$. Určete obecné řešení přiřazené homogenní rovnice a tvar partikulárního řešení pro následující pravé strany:

- $B(x) = (x+1)\cos 2x$,
- $B(x) = 36x^2 - 24x - 48$,
- $B(x) = (2x+1)\cos 2x + x^2 \sin 3x$,
- $B(x) = e^x(x^2 + 1)\cos 2x$.

Řešení. Charakteristická rovnice je $r^6 + 8r^4 + 16r^2 = 0$, tj. $r^2(r^2 + 4)^2 = 0$, má tedy dvojnásobné kořeny $r_{1,2} = 0, r_{3,4} = 2i, r_{5,6} = -2i$. Funkce fundamentálního systému pak jsou

$$1, x, \cos 2x, \sin 2x, x \cos 2x, x \sin 2x$$

a obecné řešení homogenní rovnice je

$$\hat{y} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + C_5 x \cos 2x + C_6 x \sin 2x.$$

Tvar partikulárního řešení určíme v jednotlivých případech podle výše uvedeného přehledu.

a) Protože $r_{3,4} = 2i, r_{5,6} = -2i$ jsou dvojnásobné kořeny a současně je $\beta = 2$ pro zadaný tvar pravé strany, bude mít podle třetího řádku tabulky partikulární řešení tvar

$$y_p = x^2[(ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x], \text{ kde } a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

b) Protože $r_{1,2} = 0$, bude mít podle prvního řádku tabulky partikulární řešení tvar

$$y_p = x^2(ax^2 + bx + c), \text{ kde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

c) V tomto případě je nutné hledat partikulární řešení podle principu superpozice partikulárních integrálů. Označme

$$B(x) = B_1(x) + B_2(x) = [(2x+1)\cos 2x] + [x^2 \sin 3x].$$

Funkci $B_1(x)$ odpovídá partikulární řešení y_{p1} , funkci $B_2(x)$ odpovídá y_{p2} . Protože číslo $2i$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, je

$$y_{p1} = x^2[(a_1x + a_0)\cos 2x + (b_1x + b_0)\sin 2x], \text{ kde } a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbf{R};$$

číslo $3i$ není kořenem charakteristické rovnice, proto můžeme aplikovat standardní volbu dle článku 3.7.3 :

$$y_{p2} = (c_2x^2 + c_1x + c_0)\cos 3x + (d_2x^2 + d_1x + d_0)\sin 3x, \text{ kde } c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2 \in \mathbf{R}.$$

Hledané partikulární řešení je tvaru

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = x^2[(a_1x + a_0)\cos 2x + (b_1x + b_0)\sin 2x] + (c_2x^2 + c_1x + c_0)\cos 3x + (d_2x^2 + d_1x + d_0)\sin 3x.$$

d) Protože číslo $\alpha + \beta i = 1 + 2i$ není kořenem charakteristické rovnice, bude mít partikulární řešení tvar

$$y_p = e^x[(ax^2 + bx + c)\cos 2x + (dx^2 + ex + f)\sin 2x], \text{ kde } a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}.$$

3.7.9. Příklad. Určete řešení příkladu 3.7.8b).

Řešení. Podle výše uvedeného rozboru volíme $y_p = ax^4 + bx^3 + cx^2$, takže příslušné derivace budou

$$y'_p = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx, \quad y''_p = 12ax^2 + 6bx + 2c, \quad y'''_p = 24ax + 6b, \quad y^{(4)}_p = 24a, \quad y^{(5)}_p = y^{(6)}_p = 0$$

a po dosazení do diferenciální rovnice obdržíme:

$$192a + 192ax^2 + 96bx + 32c = 36x^2 - 24x - 48.$$

Nyní porovnáme koeficienty u stejných mocnin x :

$$\left. \begin{array}{lcl} x^2 : & 192a & = 36 \\ x^1 : & 96b & = -24 \\ x^0 : & 192a + 32c & = -48 \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{3}{16}, b = -\frac{1}{4}, c = -\frac{21}{8}.$$

Partikulárním řešením bude tedy polynom $y_p = \frac{x^2}{16}(3x^2 - 4x - 42)$ a obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = C_1 + C_2x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + C_5x \cos 2x + C_6x \sin 2x + \frac{x^2}{16}(3x^2 - 4x - 42).$$

3.7.10. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $y^{(4)} - y = -2 \sin 2x + \cos 2x$.

Řešení. Její charakteristická rovnice je binomická rovnice čtvrtého stupně

$$r^4 - 1 = 0 \Rightarrow (r-1)(r+1)(r-i)(r+i) = 0,$$

odkud $r_{1,2} = \pm 1, r_{3,4} = \pm i$. Fundamentální systém řešení představují funkce $e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x$ a obecné řešení příslušné zkrácené rovnice je

$$\hat{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Číslo $2i$ není kořenem charakteristické rovnice, proto má partikulární řešení tvar

$$y_p = a \sin 2x + b \cos 2x,$$

odkud

$$y_p' = 2a \cos 2x - 2b \sin 2x$$

$$y_p'' = -4a \sin 2x - 4b \cos 2x$$

$$y_p''' = -8a \cos 2x + 8b \sin 2x$$

$$y_p^{(4)} = 16a \sin 2x + 16b \cos 2x.$$

Dosazením do dané rovnice dostaneme

$$16a \sin 2x + 16b \cos 2x - a \sin 2x - b \cos 2x = -2 \sin 2x + \cos 2x,$$

tj.

$$15a \sin 2x + 15b \cos 2x = -2 \sin 2x + \cos 2x,$$

takže po porovnání koeficientů u goniometrických funkcí téhož typu budeme mít

$$15a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{15}, \quad 15b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{15}.$$

Partikulární řešení má tedy tvar $y_p = -\frac{2}{15} \sin 2x + \frac{1}{15} \cos 2x$, obecné řešení zapíšeme takto:

$$y = \hat{y} + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{2}{15} \sin 2x + \frac{1}{15} \cos 2x.$$

Příklady k procvičení.

P3.12. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 5y' + 6y = B(x)$, je-li

a) $B(x) = x^2 + 5x - 3,$

b) $B(x) = xe^x,$

c) $B(x) = 5 \sin 3x,$

d) $B(x) = xe^{-2x},$

e) $B(x) = e^{-3x} \cos x,$

f) $B(x) = e^{2x} + x \sin x.$

P3.13. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = B(x)$, je-li

a) $B(x) = x^3 + 1,$

b) $B(x) = (x+1)e^x,$

c) $B(x) = 2 \sin x - \cos x,$

d) $B(x) = 5e^{2x},$

e) $B(x) = e^{2x} \sin x,$

f) $B(x) = x^2 + e^x \cos x.$

P3.14. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + 10y = B(x)$, je-li

a) $B(x) = x^2 - 5,$

b) $B(x) = x^2 e^x,$

c) $B(x) = \sin 3x + 2 \cos 3x,$

d) $B(x) = e^x \sin 3x,$

e) $B(x) = 2x \sin x + (9x+7) \cos x,$

f) $B(x) = x + e^{2x}.$

P3.15. Najděte obecné řešení rovnice $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 16y' + 16y = B(x)$, je-li

a) $B(x) = x^3 + 5x^2 - 1,$ b) $B(x) = e^{2x},$ c) $B(x) = 75 \sin x,$ d) $B(x) = 24(2x-1)e^{-2x},$

e) $B(x) = 48 \sin 2x + 32(2x+1) \cos 2x,$ f) $B(x) = e^x + 3 \cos x.$

P3.16. Vozidlo o hmotnosti m se pohybuje působením konstantní síly o velikosti p , která má směr pohybu. Překonává přitom odpor r úměrný rychlosti ($r = k \cdot v(t)$). Vyjádřete a

řešte příslušnou pohybovou rovnici pro velikost jeho dráhy $y(t)$ jako funkci času při počátečních podmínkách $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Výsledky:

P3.12. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + y_p$, kde

$$\begin{aligned} \text{a) } y_p &= \frac{1}{54}(9x^2 + 30x - 55), \text{ b) } y_p = \frac{1}{144}(12x - 7)e^x, \text{ c) } y_p = -\frac{5}{78}(5\cos 3x + \sin 3x), \\ \text{d) } y_p &= \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{-2x}, \text{ e) } y_p = -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^{-3x}, \\ \text{f) } y_p &= \frac{1}{20}e^{2x} - \frac{1}{10}(x-1)\cos x + \frac{1}{50}(5x-2)\sin x. \end{aligned}$$

P3.13. $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + y_p$, kde

$$\begin{aligned} \text{a) } y_p &= \frac{1}{8}(2x^3 + 6x^2 + 9x + 8), \quad \text{b) } y_p = (x+3)e^x, \quad \text{c) } y_p = \frac{1}{5}(\cos x + 2\sin x), \\ \text{d) } y_p &= \frac{5}{2}x^2 e^{2x}, \quad \text{e) } y_p = -e^{2x} \sin x, \quad \text{f) } y_p = \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3) - \frac{1}{2}e^x \sin x. \end{aligned}$$

P3.14. $y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)e^x + y_p$, kde

$$\begin{aligned} \text{a) } y_p &= \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{25}x - \frac{64}{125}, \quad \text{b) } y_p = \frac{1}{81}(9x^2 - 2)e^x, \quad \text{c) } y_p = \frac{1}{37}(8\cos 3x - 11\sin 3x) \\ \text{d) } y_p &= -\frac{1}{6}xe^x \cos 3x, \quad \text{e) } y_p = (x+1)\cos x, \quad \text{f) } y_p = \frac{1}{50}(5e^{2x} + 5x + 1). \end{aligned}$$

P3.15. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + y_p$, kde

$$\begin{aligned} \text{a) } y_p &= \frac{1}{32}(2x^3 + 4x^2 - 14x + 5), \quad \text{b) } y_p = \frac{1}{128}e^{2x}, \quad \text{c) } y_p = 3\sin x - 4\cos x, \\ \text{d) } y_p &= x^3 e^{-2x}, \quad \text{e) } y_p = -x^2 \cos 2x, \quad \text{f) } y_p = \frac{1}{45}e^x + \frac{1}{25}(3\cos x + 4\sin x). \end{aligned}$$

P3.16. Pohybová rovnice má tvar $m \frac{d^2 y}{dt^2} = p - k \frac{dy}{dt}$, její řešení je

$$y = \frac{p}{k} \left[x + \frac{m}{k} \left(e^{-\frac{kx}{m}} - 1 \right) \right].$$

3.8. Eulerova a Lagrangeova rovnice

3.8.1. Definice. Eulerovou diferenciální rovnicí nazýváme každou rovnici ve tvaru

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = B(x), \text{ kde } a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.36)$$

3.8.2. Věta. Eulerovu diferenciální rovnici převedeme substitucí $x = e^t$ na LDR n -tého řádu s konstantními koeficienty pro neznámou funkci $Y = Y(t)$.

Důkaz. Pro přehlednost provedeme důkaz pro $n = 2$, tedy pro rovnici

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = B(x).$$

Do hledaného řešení $y = y(x)$ dosadíme na základě substituce:

$$y = y(x) = y(e^t) = Y(t), \text{ kde } t = \ln x.$$

Odtud

$$y' = \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{Y} \cdot \frac{1}{x}$$

(tečkou nad symbolem budeme pro odlišení značit derivaci podle proměnné t)

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\dot{Y} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{d\dot{Y}}{dx} \cdot \frac{1}{x} + \dot{Y} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = \left(\dot{Y} \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} - \dot{Y} \cdot \frac{1}{x^2} = (\ddot{Y} - \dot{Y}) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Dosazením do dané rovnice obdržíme:

$$a_2 x^2 (\ddot{Y} - \dot{Y}) \cdot \frac{1}{x^2} + a_1 x \dot{Y} \frac{1}{x} + a_0 Y = B(e^t)$$

$$a_2 \ddot{Y} + (a_1 - a_2) \dot{Y} + a_0 Y = B(e^t),$$

což je úplná LDR s konstantními koeficienty pro neznámou funkci $Y = Y(t)$, jejíž charakteristická rovnice má tvar

$$a_2 r^2 + (a_1 - a_2)r + a_0 = 0.$$

3.8.3. Věta. Charakteristickou rovnici Eulerovy LDR dostaneme tak, že do příslušné zkrácené rovnice k rovnici (3.36) zavedeme substituci $y = x^r$, kde $r \in \mathbf{C}$.

Důkaz. Důkaz provedeme opět pro $n = 2$. Podle článku 3.5.1 tuto charakteristickou rovnici dostaneme za předpokladu, že hledané řešení je tvaru

$$Y(t) = e^{rt} = (e^t)^r$$

a protože $x = e^t$, máme

$$y(x) = x^r \Rightarrow y' = r \cdot x^{r-1} \Rightarrow y'' = r \cdot (r-1) \cdot x^{r-2}.$$

Dosazením do příslušné zkrácené Eulerovy DR dostaneme

$$a_2 x^2 r(r-1) x^{r-2} + a_1 x r x^{r-1} + a_0 x^r = 0$$

$$x^r \cdot [a_2 r^2 + (a_1 - a_2)r + a_0] = 0$$

$$a_2 r^2 + (a_1 - a_2)r + a_0 = 0,$$

což je stejná rovnice jako v důkazu věty 3.8.2.

Pro libovolné přirozené číslo n je důkaz obdobný.

3.8.4. Postup při řešení Eulerovy rovnice.

1. Podle předchozí věty určíme charakteristickou rovnici příslušné zkrácené Eulerovy rovnice zavedením substituce $y = x^r$.
2. K této charakteristické rovnici sestavíme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty pro funkci $Y = Y(t)$ a do pravé strany $B(x)$ v rovnici (3.36) dosadíme vztah $x = e^t$.
3. Tuto rovnici vyřešíme a vrátíme se k původní proměnné x (tj. dosadíme $t = \ln x$).

3.8.5. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $x^2 y'' + 3xy' + 2y = \ln x$.

Řešení. Do příslušné zkrácené rovnice

$$x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0$$

zavedeme substituci

$$y = x^r \Rightarrow y' = rx^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

a dostaneme

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + 3xr(r-1)x^{r-1} + 2x^r = 0$$
$$r^2 + 2r + 2 = 0,$$

což je hledaná charakteristická rovnice.

Příslušná LDR pro funkci $Y = Y(t)$ má tedy tvar

$$\ddot{Y} + 2\dot{Y} + 2Y = \ln(e^t)$$
$$\ddot{Y} + 2\dot{Y} + 2Y = t.$$

Tato rovnice má obecné řešení

$$Y = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2},$$

odkud pro $t = \ln x$ dostaneme

$$y = C_1 \frac{1}{x} \cos \ln x + C_2 \frac{1}{x} \sin \ln x + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2}, \text{ kde } C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

což je hledané obecné řešení.

3.8.6. Definice. Lagrangeovou diferenciální rovnici nazveme každou rovnici tvaru

$$a_n (cx + d)^n y^{(n)} + a_{n-1} (cx + d)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 (cx + d) y' + a_0 y = B(x),$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n, c, d \in \mathbf{R}$.

3.8.7. Poznámka. Postup při řešení Lagrangeovy rovnice je stejný jako u Eulerovy rovnice, liší se jen poněkud substituce. Klademe $cx + d = e^t$, charakteristickou rovnici získáme zavedením substituce $y = (cx + d)^r$.

3.8.8. Příklad. Určete obecné řešení rovnice $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$ pro $x > 2$.

Řešení. Do příslušné zkrácené rovnice

$$(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = 0$$

zavedeme substituci

$$y = (x-2)^r \Rightarrow y' = r(x-2)^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)(x-2)^{r-2}$$

a dostaneme

$$(x-2)^2 r(r-1)(x-2)^{r-2} - 3(x-2)r(x-2)^{r-1} + 4(x-2)^r = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{(x-2)^r} \right.$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

což je hledaná charakteristická rovnice.

Příslušná LDR pro funkci $Y = Y(t)$ má tedy po zavedení substituce $x-2 = e^t \Rightarrow x = e^t + 2$ tvar

$$\ddot{Y} - 4\dot{Y} + 4Y = e^t + 2$$

a její obecné řešení je

$$Y = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + e^t + \frac{1}{2}.$$

Vrátíme-li se nyní k proměnné x , tedy $x-2 = e^t \Rightarrow t = \ln(x-2)$, dostaneme

$$y = C_1(x-2)^2 + C_2(x-2)^2 \ln(x-2) + x - \frac{3}{2}, \text{ kde } C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

což je hledané obecné řešení.

Příklady k procvičení.

P3.17. Najděte obecné řešení rovnice:

- a) $x^2 y'' - xy' + y = 1 + \ln x$, b) $x^3 y''' + 2x^2 y'' - 4xy' + 4y = \ln^2 x - 8$,
c) $(2x-1)^2 y'' + 2(2x-1)y' - y = 5 \cos(\ln(2x-1))$,
d) $(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 22 - 6 \ln(2x+3)$.

P3.18. Řešte Cauchyho úlohu:

- a) $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$, je-li $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$;
b) $(x-1)^2 y'' - (x-1)y' + y = 6(x-1) \ln(x-1)$, je-li $y(2) = 0$, $y'(2) = 0$.

Výsledky:

P3.17. a) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + \ln x + 3$, b) $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \ln^2 x + \frac{1}{2} \ln x - \frac{11}{8}$,

c) $y = C_1 \sqrt{2x-1} + \frac{C_2}{\sqrt{2x-1}} - \cos(\ln(2x-1))$,

d) $y = C_1(2x+3) + C_2(2x+3)\sqrt{2x+3} + C_3\sqrt{2x+3} + \ln(2x+3)$.

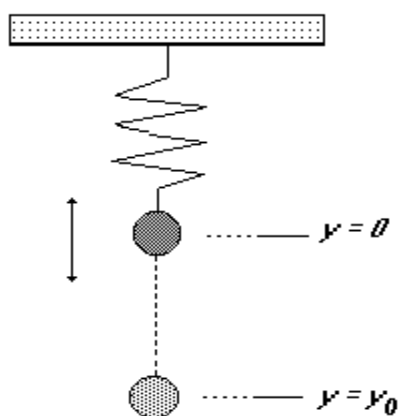
P3.18. a) $y = x^3 + \frac{1}{x^2} + x^3 \ln|x| - 2x^2$, b) $y = (x-1) \ln^3(x-1)$.

3.9. Harmonické kmity

3.9.1. Motivace. K typickým problémům, které lze formulovat pomocí lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, patří úlohy popisující jednoduché kmitavé děje.

V této kapitole provedeme základní rozbor pro mechanické kmity, pro něž mají koeficienty rovnic názornou fyzikální interpretaci. Lze ale ukázat, že celou problematiku můžeme analogicky formulovat například pro děje v elektrických kmitavých obvodech, jak vyplývá z poznámky 3.9.5b.

3.9.2. Vlastní kmity v neodporujícím prostředí. Na pružině je zavěšeno závaží o hmotnosti m , které je v rovnovážné poloze. Vychýlíme-li je o y_0 a uvolníme (případně udělíme určitou počáteční rychlost), dochází v důsledku pružné deformace ke kmitavému pohybu (obr. 3.1). Odvodíme jeho diferenciální rovnici za předpokladu, že prostředí neklade pohybu žádný odpor.



Obr. 3.1

Označme výchylku z rovnovážné polohy v čase t funkcí $y(t)$. Podle druhého Newtonova zákona platí

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \cdot y$$

kde k je tuhost pružiny. Označíme-li $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, obdržíme diferenciální rovnici **vlastních harmonických kmitů v neodporujícím prostředí**

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0. \quad (3.35)$$

Její charakteristická rovnice je $r^2 + \omega_0^2 = 0$ s kořeny $r_{1,2} = \pm i\omega_0$. Obecné řešení lze zapsat

ve tvaru

$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t,$$

kde C_1, C_2 jsou reálné konstanty.

Položme dále $C_1 = -A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$, tj. dvojici C_1, C_2 nahradíme konstantami A, φ . Protože platí

$$A \sin \omega_0 t \cos \varphi - A \cos \omega_0 t \sin \varphi = A \sin(\omega_0 t - \varphi),$$

můžeme obecné řešení rovnice (3.35) psát ve známém tvaru

$$y = A \sin(\omega_0 t - \varphi), \quad (3.36)$$

kde $A > 0$ je **amplituda**, ω_0 **úhlová frekvence** vlastních kmitů a $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$ **počáteční fáze** kmitavého pohybu.

Řešení je periodické s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, protože platí

$$y = A \cdot \sin\left(\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \varphi\right) = A \cdot \sin(\omega_0 t + 2\pi - \varphi) = A \cdot \sin(\omega_0 t - \varphi).$$

Amplitudu a fázi určíme v případě potřeby jako řešení Cauchyho úlohy pro zadané počáteční podmínky, které mají v našem případě tvar

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 & (\text{počáteční výchylka}), \\ y'(0) &= 0 & (\text{počáteční rychlost je nulová}). \end{aligned}$$

3.9.3. Příklad. Vyšetřete harmonický pohyb popsany rovnicí $y'' + 4y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y'(0) = 3\sqrt{2}$.

Řešení. Z rovnice je ihned patrné, že $\omega_0^2 = 4$, tj. $\omega_0 = 2$, a proto má obecné řešení tvar

$$y = A \cdot \sin(2t - \varphi).$$

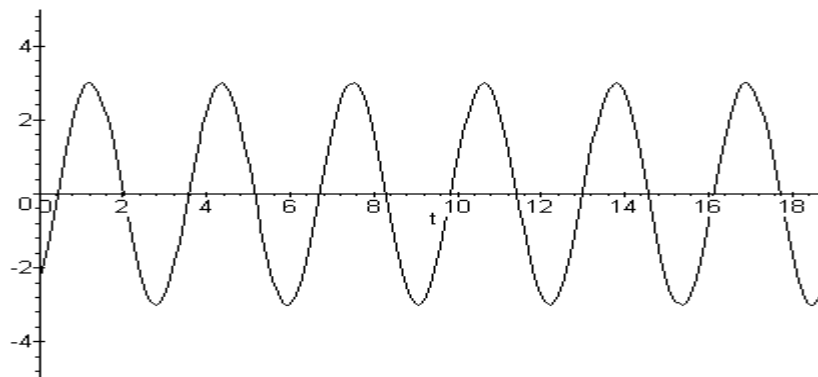
Amplitudu a fázi určíme z počátečních podmínek. Protože $y' = 2A \cdot \cos(2t - \varphi)$, obdržíme soustavu $-\frac{3\sqrt{2}}{2} = -A \cdot \sin \varphi$, $3\sqrt{2} = 2A \cdot \cos \varphi$ neboli

$$\begin{aligned} -3\sqrt{2} &= -2A \cdot \sin \varphi, \\ 3\sqrt{2} &= 2A \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Vydělíme-li první rovnici druhou, dostáváme $\operatorname{tg} \varphi = 1$, odkud $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Umocněním obou rovnic na druhou a sečtením získáme vztah pro amplitudu $36 = 4A^2$, odkud $A = 3$. Netlumené vlastní kmity jsou tudíž popsány funkcí

$$y(t) = 3 \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right),$$

jejíž graf je na obr.3.2.



Obr. 3.2

3.9.4. Tlumené vlastní kmity. Na rozdíl od předchozího případu předpokládáme, že existuje síla odporu prostředí, která působí proti danému pohybu a je přímo úměrná rychlosti pohybu, takže ji lze vyjádřit výrazem $-2b \cdot y'(t)$. Pohybová rovnice má nyní tvar

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \cdot y - 2b \cdot \frac{dy}{dt}$$

a při označení tzv. **koeficientu odporu prostředí** $a = b/m > 0$ dostáváme LDR druhého řádu

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2a \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0, \quad (3.37)$$

což je **diferenciální rovnice tlumených kmitů**. K ní příslušná charakteristická rovnice je

$$r^2 + 2ar + \omega_0^2 = 0$$

a její kořeny najdeme ve tvaru

$$r_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_0^2}. \quad (3.38)$$

Je zřejmé, že je třeba rozlišit tři možnosti, které mají zásadní vliv na charakter řešení.

(1) $a^2 - \omega_0^2 > 0$, tj. $a > \omega_0$:

Charakteristická rovnice má dva různé reálné záporné kořeny

$$r_1 = -a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2},$$

takže obecným řešením rovnice (3.37) bude funkce

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Kmity v tomto případě nejsou periodické, okamžitá výchylka s rostoucím časem klesá k nule, protože oba kořeny jsou záporné, a tedy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}) = 0.$$

Říkáme, že jde o **silně tlumený neharmonický pohyb**.

(2) $a^2 - \omega_0^2 = 0$, tj. $a = \omega_0$:

Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen $r_{1,2} = -a$. Obecné řešení rovnice (3.37) je

$$y = C_1 e^{-at} + C_2 t e^{-at} = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-at}. \quad (3.39)$$

I nyní s rostoucím časem klesá okamžitá výchylka k nule, jak se lze přesvědčit výpočtem limity. Jedná se o **kriticky tlumený pohyb**, který je neharmonický (aperiodický) stejně jako předchozí silně tlumený pohyb.

(3) $a^2 - \omega_0^2 < 0$, tj. $a < \omega_0$:

Z charakteristické rovnice vychází dvojice komplexně sdružených kořenů

$$r_{1,2} = -a \pm i\sqrt{\omega_0^2 - a^2}.$$

Položme zde $p = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$, takže obecné řešení rovnice (3.37) můžeme potom podle věty 3.5.4 psát ve tvaru

$$y = C_1 e^{-at} \cos pt + C_2 e^{-at} \sin pt.$$

Analogicky jako v případě netlumených kmitů v článku 3.9.2 lze přejít k následující formě výsledku, v níž vystupuje amplituda a fáze kmitů:

$$y = A e^{-at} \sin(pt - \varphi). \quad (3.40)$$

Jde o **slabě tlumený periodický pohyb** s periodou

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - a^2}},$$

jehož amplituda $A e^{-at}$ klesá s rostoucím časem exponenciálně k nule.

3.9.5. Příklad. Kmitavý pohyb je popsán rovnicí $y'' + 2a.y' + 0,25.y = 0$. Proved'te jeho rozbor pro zadané hodnoty koeficientu odporu a a výsledky znázorněte graficky při počátečních podmínkách $y(0) = 1$, $y'(0) = 1,25$. [(1) $a = 1,0625$, (2) $a = 0,5$]

Řešení. Podle zadání je $\omega_0 = \sqrt{0,25} = 0,5$. Proto v prvním případě, kdy je $a = 1,0625$ větší než úhlová frekvence, půjde o silně tlumený pohyb, ve druhém případě se jedná o pohyb kriticky tlumený, neboť $\omega_0 = a = 0,5$.

(1) Diferenciální rovnice silně tlumeného pohybu je

$$y'' + 2,125.y' + 0,25.y = 0,$$

kořeny charakteristické rovnice jsou pak podle (3.38) $r_1 = -2$, $r_2 = -0,125$. Obecným řešením je aperiodická funkce

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-0,125t}.$$

Konstanty $C_1 = -\frac{11}{15}$, $C_2 = \frac{26}{15}$ snadno najdeme obvyklým způsobem ze zadaných počátečních podmínek, takže hledaným průběhem je funkce

$$y(t) = -\frac{11}{15} \cdot e^{-2t} + \frac{26}{15} \cdot e^{-0,125t}.$$

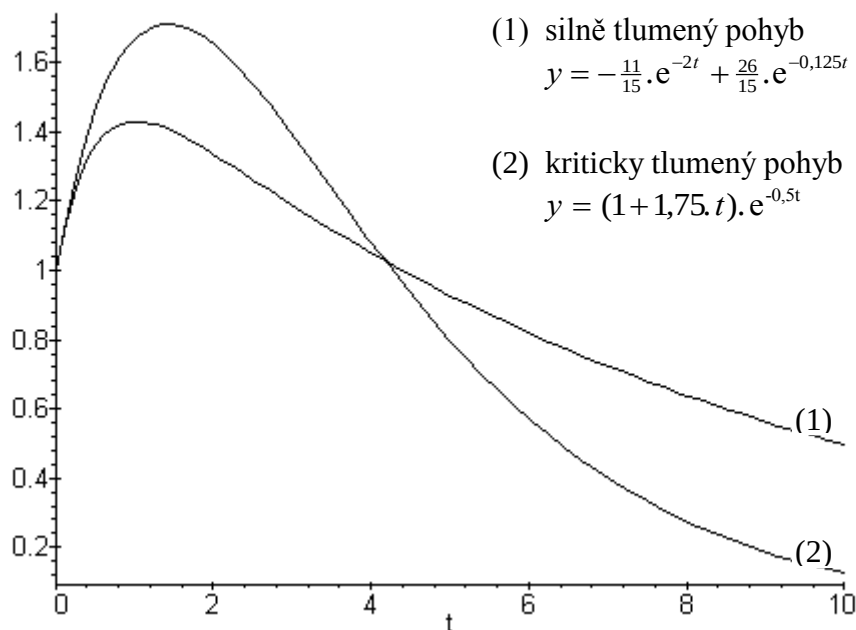
(2) I v tomto případě můžeme ihned napsat obecné řešení, které má tvar (3.37):

$$y = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-0,5t}.$$

Počáteční podmínky vedou k hodnotám konstant $C_1 = 1$, $C_2 = 1,75$, takže výsledné řešení je

$$y(t) = (1 + 1,75 \cdot t) \cdot e^{-0,5t}.$$

Grafy obou výsledků jsou na obr.3.3.



Obr. 3.3

3.9.6. Příklad. Vyšetřete harmonický pohyb popsáný rovnicí $y'' + 2y' + 101y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 9$.

Řešení. V rovnici je $a = 1$ menší než úhlová frekvence $\omega_0 = \sqrt{101}$, a proto se jedná o tlumený periodický pohyb s frekvencí

$$p = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} = 10,$$

jehož obecný průběh popisuje funkce

$$y = A \cdot e^{-at} \sin(pt - \varphi) = A \cdot e^{-t} \sin(10t - \varphi).$$

Přistoupíme nyní k výpočtu amplitudy a fáze z počátečních podmínek. Protože je

$$y' = -A \cdot e^{-t} \sin(10t - \varphi) + 10 \cdot A \cdot e^{-t} \cos(10t - \varphi),$$

získáváme pro $t = 0$ soustavu

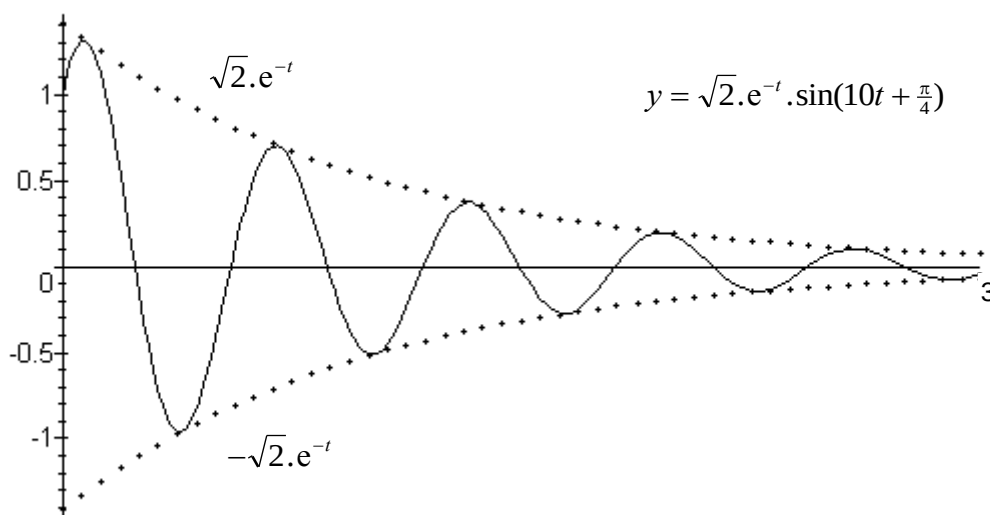
$$1 = -A \cdot \sin \varphi$$

$$9 = A \cdot \sin \varphi + 10A \cdot \cos \varphi.$$

Dosadíme-li z první rovnice do druhé, vychází $1 = A \cdot \cos \varphi$. Tento vztah spolu s první rovnicí ve výše uvedené soustavě zpracujeme stejným způsobem jako v příkladu 3.9.3 a obdržíme hodnoty $A = \sqrt{2}$, $\varphi = -\pi/4$. Výsledný tlumený harmonický pohyb

$$y(t) = \sqrt{2} \cdot e^{-t} \cdot \sin(10t + \frac{\pi}{4})$$

je na obr.3.4. Tečkovaně je znázorněn průběh exponenciál, jimiž je harmonický průběh modulován (tlumen).



Obr. 3.4

3.9.7. Nucené kmity. Pripustíme-li, že kromě odporu prostředí působí na oscilátor periodicky proměnná síla $F \sin \omega t$ s konstantní amplitudou F a kruhovou frekvencí ω (vztahovaná na jednotku hmotnosti), má diferenciální rovnice kmitavého pohybu tvar

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2a \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = F \sin \omega t. \quad (3.41)$$

Její obecné řešení hledáme ve tvaru $y = \hat{y} + y_p$, kde $\hat{y}$ je obecné řešení přiřazené zkrácené rovnice a y_p je partikulární řešení úplné rovnice (3.41). V následující analýze se omezíme na případ $a^2 - \omega_0^2 < 0$, kdy zkrácená rovnice popisuje slabě tlumený kmitavý pohyb. Její řešení je podle (3.40)

$$\hat{y} = A e^{-at} \sin(pt - \varphi), \quad \text{kde } p = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}. \quad (3.42)$$

Partikulární řešení rovnice (3.41), jejíž pravou stranou je goniometrická funkce, hledáme podle článku 3.7.3 ve tvaru

$$y_p = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Tuto funkci a její derivace

$$y_p' = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t, \quad y_p'' = -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t$$

dosadíme do rovnice (3.41) a po úpravě dostaneme

$$(-C_1 \omega^2 - 2a C_2 \omega + \omega_0^2 C_1) \sin \omega t + (-C_2 \omega^2 + 2a C_1 \omega + \omega_0^2 C_2) \cos \omega t = F \sin \omega t.$$

Porovnáním koeficientů u funkcí $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot C_1 - 2a \omega C_2 &= F \\ 2a \omega C_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot C_2 &= 0, \end{aligned}$$

která má jediné řešení

$$C_1 = \frac{F(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2 \omega^2}, \quad C_2 = \frac{-2a \omega F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2 \omega^2}.$$

Obdobně jako v článku 3.9.2 nahradíme konstanty C_1, C_2 jinými konstantami B, ψ tak, že položíme $C_1 = B \cos \psi$, $C_2 = -B \sin \psi$ a partikulární řešení lze potom zapsat ve tvaru

$$y_p = B \cdot \sin(\omega t - \psi), \quad (3.43)$$

kde $B > 0$ je amplituda a ψ je fázový posuv vynucených kmitů.

Pro tyto konstanty obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} B \cos \psi &= \frac{F(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \\ B \sin \psi &= \frac{2a\omega F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice je zřejmé, že $\sin \psi > 0$, a tedy $\psi \in (0; \pi)$.

Vydělíme-li druhou rovnici první, dostaneme (pro $\omega_0 \neq \omega$)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

a proto

$$\psi = \begin{cases} \arctg \frac{2a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{pro } \omega_0^2 - \omega^2 > 0, \text{ tj. } \omega_0 > \omega, \\ \pi + \arctg \frac{2a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{pro } \omega_0^2 - \omega^2 < 0, \text{ tj. } \omega_0 < \omega. \end{cases} \quad (3.44)$$

Pro $\omega_0 = \omega$ máme z první rovnice $\cos \psi = 0 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}$.

Jestliže obě rovnice umocníme a sečteme, získáme po úpravě vztah

$$B = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}}. \quad (3.45)$$

Obecné řešení rovnice nucených kmitů v odporujícím prostředí se pak skládá z výrazu pro vlastní kmity (3.42) a partikulárního řešení (3.43) s amplitudou B určenou podle (3.45) a fází danou vzorcem (3.44):

$$y(t) = A \cdot e^{-at} \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - a^2} \cdot t - \varphi) + \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}} \cdot \sin(\omega t - \psi). \quad (3.46)$$

3.9.8. Poznámky. a) Z výsledného vztahu je dobře patrné, že první člen vyjadřující vlastní kmity je tlumen, takže pro dostatečně velké t bude systém kmitat s frekvencí ω nutící síly.

b) Není obtížné ukázat analogii popsaného mechanického oscilátoru a kmitavého sériového RLC obvodu porovnáním rovnice (3.41) a rovnic v ilustračním příkladu 1.1.2 v úvodu těchto skript. Ze srovnání vyplynou analogie mezi fyzikálními veličinami, jak je ukazuje připojená tabulka. Je tak umožněna snadná interpretace řešení problémů harmonických kmitů v elektrických obvodech s použitím výše uvedené teorie.

Mechanický oscilátor		RLC obvod	
rychlost	v	proud	i
okamžitá výchylka	y	náboj	q
mechanická síla	$F \cdot \sin \omega t$	napětí	$u_0 \cdot \sin \omega t$
hmotnost	m	indukčnost	L
poddajnost	$1/k$	kapacita	C
odpor. součinitel	b	odpor	R

3.9.9. Rezonance. Hledejme v případě nucených kmitů frekvenci, při níž bude amplituda kmitů maximální. Jak ukazuje druhý člen v řešení (3.46), nastane taková situace tehdy, bude-li jmenovatel zlomku co nejmenší; určíme proto minimum funkce

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2.$$

Z podmínky

$$\frac{df}{d\omega} = 0, \quad \text{tj.} \quad -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8a^2\omega = 0$$

vycházejí stacionární body $\omega_1 = 0$, $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2a^2}$. Protože frekvence budící síly nemůže být ani nulová ani záporná, vyhovuje jako jediný stacionární bod

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2a^2}. \quad (3.47)$$

Snadno se přesvědčíme, že se jedná o minimum funkce $f(\omega)$. Veličina ω_r se nazývá **rezo-**
nanční frekvence a udává takový kmitočet budící síly, při němž soustava dosahuje maximální amplitudy. Tu zjistíme dosazením hodnoty ω_r do vztahu (3.45):

$$B_{\max} = \frac{F}{2a\sqrt{\omega_0^2 - a^2}}. \quad (3.48)$$

Zkoumání rezonančních stavů hraje významnou úlohu v inženýrských aplikacích, ať už jde o mechanické soustavy, oscilační elektronické obvody nebo děje v kvantové fyzice.

Jde-li speciálně o netlumený kmitavý pohyb ($a=0$), roste amplituda neomezeně. Tomu odpovídá rovnost vlastní a nutící frekvence $\omega = \omega_0$. Z matematického hlediska jde o situaci, popsanou v článku 3.7.6 a ilustrovanou příkladem 3.9.10b.

3.9.10. Příklad. Řešte úlohu 3.9.3 s počátečními podmínkami $y(0) = y'(0) = 0$, jestliže je děj ovlivněn nutící silou určenou funkcí
a) $F(t) = 2 \cdot \cos t$,
b) $F(t) = 2 \cdot \sin 2t$.

Řešení. **a)** Příslušná diferenciální rovnice má tvar $y'' + 4y = 2 \cdot \cos t$, takže $\omega = 1 \neq \omega_0 = 2$. Jedná se o netlumený děj, jehož obecné řešení bude mít tvar

$$y(t) = A \cdot \sin(2t - \varphi) + B \cdot \sin(t - \psi),$$

kde nejprve určíme konstanty B, ψ tak, že partikulární integrál $y_p = B \cdot \sin(t - \psi)$ dosadíme do úplné rovnice:

$$-B \cdot \sin(t - \psi) + 4B \cdot \sin(t - \psi) = 2 \cdot \cos t,$$

neboli

$$-B.\sin t.\cos \psi + B.\cos t.\sin \psi + 4B.\sin t.\cos \psi - 4B.\cos t.\sin \psi = 2.\cos t.$$

Porovnáním výrazů u funkcí $\sin t$, $\cos t$ snadno určíme, že

$$B = -\frac{2}{3} \text{ a } \cos \psi = 0, \text{ tj. } \psi = \frac{\pi}{2}.$$

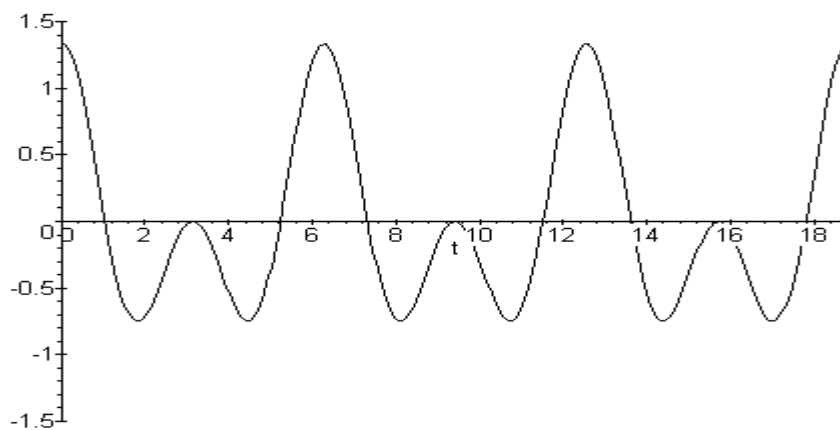
Našli jsme tedy obecné řešení

$$y(t) = A.\sin(2t - \varphi) - \frac{2}{3}.\sin(t - \frac{\pi}{2}) = A.\sin(2t - \varphi) + \frac{2}{3}.\cos t$$

a zbývá určit konstanty A , φ na základě počátečních podmínek. Známy postup vede jednoduchým výpočtem k hodnotám $\varphi = \pi/2$, $A = 2/3$, takže konečný výsledek má tvar

$$y(t) = \frac{2}{3}.\sin(2t - \frac{\pi}{2}) + \frac{2}{3}.\cos t.$$

Jde vlastně o složení dvou netlumených harmonických průběhů s různými frekvencemi, jak ukazuje obr.3.5.



Obr. 3.5

b) V tomto případě je v rovnici $y'' + 4y = 2.\sin 2t$ vlastní frekvence rovna frekvenci nutící síly ($\omega_0 = \omega = 2$). Dochází tudíž k rezonanci, a protože je děj netlumený ($a = 0$), bude na této frekvenci amplituda nekonečně velká, jak plyne ze vzorce (3.45).

Abychom našli funkci, která pohyb popisuje, položíme

$$y_p = Bt.\sin(2t - \psi),$$

jak plyne z rozboru v předchozí kapitole. Dále je

$$y_p' = B.\sin(2t - \psi) + 2Bt.\cos(2t - \psi),$$

$$y_p'' = 4B.\cos(2t - \psi) - 4Bt.\sin(2t - \psi),$$

takže po dosazení do původní rovnice obdržíme

$$4B.\cos(2t - \psi) = 2.\sin 2t$$

$$4B.\cos 2t.\cos \psi + 4B.\sin 2t.\sin \psi = 2.\sin 2t$$

Odtud porovnáním koeficientů u funkcí $\sin 2t$, $\cos 2t$ dostaneme $B = \frac{1}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Obecné řešení rovnice kmitavého pohybu má pak tvar

$$y(t) = A \cdot \sin(2t - \varphi) + \frac{t}{2} \cdot \sin(2t - \frac{\pi}{2}).$$

Amplitudu A a fázový posuv φ určíme dosazením počátečních podmínek $y(0) = y'(0) = 0$ do obecného řešení a její derivace

$$y'(t) = 2A \cdot \cos(2t - \varphi) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2t - \frac{\pi}{2}) + t \cdot \cos(2t - \frac{\pi}{2}).$$

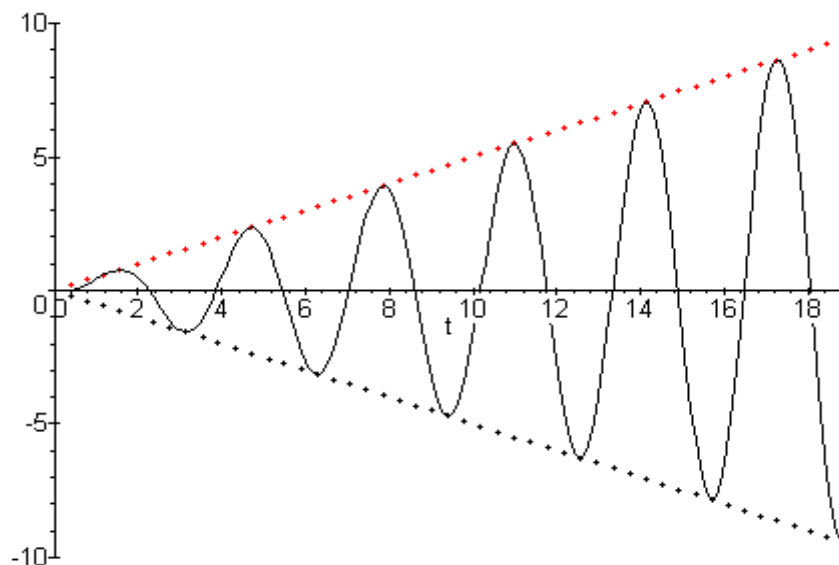
Dostaneme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= -A \cdot \sin \varphi \\ 0 &= 2A \cdot \cos \varphi - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

odkud vychází $A = 1/4$, $\varphi = 0$, takže konečným výsledkem je funkce

$$y(t) = \frac{1}{4} \cdot \sin 2t + \frac{t}{2} \cdot \sin(2t - \frac{\pi}{2}).$$

Graf této funkce vidíme na obr.3.6, přičemž tečkovaně jsou znázorněny přímky $y = \pm t/2$, které vymezují stále rostoucí amplitudy kmitů.



Obr. 3.6

3.9.11. Příklad. Provedte analýzu nucených tlumených kmitů na základě rovnice (3.41) s počátečními podmínkami $y(0) = 20$, $y'(0) = 0$ pro tyto hodnoty: $a = 0,05$, $\omega_0^2 = 1,0025$, $F = 30$, $\omega = 3$.

Řešení. Rovnice kmitů má tvar $y'' + 0,1y' + 1,0025y = 30 \cdot \sin 3t$. Její obecné řešení zapíšeme ve formě odpovídající vztahu (3.46):

$$y(t) = A \cdot e^{-at} \cdot \sin(pt - \varphi) + B \cdot \sin(\omega t - \psi), \quad (3.49)$$

kde hodnoty a , ω známe a podle (3.42) určíme $p = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} = 1$. Pro amplitudu B platí vzorec (3.45), podle kterého

$$B = F \cdot \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2 \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx 3,75 .$$

Fázi ψ vypočteme na základě vztahu (3.44) pro $\omega_0 < \omega$:

$$\psi = \pi + \arctg \left(\frac{2a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \approx 3,10 .$$

Konstanty A , φ odpovídají počátečním podmínkám a stanovíme je následujícím postupem. Nejprve vypočteme derivaci

$$y'(t) = -aA \cdot e^{-at} \cdot \sin(pt - \varphi) + pA \cdot e^{-at} \cdot \cos(pt - \varphi) + \omega B \cdot \cos(\omega t - \psi)$$

a položíme $t = 0$ zde a ve vztahu (3.49), takže obdržíme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} y(0) &= -A \cdot \sin \varphi - B \cdot \sin \psi, \\ y'(0) &= aA \cdot \sin \varphi + pA \cdot \cos \varphi + \omega B \cdot \cos \psi. \end{aligned}$$

Tu upravíme dosazením z první rovnice do druhé za $A \cdot \sin \varphi$ na tvar

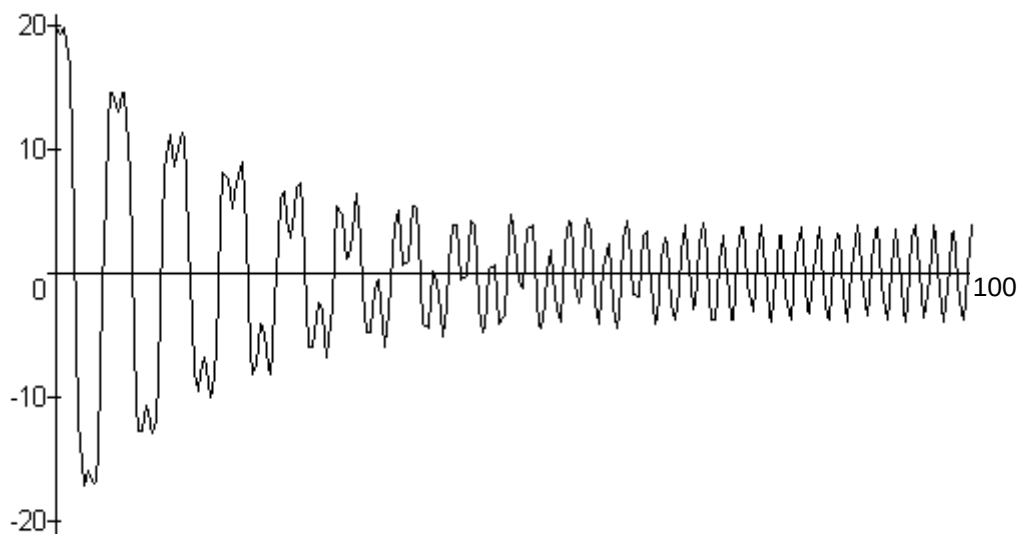
$$\begin{aligned} A \cdot \sin \varphi &= -y(0) - B \cdot \sin \psi, \\ A \cdot \cos \varphi &= \frac{1}{p} \cdot [y'(0) + a \cdot y(0) + aB \cdot \sin \psi - \omega B \cdot \cos \psi]. \end{aligned}$$

Nyní již následují obvyklé kroky: umocněním a sečtením těchto rovnic získáme vztah pro A , jejich vydělením vztah pro φ . Zde je nutno vzít v úvahu znaménka výrazů na pravých stranách výše uvedených vztahů, aby byl úhel φ správně stanoven v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Dosazení konkrétních hodnot vede k výsledkům $A \approx 23,57$, $\varphi \approx -1,02$ a definitivní tvar řešení (3.49) je pak

$$y(t) = 23,57 \cdot e^{-0,05t} \cdot \sin(t + 1,02) + 3,75 \cdot \sin(3t - 3,10) .$$

Na grafu této funkce (obr. 3.7) je dobře vidět přechod od vlastních kmitů soustavy ke stadiu, v němž již systém kmitá zcela pod vlivem nutící síly.



Obr. 3.7

Příklady k procvičení.

P3.19. Kmitavý pohyb je určen zadanou diferenciální rovnicí. Určete druh tohoto pohybu a jeho průběh v závislosti na čase pro uvedené počáteční podmínky, je-li :

- a) $4y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$
- b) $y'' + 8y' + 20y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -4;$
- c) $2y'' + 7y' + 3y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -4;$
- d) $9y'' + 6y' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0;$
- e) $y'' + 4y = 6\sin t, y(0) = 1, y'(0) = 4;$
- f) $4y'' + 4y' + 5y = 10\sin \frac{t}{2}, y(0) = 1, y'(0) = 0;$
- g) $9y'' + 4y = 4\sin \frac{2t}{3}, y(0) = 0, y'(0) = -1.$

P3.20. Určete průběh kapacitního napětí $u(t)$ v sériovém RLC obvodu se stejnosměrným vstupním napětím $u_0(t) = u_0 = konst.$, víte-li, že $R^2 < 4L/C$. Jaký bude průběh napětí pro $t \rightarrow \infty$?

Výsledky:

P3.19. a) vlastní netlumené harmonické kmity, $y = 2\sin \frac{t}{2};$

b) slabě tlumený periodický pohyb, $y = e^{-4t} \cos 2t;$

c) silně tlumený neharmonický pohyb, $y = e^{-3t} + 2e^{-\frac{t}{2}};$

d) kriticky tlumený pohyb, $y = (3+t)e^{-\frac{t}{3}};$

e) vynucené netlumené kmity, $y = \sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin t;$

f) vynucené slabě tlumené kmity, $y = 2e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{5} \sin\left(\frac{t}{2} - 0,46365\right);$

g) rezonance, $y = \sin\left(\frac{2t}{3} + \pi\right) + \frac{t}{3} \sin\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{2}\right).$

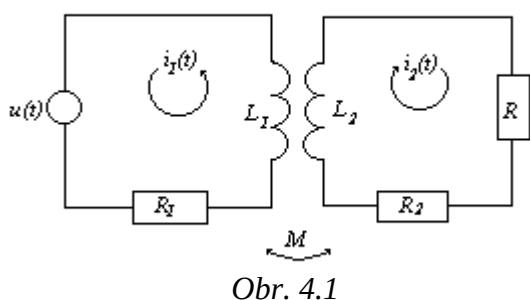
P3.20. Napětí má tlumený harmonický průběh ($u(t) \rightarrow u_0$ pro $t \rightarrow \infty$):

$$u(t) = u_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{\omega} (\lambda \cdot \sin \omega t + \omega \cdot \cos \omega t) \cdot e^{-\lambda t} \right], \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad \lambda = \frac{R}{2L}.$$

4. Soustavy diferenciálních rovnic

4.1. Základní pojmy

4.1.1. Příklad. Stanovte proudy $i_1(t)$ a $i_2(t)$ v primárním a sekundárním vinutí transformátoru při těchto zadaných parametrech (obr.4.1):



Obr. 4.1

$u(t)$ napětí na zdroji v primárním obvodu,
 R_1, R_2 ... odpor v primárním (sekundárním) obvodu,
 L_1, L_2 ... indukčnost primárního (sekundárního) vinutí,
 M vzájemná indukčnost,
 R ohmická zátěž v sekundárním obvodu.

Řešení. Na základě Kirchhoffových zákonů platí

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} + R_1 \cdot i_1(t) = u(t), \quad (4.1)$$

$$M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + (R_1 + R) \cdot i_2(t) = 0.$$

Jedná se o soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu pro proudy $i_1(t)$, $i_2(t)$. Můžeme ji upravit tak, aby každá rovnice obsahovala derivaci pouze jedné z hledaných funkcí vyjádřenou prostřednictvím nederivovaných funkcí a nezávisle proměnné (čas t):

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{L_2 R_1}{L_1 L_2 - M^2} \cdot i_1(t) + \frac{M \cdot (R_1 + R)}{L_1 L_2 - M^2} \cdot i_2(t) + \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \cdot u(t), \quad (4.2)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = \frac{M R_1}{L_1 L_2 - M^2} \cdot i_1(t) - \frac{L_1 \cdot (R_1 + R)}{L_1 L_2 - M^2} \cdot i_2(t) - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \cdot u(t),$$

popřípadě stručněji

$$\frac{di_1}{dt} = f_1(i_1, i_2, t), \quad \frac{di_2}{dt} = f_2(i_1, i_2, t).$$

Budou-li zadány proudy v jistém okamžiku t_0 hodnotami

$$i_1(t_0) = i_{10}, \quad i_2(t_0) = i_{20}, \quad (4.3)$$

představuje soustava (4.2) spolu s podmínkami (4.3) počáteční (Cauchyho) úlohu, jejímž řešením bude časový průběh proudů v primárním a sekundárním vinutí.

4.1.2. Definice. Soustavou diferenciálních rovnic 1. řádu v normálním tvaru pro neznámé funkce $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t),\end{aligned}\tag{4.4a}$$

popřípadě její vektorový zápis $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t).$ (4.4b)

Ve vztahu (4.4b) jsou vektory $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ sloupcové, tečkou je značena derivace podle nezávisle proměnné t .

Cauchyho úloha pro soustavu (4.4a), resp. (4.4b) je úloha najít řešení $\mathbf{x}(t)$ tak, aby splňovalo počáteční podmínky

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_{n0} \quad \text{neboli} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{4.5}$$

4.1.3. Ekvivalence DR n -tého řádu a soustavy n rovnic prvního řádu. Mějme diferenciální rovnici n -tého řádu

$$y^{(n)} = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, t). \tag{4.6}$$

Zavedením n nových funkcí $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ na základě vztahů

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}$$

přejde rovnice (4.6) na speciální soustavu n rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= F(x_1, x_2, \dots, x_n, t).\end{aligned}$$

Lze snadno ukázat, že je-li funkce $y(t)$ řešením rovnice (4.6), má výše uvedená soustava za řešení n -tici funkcí $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Bez obtíží lze ověřit i opačný přechod od soustavy k jediné rovnici zpětným postupem.

4.1.4. Příklad. Převeďte rovnici $\ddot{y} - t \cdot \ddot{y} + 2\dot{y} + t^2 y = 1 + t$ na soustavu rovnic prvního řádu.

Řešení. Položíme $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$; podle předchozího odvození získáme soustavu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -t^2 x_1 - 2x_2 + tx_3 + t + 1.\end{aligned}$$

4.1.5. Důsledek. Na stejném principu lze i soustavu DR vyšších řádů převést na soustavu rovnic prvního řádu. Počet nových rovnic (tj. i počet nově zavedených funkcí) bude roven celkovému řádu původní soustavy, tedy součtu nejvyšších řádů derivací neznámých funkcí.

Je zřejmé, že znalost metod řešení soustav rovnic prvního řádu umožňuje řešit i další třídy úloh - rovnice vyšších řádů a jejich soustavy.

4.1.6. Příklad. Převed'te soustavu pro neznámé funkce $y(t), z(t)$

$$\ddot{y} + \dot{z} = 4y^2,$$

$$\ddot{z} + 3z\dot{y} = 2\dot{z}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1, \dot{y}(0) = -1, z(0) = 0, \dot{z}(0) = 2$ na soustavu DR 1. řádu.

Řešení. Hledaná soustava bude tvořena čtyřmi rovnicemi pro nové neznámé $x_1, \dots, x_4$, které zavedeme například takto:

$$x_1 = y, \quad x_2 = z, \quad x_3 = \dot{y}, \quad x_4 = \dot{z}.$$

Odtud bezprostředně plynou první dvě rovnice

$$\dot{x}_1 = x_3,$$

$$\dot{x}_2 = x_4.$$

Další dvě získáme přepsáním zadané soustavy pomocí nově zavedených funkcí:

$$\dot{x}_3 = 4x_1^2 - x_4,$$

$$\dot{x}_4 = -3x_2x_3 + 2x_4.$$

Počáteční podmínky pro novou soustavu obdržíme z původních nahrazením odpovídajících funkcí v totéž bodě $t = 0$:

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = -1, \quad x_4(0) = 2.$$

4.1.7. Autonomní soustava diferenciálních rovnic se vyznačuje tím, že funkce $f_1, f_2, \dots, f_n$ na pravých stranách neobsahují explicitně nezávisle proměnnou. Její vektorové vyjádření je tedy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Ukázkou je soustava z předchozího příkladu.

4.1.8. Definice. Mějme danu soustavu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \text{kde} \quad \mathbf{f} : D \times \langle t_1, t_2 \rangle \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (4.7)$$

přičemž $\mathbf{x} \in D \subset \mathbf{R}^n$. Funkce $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ je pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ řešením soustavy (4.7), jestliže pro všechna $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$

- (1) funkce $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ mají spojité derivace $\dot{u}_i(t)$,
- (2) funkce $\mathbf{u}(t)$ vyhovuje soustavě (4.7), tj. platí $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$,
- (3) body $[\mathbf{u}, t]$ patří do definičního oboru $D \times \langle t_1, t_2 \rangle$ funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Obecným řešením soustavy (4.7) rozumíme množinu všech funkcí, které splňují podmínky (1)-(3). V tomto smyslu lze psát

$$u_i = u_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_n$ jsou reálné nebo komplexní konstanty.

4.1.9. Geometrická interpretace. Každé řešení $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ lze interpretovat jako systém parametrických rovnic

$$u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t), \quad \dots, \quad u_n = u_n(t)$$

pro **integrální křivku** neboli **stavovou trajektorii** soustavy.

Řešíme-li speciálně autonomní soustavu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, můžeme každé její řešení znázornit v n -rozměrném euklidovském prostoru se souřadným systémem $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Velmi často uvedená soustava popisuje pohyb bodu po křivce, jejíž parametrické vyjádření obdržíme jako řešení soustavy. Důsledkem této fyzikální interpretace je často používané označení **fázový prostor**. Příslušné křivky jsou pak **fázovými trajektoriemi** řešení (viz příklad 4.1.13 a zejména kap. 4.7.).

4.1.10. Věta (existence a jednoznačnost řešení SDR 1. řádu). Necht' v soustavě $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ s počátečními podmínkami $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbf{R}^n$ jsou funkce $f_i(\mathbf{x}, t)$ i jejich derivace

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

spojité na oblasti $\Omega = D \times \langle t_1, t_2 \rangle$. Pak pro libovolný bod $[\mathbf{x}_0, t_0] \in \Omega$ existuje právě jedno řešení $\mathbf{x}(t)$ dané soustavy, které vyhovuje podmínce $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Důkaz. Provádí se na principu Picardových aproximací obdobně jako u věty 1.3.7.

4.1.11. Eliminační metoda řešení soustavy DR spočívá v obrácení postupu popsaného v článku 4.1.3. Vhodnými úpravami (dosazením z jedné rovnice do další apod.) můžeme získat jedinou rovnici n -tého řádu pro jednu neznámou funkci, po jejímž vyřešení postupně určíme zbývající hledané funkce.

Použití této metody je efektivní pouze u jednoduchých soustav s malým počtem rovnic.

4.1.12. Příklad. Určete obecné řešení soustavy $\dot{x}y = 6t$, $\dot{x} - t\dot{y} = y$ pro $y > 0$ a $t > 0$.

Řešení. Tato soustava rovnic 1. řádu není v normálním tvaru, lze ji však snadno odpovídajícím způsobem upravit. Při řešení eliminační metodou to však není nezbytné, neboť můžeme z první rovnice přímo vyjádřit

$$\dot{x} = \frac{6t}{y}$$

a dosadit do druhé, která po úpravě bude rovnicí pro jednu neznámou $y(t)$:

$$t\dot{y}y + y^2 = 6t.$$

To je Bernoulliho DR prvního řádu, kterou podle kap. 2.4 substitucí $y^2 = z$, tj. $2\dot{y}y = \dot{z}$, převedeme na lineární DR pro funkci $z(t)$

$$t\dot{z} + 2z = 12t.$$

Její obecné řešení určíme například variací konstanty (kap. 2.3) s výsledkem $z(t) = \frac{C_1 + 4t^3}{t^2}$.

Po zpětné substituci bude

$$y(t) = \frac{1}{t} \sqrt{C_1 + 4t^3}.$$

Ze vztahu $\dot{x} = 6t / y$ dostáváme dosazením za y rovnicí $\dot{x}(t) = \frac{6t^2}{\sqrt{C_1 + 4t^3}}$, takže

$$x(t) = \int \frac{6t^2 dt}{\sqrt{C_1 + 4t^3}} = \sqrt{C_1 + 4t^3} + C_2.$$

Obecným řešením zadané soustavy je dvojice funkcí

$$x(t) = \sqrt{C_1 + 4t^3} + C_2, \quad y(t) = \frac{1}{t} \sqrt{C_1 + 4t^3}.$$

4.1.13. Příklad. Řešte Cauchyho úlohu pro autonomní systém rovnic $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$ s počátečními podmínkami $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$. Výsledek znázorněte ve fázové rovině.

Řešení. Dosazením z první rovnice do druhé za x_2 získáme DR 2. řádu

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0,$$

jejíž obecné řešení známým způsobem (věta 3.5.4) určíme ve tvaru

$$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t;$$

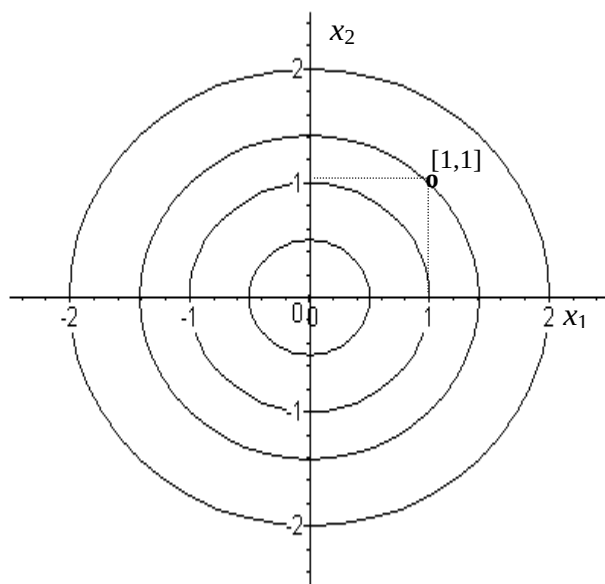
dále je

$$x_2 = \dot{x}_1 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Poslední dva vztahy představují obecné řešení zadané soustavy a můžeme z nich vyloučit parametr t umocněním a sečtením:

$$x_1^2 + x_2^2 = C_1^2 + C_2^2.$$

Je zřejmé, že se jedná o systém soustředných kružnic se středem v počátku souřadné soustavy ve fázové rovině $\langle x_1, x_2 \rangle$, jak ukazuje obr.4.2.



Obr. 4.2

Řešení Cauchyho úlohy existuje a je jednoznačné ve všech bodech prostoru $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, \infty)$, neboť pravé strany

$$f_1 = x_2, \quad f_2 = -x_1$$

jsou i se svými derivacemi spojitě na uvedené množině (věta 4.1.10). Konkrétně pro zadané počáteční podmínky vychází

$$C_1 = C_2 = 1,$$

jak určíme dosazením $t = 0$ do obecného řešení. Křivkou splňující podmínky Cauchyho úlohy je kružnice

$$x_1 = \cos t + \sin t,$$

$$x_2 = -\sin t + \cos t$$

neboli $x_1^2 + x_2^2 = 2$, která na obr.4.2. prochází bodem $[1,1]$.

4.2. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

4.2.1. Zavedení. Jsou-li v soustavě $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(t)$ funkce $f_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ lineárními formami proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, jedná se o soustavu **lineárních diferenciálních rovnic** (lineární soustavu). Zapisujeme ji ve tvaru

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\x_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\&\dots \\x_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)\end{aligned}\tag{4.8a}$$

nebo úsporným způsobem ve vektorovém tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t),\tag{4.8b}$$

kde $\mathbf{A}(t)$ je matice soustavy s prvky $a_{ij}(t)$ a $\mathbf{b}(t)$ je zadaný vektor se složkami $b_i(t)$.

Soustavu (4.8a,b) nazýváme **nehomogenní**, zatímco při $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$ hovoříme o **homogenní** soustavě lineárních diferenciálních rovnic (SLDR) a píšeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}\tag{4.9}$$

4.2.2. Existence a jednoznačnost řešení SLDR. Jsou-li funkce $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ spojité na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, pak pro každé $t_0 \in \langle t_1, t_2 \rangle$ existuje právě jedno řešení Cauchyho úlohy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.\tag{4.10}$$

Důkaz. Jde o přímý důsledek věty 4.1.10 pro obecnou soustavu, neboť v lineární soustavě je

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = a_{ij}(t) \quad \forall \quad i, j = 1, \dots, n.$$

4.2.3. Příklad. Vyšetříme existenci a jednoznačnost řešení soustavy lineárních rovnic

$$\dot{x}_1 = -(2 \cdot \operatorname{tg} t + \operatorname{cotg} t) \cdot x_1 + \frac{2}{\cos t} \cdot x_2 + \operatorname{cotg} t,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot x_1 + \operatorname{tg} t \cdot x_2 + \sin t.$$

Řešení. Funkce tvořící prvky matice soustavy a vektoru $\mathbf{b}(t) = (\operatorname{cotg} t, \sin t)^T$ mají body nespojitosti dané podmínkami $\cos t = 0$, $\sin t = 0$, což znamená, že jde o body $k \cdot \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$. Podle věty 4.2.2 existuje řešení - a to právě jedno - v každém intervalu, který neobsahuje žádný z těchto bodů.

4.3. Homogenní SLDR

4.3.1. Věta. Mějme danu homogenní lineární soustavu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$.

a) Jejím triviálním řešením je nulový vektor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b) Jsou-li $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ její libovolná řešení, pak je jejím řešením každá jejich lineární kombinace

$$C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 + \dots + C_m \mathbf{x}_m = \sum_{i=1}^m C_i \mathbf{x}_i(t).$$

Důkaz. a) Tvzení je zřejmé.

b) Chceme dokázat, že platí $\frac{d}{dt} \left(\sum_1^m C_i \mathbf{x}_i \right) = \mathbf{A} \cdot \sum_1^m C_i \mathbf{x}_i$. Protože každá funkce $\mathbf{x}_i$ je řešením, platí $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i$ a levou stranu můžeme upravovat takto:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_1^m C_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_1^m C_i \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_1^m C_i \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{A} \cdot \sum_1^m C_i \mathbf{x}_i,$$

což bylo třeba dokázat.

4.3.2. Poznámka. Z uvedeného tvrzení je zřejmé, že lineární soustavě vyhovuje nekonečně mnoho funkcí. Z nich je však lineárně nezávislý pouze konečný počet a všechna další řešení z něj můžeme odvodit, jak nyní ukážeme. Čtenáři doporučujeme, aby si pojem lineární nezávislosti funkcí oživil nahlédnutím do kapitoly 3.4.

4.3.3. Věta. Jsou-li prvky matice soustavy $\mathbf{A}(t)$, tj. funkce $a_{ij}(t)$, spojité na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, má homogenní soustava $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$ na tomto intervalu právě n lineárně nezávislých řešení.

Důkaz. Necht' je $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ soustava jednotkových vektorů v $\mathbf{R}^n$, jejichž i -tá složka je rovna jedné a ostatní jsou nulové. Jak je známo z lineární algebry, jde o lineárně nezávislé vektory, tvořící jednu z bází v $\mathbf{R}^n$. Dále mějme t_0 pevně zvolený bod v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Je zřejmé, že můžeme napsat n různých počátečních úloh

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kteří mají podle věty 4.2.2 právě jedno řešení. Označíme tato řešení $\mathbf{x}_i(t)$ a dokážeme, že jsou lineárně nezávislá. Uvažujme proto rovnost

$$C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + C_n \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0}$$

v bodě $t = t_0$:

$$C_1 \mathbf{x}_1(t_0) + C_2 \mathbf{x}_2(t_0) + \dots + C_n \mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{0}.$$

Veličinami $\mathbf{x}_i(t_0)$ jsou ovšem podle předpokladu lineárně nezávislé vektory $\mathbf{e}_i$, takže výše uvedená rovnost platí pouze pro

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0,$$

což podle definice (viz článek 3.4.1) znamená lineární nezávislost funkcí $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Je zřejmé, že každé další řešení musí být jejich netriviální lineární kombinací, takže lineárně nezávislých řešení je právě n .

4.3.4. Definice. Množinu n lineárně nezávislých řešení soustavy n lineárních diferenciálních rovnic $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$ nazýváme **fundamentálním systémem** řešení.

4.3.5. Wronského determinant (wronskián). Hledejme způsob, jak rozhodnout o lineární nezávislosti řešení, tedy o tom, zda množina řešení tvoří fundamentální systém. Vytvořme proto matici $\mathbf{X}(t)$, jejímž j -tým sloupcem je právě vektor j -tého řešení z daného systému:

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)).$$

Determinant této matice značíme $W(t)$ a nazýváme ho **Wronského determinantem (wronskiánem)** systému řešení $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$. Je tedy

$$W(t) = \det \mathbf{X}(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{n2}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \quad (4.11)$$

Následující věta je kriteriem lineární nezávislosti řešení.

4.3.6. Věta. Necht' má soustava $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$ v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ spojité koeficienty $a_{ij}(t)$ a necht' jsou funkce $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ jejími řešeními. Pak platí:

- (1) Je-li $W(t) \neq 0$ alespoň pro jedno $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, pak $\forall t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je $W(t) \neq 0$.
- (2) Řešení $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ tvoří fundamentální systém právě tehdy, je-li $W(t) \neq 0$.

Důkaz. Uvažujeme wronskián $W(t)$ jako determinant soustavy algebraických rovnic

$$C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + C_n \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0}$$

pro neznámé $C_1, \dots, C_n$. Obě tvrzení pak plynou z vlastností řešení soustav lineárních algebraických rovnic a z věty 4.3.3.

4.3.7. Příklad. Ukažme, že funkce

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cotg t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

tvoří fundamentální systém řešení homogenní soustavy z příkladu 4.2.3 pro $t \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Řešení. Jde o soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(2 \cdot \tg t + \cotg t) \cdot x_1 + \frac{2}{\cos t} \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot x_1 + \tg t \cdot x_2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dosadíme-li do ní například funkci $\mathbf{x}_1(t)$, dostáváme (v maticovém vyjádření):

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sin^2 t} \\ -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \tg t - \cotg t & \frac{2}{\cos t} \\ -\frac{\sin^2 t}{\cos t} & \tg t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cotg t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Provedeme-li násobení na pravé straně a upravíme získané výrazy, obdržíme vektor rovný levé straně. Stejným způsobem ověříme i pro funkci $\mathbf{x}_2(t)$, že soustavu splňuje, a to s výjimkou uvedených bodů.

Wronskián řešení $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ má hodnotu

$$W(t) = \begin{vmatrix} 2 \cdot \cotg t & \frac{1}{\sin t} \\ \cos t & 1 \end{vmatrix} = \cotg t.$$

Nulové hodnoty nabývá pouze v bodech $t_k = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, v nichž ovšem nejsou koeficienty matice soustavy spojité (viz příklad 4.2.3). Vidíme, že všude, kde řešení existuje, je jednoznačné a wronskián zadaných funkcí je různý od nuly. Proto podle předchozí věty tvoří tyto funkce fundamentální systém.

4.3.8. Věta (obecné řešení homogenní SLDR). Jestliže funkce $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ tvoří fundamentální systém (FS) řešení soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$ na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, pak obecným řešením této soustavy je jejich lineární kombinace

$$\mathbf{x} = C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + C_n \mathbf{x}_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i. \quad (4.13)$$

Důkaz. Stačí ukázat, že libovolné jiné řešení $\mathbf{x}^*$ lze vyjádřit pomocí funkcí FS uvedeným způsobem. Zvolme proto pevný bod $t_0 \in \langle t_1, t_2 \rangle$, pro který napíšeme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$C_1 \mathbf{x}_1(t_0) + C_2 \mathbf{x}_2(t_0) + \dots + C_n \mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{x}^*(t_0) \quad (4.14)$$

pro neznámé $C_1, \dots, C_n$. Jejím determinantem je wronskián $W(t_0)$, a protože $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ tvoří fundamentální systém, musí být $W(t_0) \neq 0$ a n -tice $C_1, \dots, C_n$ je určena jednoznačně. Levá i pravá strana (4.14) nabývají v bodě t_0 stejné hodnoty, a protože byl tento bod vybrán libovolně, platí podle věty o jednoznačnosti řešení (4.2.2) rovnost

$$\mathbf{x}^* = C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + C_n \mathbf{x}_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i$$

na celém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, což jsme měli dokázat.

4.3.9. Příklad. Zapišme obecné řešení soustavy (4.12) z příkladu 4.3.7 s funkcemi $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, které bude mít strukturu odpovídající výrazu (4.13) pro $n = 2$:

Řešení.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cotg t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.3.10. Poznámka. Jak jsme ukázali, můžeme obecné řešení kterékoli homogenní soustavy lineárních DR sestavit jako lineární kombinaci funkcí fundamentálního systému podle vztahu (4.12). Doposud jsme však neukázali, jakým způsobem můžeme FS nalézt. Obecně řečeno, nejedná se o jednoduchou úlohu, ale například pro velmi rozšířený typ soustav s konstantními koeficienty existují k určení fundamentálního systému nepříliš složité postupy, kterými se budeme zabývat v další kapitole.

4.4. Homogenní SLDR s konstantními koeficienty

4.4.1. Eulerova metoda - princip. Je-li $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ soustava s konstantními koeficienty, jsou prvky matice $\mathbf{A}$ konstanty (v našem případě reálná čísla). Podle dříve uvedených tvrzení je netriviální řešení této soustavy vždy jednoznačné. V analogii s řešením lineárních DR vyšších řádů s konstantními koeficienty budeme vyšetřovat podmínky, za kterých této soustavě bude vyhovovat funkce tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r} \cdot e^{\lambda t}, \quad (4.15)$$

kde $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ je vektor a λ parametr, které jsou zatím blíže neurčeny.

Po dosazení do soustavy budeme mít

$$\lambda \cdot \mathbf{r} \cdot e^{\lambda t} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \cdot e^{\lambda t}$$

neboli

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

kde jsme $\mathbf{E}$ označili jednotkovou matici. Vidíme, že se jedná o homogenní soustavu algebraických rovnic pro neznámé složky $r_1, r_2, \dots, r_n$ vektoru $\mathbf{r}$, která má netriviální řešení pouze v případě, že je její determinant roven nule:

$$|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}| = 0, \quad (4.17a)$$

rozepsáno

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.17b)$$

Tím jsme získali **charakteristickou rovnici** soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Jejími kořeny λ jsou **vlastní hodnoty (vlastní čísla)** matice soustavy $\mathbf{A}$ a těm podle zákonitostí známých z lineární algebry odpovídají **vlastní vektory** této matice. Protože vlastní čísla mohou být reálná nebo komplexní, jednoduchá nebo násobná, bude třeba se jednotlivými případy zabývat zvlášť.

4.4.2. Eulerova metoda - jednoduchá vlastní čísla. Nejjednodušší situace nastane, nemá-li charakteristická rovnice (4.17a) násobné kořeny. Pak každému vlastnímu číslu λ z n -tice $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ odpovídá jeden vlastní vektor $\mathbf{r}_i$ jako řešení soustavy (4.16) a následně funkce tvaru (4.15), která je řešením soustavy. Protože různým vlastním číslům přísluší lineárně nezávislé vlastní vektory, jsou získané funkce

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{r}_i \cdot e^{\lambda_i t} \quad (4.18)$$

rovněž lineárně nezávislé a tvoří fundamentální systém řešení homogenní soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Podle věty 4.3.8 zapíšeme její obecné řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} = C_1 \mathbf{r}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{r}_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n \mathbf{r}_n \cdot e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{r}_i \cdot e^{\lambda_i t}. \quad (4.19)$$

4.4.3. Příklad. Najděte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 - 10x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_2 + 2x_3. \end{aligned}$$

Řešení. Popíšeme stručně jednotlivé kroky podle výše uvedeného postupu.

1) Charakteristická rovnice

$$|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & -10 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$$

má tři různé reálné kořeny (vlastní čísla) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$.

2) Pro $\lambda_1 = 2$ je vlastní vektor $\mathbf{r}_1$ řešením soustavy (4.16) ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} -r_{12} &= 0, \\ r_{11} - 10r_{13} &= 0, \\ -r_{12} &= 0; \end{aligned}$$

matice této soustavy má hodnost 2, proto lze jednu ze složek volit (např. $r_{13} = 1$), takže z prostřední rovnice je $r_{11} = 10$ a hledaný vlastní vektor bude $\mathbf{r}_1 = (10, 0, 1)^T$. Vlastní vektory odpovídající dalším dvěma vlastním číslům najdeme obdobným způsobem s tímto výsledkem:

$$\mathbf{r}_2 = (1, 3, 1)^T, \quad \mathbf{r}_3 = (1, -3, 1)^T.$$

3) Fundamentální systém je tvořen funkcemi $\mathbf{r}_1 \cdot e^{2t}$, $\mathbf{r}_2 \cdot e^{-t}$, $\mathbf{r}_3 \cdot e^{5t}$, takže obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5t}, \quad \text{resp.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 10 \cdot C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot e^{5t}, \\ x_2 &= 3 \cdot C_2 \cdot e^{-t} - 3 \cdot C_3 \cdot e^{5t}, \\ x_3 &= C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot e^{5t}. \end{aligned}$$

4.4.4. Poznámka (případ komplexních vlastních čísel). Protože se v našem výkladu zabýváme pouze soustavami s reálnými koeficienty a_{ij} , budou případné komplexní kořeny charakteristické rovnice po dvou komplexně sdružené:

$$\lambda = \alpha + \beta i, \quad \bar{\lambda} = \alpha - \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Prísluší jim také komplexně sdružené vlastní vektory $\mathbf{r}$, $\bar{\mathbf{r}}$ a do fundamentálního systému pak zařadíme dvojici funkcí

$$\mathbf{r} \cdot e^{\lambda t}, \quad \bar{\mathbf{r}} \cdot e^{\bar{\lambda} t}.$$

Budeme-li však chtít ve výsledku pouze reálné výrazy, můžeme (stejně jako v kapitole 3.5) použít Eulerovy vzorce a za FS řešení soustavy vzít funkce

$$\mathbf{x}_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{r} \cdot e^{\lambda t}), \quad \mathbf{x}_2 = \operatorname{Im}(\mathbf{r} \cdot e^{\lambda t}),$$

kde Re , Im představují reálnou a imaginární část komplexní veličiny.

4.4.5. Příklad. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - 4x_2, \\ \dot{x}_2 &= 9x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

Řešení. Charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 9 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 40 = 0$$

má kořeny $\lambda_{1,2} = 2 \pm 6i$. Určíme vlastní vektor například pro $\lambda = 2 + 6i$:

$$\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -6i & -4 \\ 9 & -6i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3i & 2 \\ 3 & -2i \end{pmatrix} \sim (3i \ 2),$$

takže $\mathbf{r} = (2, -3i)^T$. Nyní upravíme získané řešení SDR takto:

$$\mathbf{r}.e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3j \end{pmatrix}.e^{(2+6j)t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3j \end{pmatrix}.e^{2t} \cdot (\cos 6t + j.\sin 6t) = \begin{pmatrix} 2 \cos 6t + 2j.\sin 6t \\ 3 \sin 6t - 3j.\cos 6t \end{pmatrix}.e^{2t}.$$

Funkce fundamentálního systému získáme jako reálnou a imaginární část tohoto výsledku, takže můžeme zapsat výsledné obecné řešení soustavy:

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot \text{Re}(\mathbf{r} \cdot e^{j\omega t}) + C_2 \cdot \text{Im}(\mathbf{r} \cdot e^{j\omega t}) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos 6t \\ 3 \sin 6t \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \sin 6t \\ -3 \cos 6t \end{pmatrix} \cdot e^{2t}.$$

4.4.6. Eulerova metoda - násobná vlastní čísla. Necht' má charakteristická rovnice homogenní lineární SDR m -násobný kořen λ ($m > 1$). Jak víme, musí mu ve FS odpovídat m lineárně nezávislých funkcí, což lze zajistit například tak, že odpovídající součást obecného řešení bude mít tvar

$$(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 t + \mathbf{r}_3 t^2 + \dots + \mathbf{r}_m t^{m-1}).e^{\lambda t}, \quad (4.20)$$

kde m -tice vektorů $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ je lineárně nezávislá a zahrnuje již ve svých složkách m konstant $C_1, C_2, \dots, C_m$. Tato volba odpovídá postupu popsanému již ve větě 3.5.8 při výkladu o DR vyšších řádů s konstantními koeficienty.

Postup při určování vektorů $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ spočívá v tom, že výraz (4.20) dosadíme do soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, takže bude

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r}_3t + 3\mathbf{r}_4t^2 + \dots + (m-1)\mathbf{r}_mt^{m-2}).e^{\lambda t} + \lambda(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2t + \mathbf{r}_3t^2 + \dots + \mathbf{r}_mt^{m-1}).e^{\lambda t} = \\ & = \mathbf{A}.(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2t + \mathbf{r}_3t^2 + \dots + \mathbf{r}_mt^{m-1}).e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

a porovnáme výrazy u stejných mocnin t (činitelem $e^{\lambda t}$ lze rovnici dělit):

[illegible]

Získali jsme soustavu $m \cdot n$ algebraických rovnic pro m vektorů o n složkách. Tyto rovnice nejsou nezávislé, protože hodnota matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ je menší než n . Při výpočtu proto vhodným způsobem volíme m konstant $C_1, C_2, \dots, C_m$, jejichž prostřednictvím vyjádříme složky vektorů $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$. Názorně je tento postup ukázán v následujícím příkladu.

4.4.7. Příklad. Řešte homogenní soustavu s maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Charakteristická rovnice

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0$$

má trojnásobný kořen $\lambda = 2$, přičemž matice

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

má hodnotu 2. Obecné řešení budeme hledat ve tvaru $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 t + \mathbf{r}_3 t^2) \cdot e^{2t}$, kde vektory $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ splňují podle (4.21) soustavu devíti rovnic

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z posledního systému je ihned vidět, že $r_{32} = r_{33} = 0$, takže při volbě $r_{31} = C_3$ dostáváme vektor $\mathbf{r}_3 = (C_3, 0, 0)^T$. Jeho složky jsou pravými stranami prostřední soustavy, z níž snadno vypočteme $r_{22} = -r_{23} = C_3$ a zvolíme $r_{21} = 2C_2$. Získaný vektor $\mathbf{r}_2 = (2C_2, C_3, -C_3)^T$ použijeme v první soustavě, kde položíme $r_{11} = C_1$ a dopočítáme $r_{12} = C_2$, $r_{13} = C_3 - C_2$. Poslední z hledaných vektorů je tedy $\mathbf{r}_1 = (C_1, C_2, C_3 - C_2)^T$.

Výsledné obecné řešení získáme dosazením vypočtených vektorů do (4.20):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 - C_2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + \begin{pmatrix} 2C_2 \\ C_3 \\ -C_3 \end{pmatrix} \cdot t e^{2t} + \begin{pmatrix} C_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t^2 e^{2t},$$

popřípadě (pro zvýraznění funkcí fundamentálního systému)

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot e^{2t}.$$

4.4.8. Použití maticových funkcí. Viděli jsme, že Eulerova metoda řešení homogenních soustav s konstantními koeficienty vyžaduje znalost vlastních čísel a vlastních vektorů matice soustavy, jejichž nalezení je - zejména pro rozsáhlejší systémy - velmi pracné. Zmíníme se proto stručně o jedné z dalších metod, u níž hledání vlastních čísel není potřebné.

Mějme soustavu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ neboli

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

Provedeme-li formálně separaci "proměnných" a integraci, obdržíme pro neznámý vektor $\mathbf{x}$ výraz

$$\mathbf{x} = e^{At} \cdot \mathbf{C}, \quad (4.22)$$

kde $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^T$ je konstantní sloupkový vektor a e^{At} je tzv. maticová exponenciální funkce, jejíž vlastnosti jsou stručně zmíněny v poznámce 4.4.9. Lze ukázat, že funkce (4.22) je skutečně obecným řešením výchozí soustavy (viz např. [Ku]).

4.4.9. Maticová exponenciální funkce je definována pro libovolnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ vztahem

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k, \quad (4.23)$$

kde $\mathbf{E} = \mathbf{A}^0$ je jednotková matice. Pro každé reálné t můžeme zapsat řadu

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k, \quad (4.24)$$

která absolutně konverguje pro libovolnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$.

Konstrukce matice e^{At} výpočtem je obecně možná jen ve tvaru výše uvedené řady, což je (bez použití počítače) pracné i při nevelkém počtu členů, zmíníme se však o dvou případech, kdy je výpočet jednoduchý.

(1) Je-li $\mathbf{A}$ diagonální matice, je její k -tá mocnina opět diagonální matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^k \end{pmatrix},$$

V důsledku toho je

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

(2) Jsou-li matice $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ komutativní, tj. $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$, pak platí $e^{\mathbf{P}} \cdot e^{\mathbf{Q}} = e^{\mathbf{P}+\mathbf{Q}}$. Bude-li proto ve (4.24) $\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$ s komutujícími maticemi $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, můžeme psát

$$e^{At} = e^{\mathbf{P}t} \cdot e^{\mathbf{Q}t}; \quad (4.26)$$

složitost výpočtu na pravé straně můžeme ovlivnit tvarem matic $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$.

4.4.10. Příklad. Hledejme řešení soustavy s maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. V tomto případě je výhodné rozepsat matici $\mathbf{A}$ na součet dvou matic, z nichž jedna je diagonální:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále se dá snadno ukázat, že $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$, a proto podle (4.26) bude

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{P}t} e^{\mathbf{Q}t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{E} + \mathbf{Q}t + \mathbf{Q}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{Q}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right).$$

Pro první maticovou exponenciální funkci jsme použili (4.25), ve druhém případě obdržíme

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^3 = \mathbf{Q}^4 = \dots = \mathbf{O} \quad (\text{nulová matice}),$$

takže

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= e^{2t} \cdot \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{E} + \mathbf{Q}t + \mathbf{Q}^2 \frac{t^2}{2!} \right) = \\ &= e^{2t} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{t^2}{2} \right] = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní již napíšeme obecné řešení podle (4.22):

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{C} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}.$$

4.5. Nehomogenní lineární soustavy

4.5.1. Věta (struktura řešení). Mějme danu nehomogenní soustavu o n rovnicích

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (4.27)$$

mající spojité koeficienty na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Pak její obecné řešení má tvar

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}(t), \quad (4.28)$$

kde $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \dots, n$ jsou funkce fundamentálního systému homogenní soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$ a $\mathbf{v}(t)$ je libovolný partikulární integrál nehomogenní soustavy na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Důkaz. Podle předpokladu je $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{b}$, takže vzhledem k linearitě diferencování bude

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}(t) \right] = \sum_{i=1}^n C_i \dot{\mathbf{x}}_i + \dot{\mathbf{v}} =$$

$$= \mathbf{A} \cdot \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \left(\sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i + \mathbf{v} \right) + \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

4.5.2. Metoda variace konstant se v případě nehomogenních lineárních soustav zakládá na stejném principu jako u lineárních DR (kap.3.6). Předpokládejme, že známe FS a tedy i obecné řešení homogenní soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$ příslušné k soustavě (4.27), které označíme a zapíšeme obvyklým způsobem:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i(t) . \quad (4.29)$$

Chceme-li najít řešení $\mathbf{x}(t)$ nehomogenní soustavy, budeme považovat veličiny C_i za funkce nezávisle proměnné t :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n C_i(t) \cdot \mathbf{x}_i(t) . \quad (4.30)$$

Tvar funkcí $C_i(t)$ určíme z požadavku, aby $\mathbf{x}(t)$ vyhovovalo zadané nehomogenní soustavě:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n C_i(t) \cdot \mathbf{x}_i(t) \right] = \mathbf{A}(t) \cdot \sum_{i=1}^n C_i(t) \cdot \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{b}(t) ,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^n \left[\dot{C}_i(t) \cdot \mathbf{x}_i(t) + C_i(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n C_i(t) \cdot \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{b}(t) .$$

Protože na levé straně je ve druhém členu $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}_i$ (jedná se o FS), obdržíme po úpravě soustavu algebraických rovnic pro derivace funkcí $C_i(t)$:

$$\sum_{i=1}^n \dot{C}_i(t) \cdot \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{b}(t) .$$

Jejím determinantem je wronskián fundamentálního systému, který je jistě nenulový, takže tato soustava má právě jedno řešení, které určíme pomocí Cramerových vzorců:

$$\dot{C}_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, n ,$$

kde $W_i(t)$ je determinant, který obdržíme z wronskiánu $W(t)$ fundamentálního systému nahrazením i -tého sloupce sloupcovým vektorem $\mathbf{b}(t)$.

Integrací předchozích vztahů dostáváme hledané funkce

$$C_i(t) = \int \frac{W_i(t)}{W(t)} dt + K_i, \quad i = 1, 2, \dots, n ,$$

přičemž K_i jsou reálné konstanty. Konečně dosazením do (4.30) získáme obecné řešení nehomogenní soustavy:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \left[\int \frac{W_i(t)}{W(t)} dt + K_i \right] \mathbf{x}_i(t) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot \mathbf{x}_i(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i(t) \cdot \int \frac{W_i(t)}{W(t)} dt , \quad (4.32)$$

v němž druhý ze sčítanců představuje partikulární integrál $\mathbf{v}(t)$ uvedený ve tvrzení 4.5.1.

4.5.3. Příklad.

Určete obecné řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t}.$$

Řešení. 1) Pro homogenní soustavu dostáváme

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \text{dvojnásobné vlastní číslo } \lambda = 3.$$

Její obecné řešení má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} + r_{21}t \\ r_{12} + r_{22}t \end{pmatrix} \cdot e^{3t},$$

kde složky vlastních vektorů stanovíme podle 4.4.6. nebo 4.4.8. Výsledkem bude výraz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_1 - C_2 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + \begin{pmatrix} C_2 \\ -C_2 \end{pmatrix} t \cdot e^{3t} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 - t \end{pmatrix} \cdot e^{3t}. \quad (4.33)$$

Druhý z uvedených tvarů je vhodnější, neboť je z něj bezprostředně patrný fundamentální systém.

2) Variace konstant se opírá o výpočet wronskiánu FS

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ -1 & -1 - t \end{vmatrix} \cdot e^{6t} = -e^{6t}$$

a dále determinantů

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 8 & t \\ 2 & -1 - t \end{vmatrix} \cdot e^{-2t} e^{3t} = -(8 + 10t) \cdot e^t, \quad W_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot e^{-2t} e^{3t} = 10 \cdot e^t.$$

Podle 4.5.2. vypočteme

$$C_1(t) = \int \frac{W_1(t)}{W(t)} dt = \int (8 + 10t) \cdot e^{-5t} dt = -2 \cdot (1 + t) \cdot e^{-5t} + K_1,$$

$$C_2(t) = \int \frac{W_2(t)}{W(t)} dt = -10 \int e^{-5t} dt = 2 \cdot e^{-5t} + K_2.$$

3) Na základě formule (4.32) vytvoříme obecné řešení nehomogenní soustavy:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= K_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + K_2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 - t \end{pmatrix} \cdot e^{3t} - 2(1 + t) \cdot e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + 2e^{-5t} \begin{pmatrix} t \\ -1 - t \end{pmatrix} \cdot e^{3t} = \\ &= K_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + K_2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 - t \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.5.4. Poznámky. a) Metoda variace konstant se obvykle vyznačuje velkou pracností. Proto může být i u soustav výhodné použít případného speciálního tvaru "pravých stran", tj. složek vektoru $\mathbf{b}(t)$, podle stejného principu, jaký jsme aplikovali v kapitole 3.7. Pro ilustraci tohoto postupu uvádíme příklad 4.5.5.

b) Nalezení fundamentálního systému homogenních soustav v uvedených postupech nelze obejít, pokud nezvolíme například eliminační metodu.

4.5.5. Příklad. Řešme soustavu z příkladu 4.5.3 jako úlohu se speciální pravou stranou.

Řešení. Víme podle 4.5.1, že hledaný výsledek bude součtem obecného řešení homogenní soustavy (4.33) a některého partikulárního integrálu $\mathbf{v}(t)$ nehomogenní soustavy, který v našem případě bude odpovídat vektoru

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 8 \cdot e^{-2t} \\ 2 \cdot e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \cdot e^{-2t} \\ v_2 \cdot e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Koeficienty v_1, v_2 musíme určit dosazením funkce $\mathbf{v}(t)$ do nehomogenní soustavy:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{b} \quad \text{neboli} \quad \begin{pmatrix} -2v_1 \\ -2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix},$$

když jsme rovnici vydělili výrazem e^{-2t} . Snadno zjistíme, že tato soustava algebraických rovnic má řešení $v_1 = -2$, $v_2 = 0$. Je tedy

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t}$$

a konečný tvar hledaného řešení je totožný s výsledkem (4.34).

Příklady k procvičení

P4.1. Zadanou úlohu vyjádřete soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu v normálním tvaru:

a) $y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(t_0) = 2, \quad y'(t_0) = -3;$

b) $y'' + t \cdot z' + t^2 y = \sin t, \quad z'' - 2t \cdot y' + z = 0.$

P4.2. Je dána soustava $\dot{y} = y \cdot \sqrt{1 - z^2}, \quad \dot{z} = \arcsin y$ pro funkce $y = y(t), z = z(t)$. Vyšetřete množinu, na které její řešení existuje a je jednoznačné.

P4.3. Řešte eliminační metodou:

a) $\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - x_1 + 6x_2 = -e^{2t},$
 $\dot{x}_2 + x_1 - x_2 = e^{2t}.$

b) $\dot{x}_1 = x_1 \cdot \operatorname{tg} t - (\cos t + \sin t \cdot \operatorname{tg} t) \cdot x_2,$
 $\dot{x}_2 = x_1 \cdot \cos t.$

P4.4. Rozhodněte, zda uvedené dvojice funkcí tvoří fundamentální systém řešení soustavy $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -4x_1$.

a) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 + \cos 4t \\ -2 \sin 4t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b)} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix},$

c) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$

P4.5. Ověřte, že vektorové funkce

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -\operatorname{tg} t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

jsou řešením soustavy z příkladu P4.3b) a vypočtěte příslušný wronskián. Tvoří tyto funkce (pro přípustné hodnoty t) fundamentální systém řešení?

P4.6. Řešte soustavy s konstantními koeficienty:

a) $\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= 3x + 4y \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= -x + 4y \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \dot{x} &= x - 3y \\ \dot{y} &= 3x + y \end{aligned}$

P4.7. Určete obecné řešení soustav:

a) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= 6x_1 - 6x_2 + 5x_3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 &= 3x_1 + x_3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 &= 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 6\dot{x}_1 &= x_1 + 7x_2 - 5x_3 \\ 2\dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_3 \\ 3\dot{x}_3 &= x_1 - 2x_2 + x_3 \end{aligned}$

P4.8. Řešte příklad 4.4.10 Eulerovou metodou a porovnejte přesnost výpočtu s metodou uvedenou v textu.

P4.9. Najděte řešení nehomogenních soustav (t je nezávisle proměnná):

a) $\begin{aligned} \dot{x} &= y + 2e^t \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \dot{x} &= y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \quad x(0) = 2 \\ \dot{y} &= -x + \operatorname{tg} t, \quad y(0) = -2 \end{aligned}$

P4.10. Je dána soustava $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ s maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte její řešení pro zadané pravé strany:

a) $\mathbf{b} = (0, -\sin 2t, 1)^T,$

b) $\mathbf{b} = (1, 0, -1)^T$

Výsledky:

P4.1. a) $\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = -5x_1 + 4x_2$$

$$x_1(t_0) = 2, \quad x_2(t_0) = -3$$

b) $\dot{x}_1 = x_3$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -t^2 x_1 - t \cdot x_4 + \sin t$$

$$\dot{x}_4 = 2t \cdot x_3 - x_2$$

P4.2. $M = \{[z, y] \in \mathbb{R}^2, |y| < 1, |z| < 1\}$

P4.3. a) $x_1 = -4C_1 e^{5t} + 2C_2 e^{-t} + \frac{11}{9} e^{2t}, \quad x_2 = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} - \frac{2}{9} e^{2t}$

b) $x_1(t) = -C_1 \cdot \operatorname{tg} t + C_2, \quad x_2(t) = -C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t, \quad t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

P4.4. a) ne, b) ano, c) ne

P4.5. $W(t) = -1/\cos t$, funkce tvoří fundamentální systém

P4.6.

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix} \cdot e^{3t}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos 3t \\ e^t \cdot \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \cdot \sin 3t \\ -e^t \cdot \cos 3t \end{pmatrix}$

P4.7. a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3 \cos 2t \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix} \cdot e^t$

c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 + 2C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{3t}$

d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \cos t - \sin t \\ 2 \cos t + 3 \sin t \\ 3 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos t - 5 \sin t \\ -3 \cos t + 2 \sin t \\ 2 \cos t + 3 \sin t \end{pmatrix}$

P4.9. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t e^t$

b) $x = -4 \cdot \sin t + \operatorname{tg} t, \quad y = -4 \cdot \cos t + 2$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + \begin{pmatrix} \frac{49}{4} - \frac{23}{2}t + \frac{9}{2}t^2 \\ \frac{13}{4} - \frac{7}{2}t + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}$

P4.10. $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}(t)$;

$\hat{\mathbf{x}} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a) \quad v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{1}{2} \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b) \quad v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -t-1 \\ -1 \end{pmatrix} .$

4.6. Základy teorie stability

4.6.1. Závislost řešení na počátečních podmínkách. Uvažujme systém, jehož chování je popsáno soustavou diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4.36)$$

s počátečními podmínkami $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Může jít například o elektrický obvod, ekologický systém, mechanickou soustavu a podobně; nezávisle proměnnou t je obvykle čas.

Vstupní data, tj. komponenty vektoru $\mathbf{x}_0$, bývají v praxi zatížena chybou v důsledku měření nebo odhadu, a proto se nabízí otázka, zda a jak nevelká změna těchto dat ovlivní chování systému neboli řešení soustavy (4.36). Rovněž může být užitečné zjišťovat, jak systém funguje, nabývá-li t libovolně velkých hodnot. Těmito problémy se zabývá teorie stability, jejíž základní pojmy nyní vyložíme.

4.6.2. Definice. Předpokládejme, že Cauchyho úloha

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t_0 > T \quad (4.37)$$

má na intervalu $\langle T, \infty \rangle$ jediné řešení $\mathbf{x}(t)$.

- (1) Řešení $\mathbf{x}(t)$ se nazývá **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolné další řešení $\mathbf{y}(t)$ splňující podmínku $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ platí:

$$\forall t \geq t_0: \quad |\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon. \quad (4.38)$$

- (2) Řešení $\mathbf{x}(t)$ se nazývá **asymptoticky stabilní**, je-li stabilní a platí-li dále:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| = 0, \text{ kde } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}. \quad (4.39)$$

- (3) Řešení $\mathbf{x}(t)$, které není stabilní, se nazývá **nestabilní**.

4.6.3. Poznámky. a) Zavedený pojem stability se nazývá **Ljapunovská stabilita** podle významného ruského matematika Ljapunova.

b) Definiční vztah (4.38) vyjadřuje v podstatě skutečnost, že pro stabilní systém odpovídají malým změnám počátečních podmínek malé změny řešení v celém definičním oboru.

c) Stabilitu lze vyšetřovat nejen u soustav, ale rovněž u jednotlivých diferenciálních rovnic. Blíže k této problematice viz například v [Na].

4.6.4. Příklad. Vyšetřete stabilitu řešení počáteční úlohy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned} \quad \text{pro} \quad x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}.$$

Řešení. Eliminační nebo Eulerovou metodou obdržíme pro zadané počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{01} \cdot \cos t - x_{02} \cdot \sin t, \\ x_2(t) &= x_{01} \cdot \sin t + x_{02} \cdot \cos t. \end{aligned}$$

Stabilitu tohoto řešení budeme vyšetřovat podle definice 4.6.2. Uvažujme proto další řešení této soustavy $\mathbf{y}(t)$, které pro podmínky $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ můžeme zapsat stejným způsobem:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= y_{01} \cdot \cos t - y_{02} \cdot \sin t, \\y_2(t) &= y_{01} \cdot \sin t + y_{02} \cdot \cos t.\end{aligned}$$

Rozdíl v zadání počátečních podmínek vyjádříme jako velikost rozdílu vektorů

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| = \sqrt{(x_{01} - y_{01})^2 + (x_{02} - y_{02})^2}.$$

Pro rozdíl řešení platí obdobně

$$\begin{aligned}|\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \\&= \sqrt{[(x_{01} - y_{01}) \cdot \cos t + (-x_{02} + y_{02}) \cdot \sin t]^2 + [(x_{01} - y_{01}) \sin t + (x_{02} - y_{02}) \cdot \cos t]^2} = \\&= \dots = \sqrt{(x_{01} - y_{01})^2 + (x_{02} - y_{02})^2} = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|.\end{aligned}$$

To ovšem znamená, že pro libovolně zvolené číslo $\varepsilon > 0$ můžeme určit $\delta > 0$ (zde přímo $\delta = \varepsilon$) tak, že pro každé $t > t_0 = 0$ bude platit

$$|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon = \delta.$$

Tím je potvrzena stabilita řešení a nyní ještě ukážeme, že nejde o stabilitu asymptotickou. Je totiž rozporu s bodem (2) v definici 4.6.2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| \neq \mathbf{0}.$$

4.6.5. Problematika autonomních soustav. Jak víme z kapitoly 4.1, rozumíme **autonomní soustavou** diferenciálních rovnic 1. řádu každou soustavu ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (4.40)$$

Koncový bod vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ můžeme považovat za bod **trajektorie ve fázovém prostoru** se souřadnicemi $x_1, \dots, x_n$. I nadále budeme v této kapitole ztotožňovat body fázového prostoru s koncovými body vektorů, s nimiž pracujeme.

Všimněme si bodů, v nichž je systém popsán soustavou v rovnováze (v klidovém stavu). Jsou charakterizovány podmínkou stacionarity

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{neboli (podle (4.40))} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.41)$$

a nazývají se **body rovnováhy** autonomní soustavy (4.40). Problematika jejich vyšetřování je z aplikačního hlediska velmi cenná, vzhledem k jejímu rozsahu a náročnosti však v těchto skriptech uvádíme pouze některé aspekty.

Jedním z důležitých poznatků je možnost studovat problém **stability řešení soustavy**

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (4.42)$$

jako úlohu **stability počátku** coby bodu rovnováhy jisté příbuzné soustavy. Uvažujme libovolné řešení $\mathbf{v}(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, pro které platí $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{v})$, a provedme v původní soustavě substituci $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v}$. Pak bude platit

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{v}).$$

Označíme-li

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{v}),$$

přechází soustava $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ na úlohu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}. \quad (4.43)$$

Tato nová soustava má triviální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, na které se ukázanou transformací zobrazuje řešení $\mathbf{v}$ původní soustavy. To však znamená, že vyšetříme-li vlastnosti triviálního řešení neboli stabilitu bodu rovnováhy úlohy (4.43), budou z hlediska stability stejné jako vlastnosti řešení $\mathbf{v}(t)$ v kterémkoli bodě intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Omezíme-li se na nejjednodušší typ autonomní soustavy, kterou je lineární homogenní soustava s konstantními koeficienty nám již známého tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

jsou její body rovnováhy podle (4.41) řešeními soustavy algebraických rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

Jak je známo z teorie soustav lineárních algebraických rovnic, jedná se o bod $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (počátek souřadného systému) jako triviální řešení a a případně o další množiny bodů, má-li tato soustava netriviální řešení (v případě, že $\det \mathbf{A} = 0$).

4.7. Fázový obraz řešení homogenní LSDR 2. řádu

4.7.1. Vlastnosti matice soustavy. Mějme soustavu druhého řádu s konstantními koeficienty $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ neboli

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad \text{s maticí} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Určíme-li vlastní čísla matice $\mathbf{A}$, nastane právě jeden z těchto případů:

- (A) $\det \mathbf{A} \neq 0$ (regulární soustava - nenulová vlastní čísla)
 - (1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dvě různá reálná vlastní čísla,
 - (2) $\lambda_1 = \lambda_2$ dvojnásobné reálné vlastní číslo,
 - (3) $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i = \bar{\lambda}_1$ komplexně sdružená vlastní čísla.
- (B) $\det \mathbf{A} = 0$ (singulární soustava - alespoň jedno vlastní číslo je rovno nule)
 - (1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,
 - (2) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$.

Budeme se v první řadě zabývat typem trajektorií, které jsou znázorněním obecného řešení ve fázové rovině, tj. v systému se souřadnicemi x_1, x_2 . Dále posoudíme charakter bodů rovnováhy a také jejich stabilitu na základě poznatků z předchozí kapitoly.

Poznamenáváme, že v každé z diskutovaných možností budeme vycházet z tzv. **Jordanova normálního tvaru matice** soustavy. Na ten lze matici $\mathbf{A}$ tvaru (4.44) převést vhodnými transformacemi [Ku], [Pi].

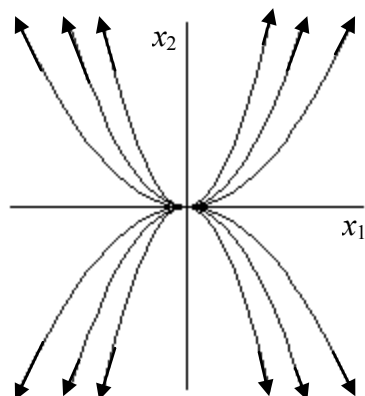
4.7.2. Regulární případy. Má-li matice soustavy nenulový determinant, má systém popsany soustavou (4.44) jediný bod rovnováhy $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (triviální řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$).

(A1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$

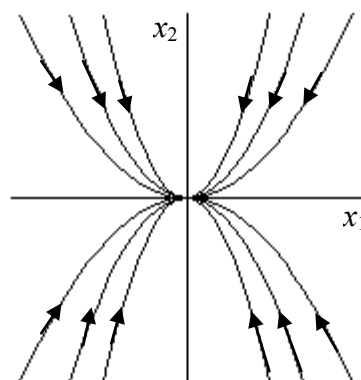
$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ x_2 &= C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Vyloučením parametru t z obecného řešení obdržíme rovnici systému křivek ve fázové rovině, jejichž grafy jsou paraboly na obr. 4.3:

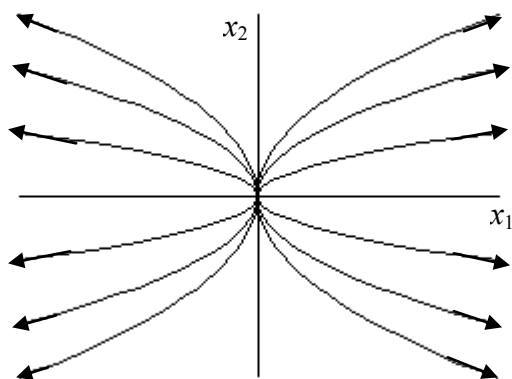
$$x_2 = C_2 \cdot \left(\frac{x_1}{C_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (4.46)$$



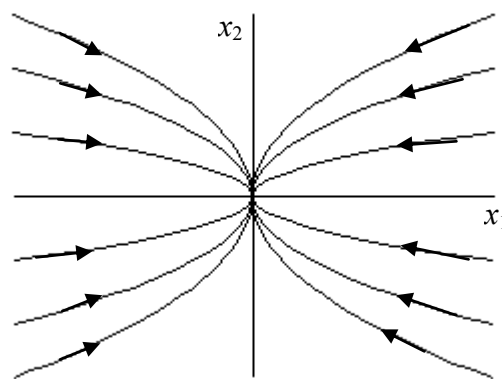
a) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ (nestabilní uzel)



c) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (asymptoticky stabilní uzel)



b) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ (nestabilní uzel)



c) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (asymptoticky stabilní uzel)

Obr. 4.3

Je-li znaménko obou vlastních čísel stejné, je exponent kladný a jedná se o **zobecněné mocninné funkce**. Bod rovnováhy (počátek) se v tomto případě nazývá **uzel**.

Mají-li vlastní čísla různá znaménka, je exponent λ_2 / λ_1 ve (4.46) záporný, a proto jsou fázovými trajektoriemi **hyperbolické křivky** (obr. 4.4). Bod rovnováhy v počátku se v tomto případě nazývá **sedlo**.

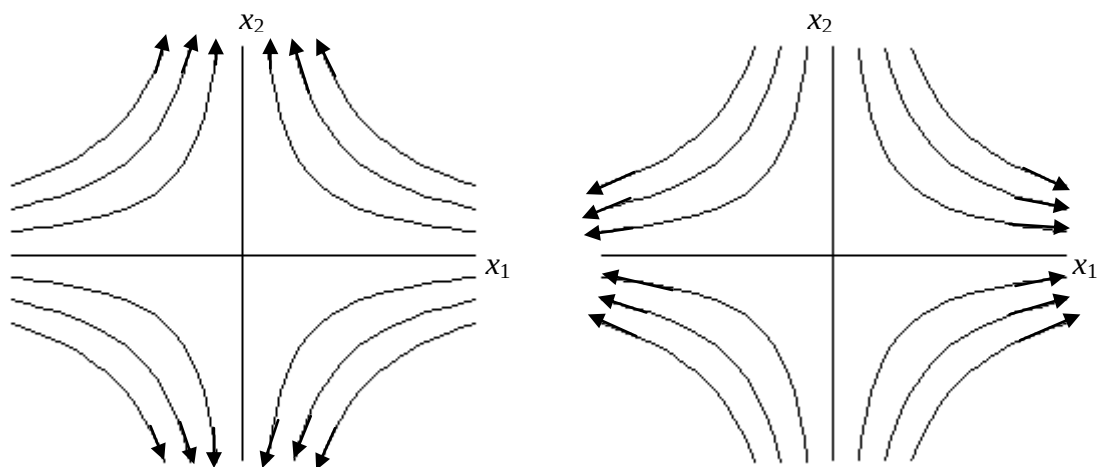
Dále snadno ověříme, že soustava je

- asymptoticky stabilní, jsou-li obě vlastní čísla záporná (obr.4.3c,d), neboť pak bude

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0 ;$$

- nestabilní, je-li alespoň jedno z vlastních čísel kladné (obr.4.3a,b a obr.4.4), protože odpovídající exponenciální funkce bude mít nevlastní limitu.

V obrázcích je stabilita (nestabilita) vyznačena na trajektoriích šipkami směřujícími k bodu rovnováhy, resp. od něj.



a) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (nestabilní sedlo)

b) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ (nestabilní sedlo)

Obr. 4.4

(A2) $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$

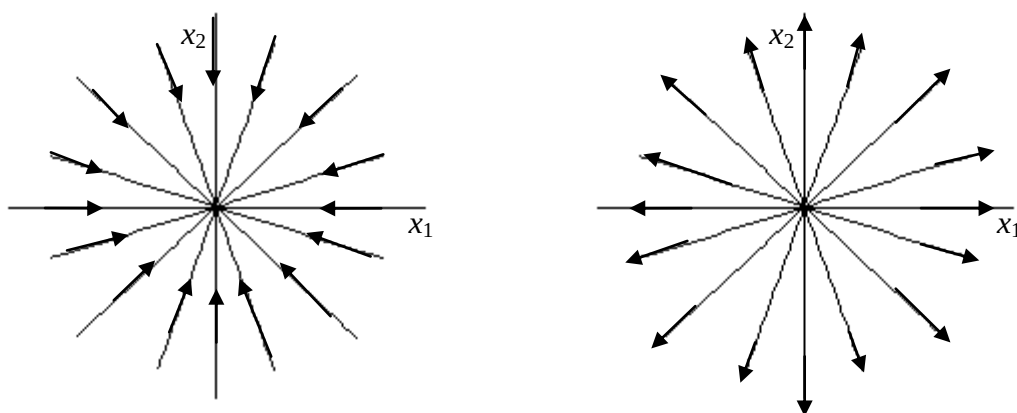
$$(a) \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = C_1 \cdot e^{\lambda t} \\ x_2 = C_2 \cdot e^{\lambda t} \end{matrix} \Rightarrow x_2 = \frac{C_2}{C_1} x_1 \quad (4.47)$$

Fázovými trajektoriemi jsou **přímky procházející počátkem** (bodem rovnováhy) na obr. 4.5a,b.

$$(b) \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{\lambda t} \\ x_2 = C_2 \cdot e^{\lambda t} \end{matrix} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{C_2} \cdot \left[C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \ln \left(\frac{x_2}{C_2} \right) \right] \quad (4.48)$$

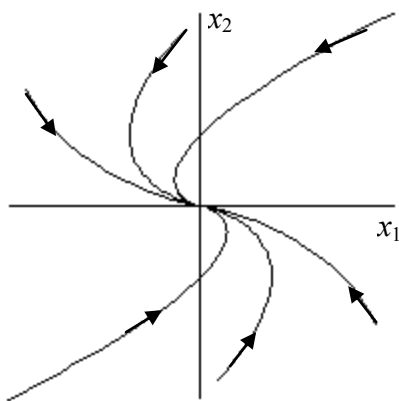
Jedná se o **zobecněné logaritmické křivky**, jak ukazuje obr. 4.5c,d.

Bod rovnováhy v počátku se v případě (a) i (b) opět nazývá **uzel**. Úloha je asymptoticky stabilní, jestliže je $\lambda < 0$ (obr. 4.5a,c), jak se lze přesvědčit limitním přechodem pro $t \rightarrow \infty$ v parametrických rovnicích (4.47) a (4.48). Pro kladné λ je řešení naopak nestabilní.

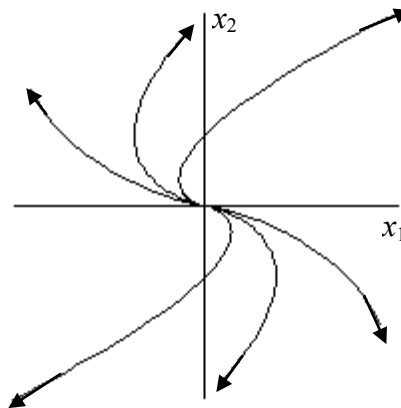


a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (asymptoticky stabilní uzel)

b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (nestabilní uzel)



c) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (asymptoticky stabilní uzel)



d) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (nestabilní uzel)

Obr. 4.5

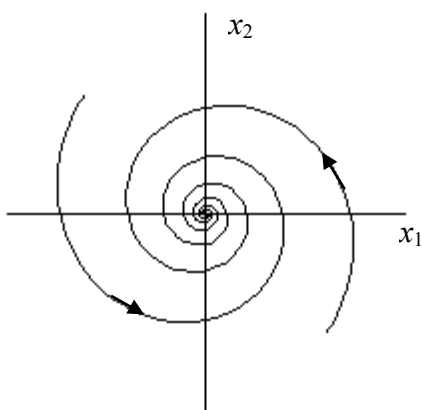
(A3) $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i = \bar{\lambda}_1$

$$(a) \alpha \neq 0 \quad \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= (C_1 \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot \sin \beta t) \cdot e^{\alpha t} \\ x_2 &= (-C_1 \cdot \sin \beta t + C_2 \cdot \cos \beta t) \cdot e^{\alpha t} \end{aligned} \quad (4.49)$$

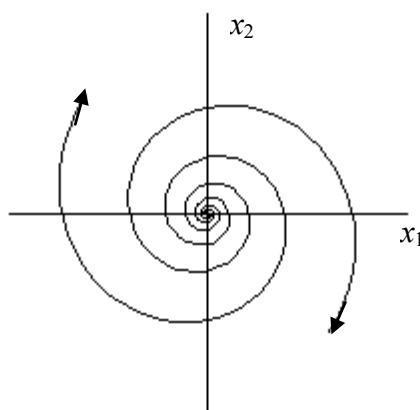
Lze ukázat, že jde o **logaritmické spirály**, často pro stručnost zapisované v polárních souřadnicích rovnicí

$$\rho(\varphi) = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta} \varphi}, \quad C > 0.$$

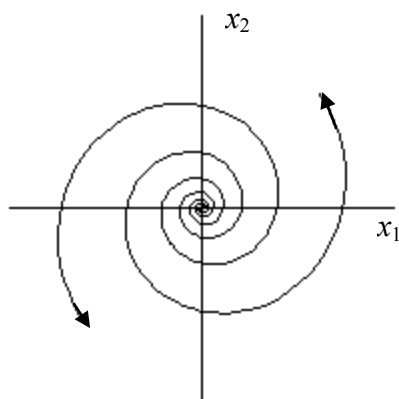
Jednotlivé varianty jsou znázorněny na obr. 4.6a-d včetně rozlišení nestabilních případů ($\alpha > 0$) od asymptoticky stabilních ($\alpha < 0$). Bod rovnováhy $[0,0]$ označujeme jako **ohnisko**.



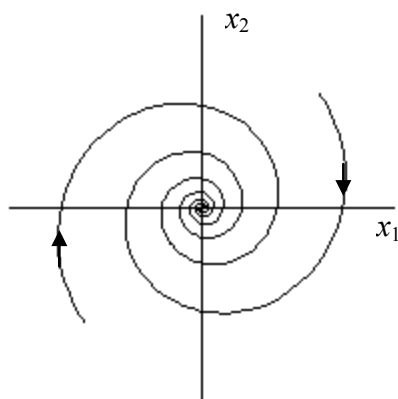
a) $\alpha < 0, \beta < 0$
asymptoticky stabilní ohnisko



b) $\alpha > 0, \beta > 0$
nestabilní ohnisko



c) $\alpha > 0, \beta < 0$
nestabilní ohnisko



d) $\alpha < 0, \beta > 0$
asymptoticky stabilní ohnisko

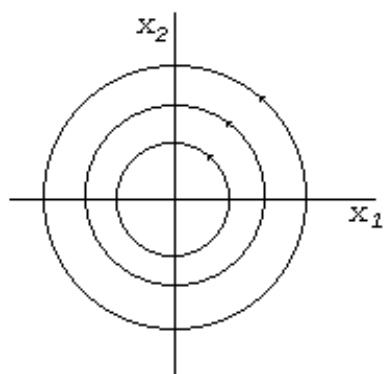
Obr. 4.6

$$(b) \alpha = 0 \quad \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= C_1 \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot \sin \beta t \\ x_2 &= -C_1 \cdot \sin \beta t + C_2 \cdot \cos \beta t \end{aligned} \quad (4.50)$$

Jde o soustavu s ryze imaginárními vlastními čísly. Umocněním a sečtením obou rovnic dojdeme k výsledku

$$x_1^2 + x_2^2 = C_1^2 + C_2^2, \quad \text{resp.} \quad \rho(\varphi) = C, \quad (4.51)$$

což je systém **soustředných kružnic** se středem v počátku (obr. 4.7). **Střed** je rovněž název bodu rovnováhy pro tento typ soustav. Systém je stabilní, ale nikoli asymptoticky, jak bylo ukázáno již v příkladu 4.6.4. Pro $\beta < 0$ se změni orientace trajektorií.



Obr. 4.7 : $\alpha = 0$ ($\beta > 0$)
stabilní střed

4.7.3. Singulární případy odpovídají singulární matici soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, tedy podmínce

$$\det \mathbf{A} = 0.$$

Algebraický systém $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ má v tomto případě nekonečně mnoho řešení a soustava (4.44) má teoreticky nekonečný počet bodů rovnováhy. Jedno nebo obě vlastní čísla jsou nulová a tomu odpovídá i průběh fázových trajektorií, kterými budou v tomto případě přímky.

(B1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

(a) dva lineárně nezávislé vlastní vektory

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= C_1 \\ x_2 &= C_2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Trajektorií je jediný **bod** C_1, C_2 na obr. 4.8a.

(b) jediný (lineárně nezávislý) vlastní vektor

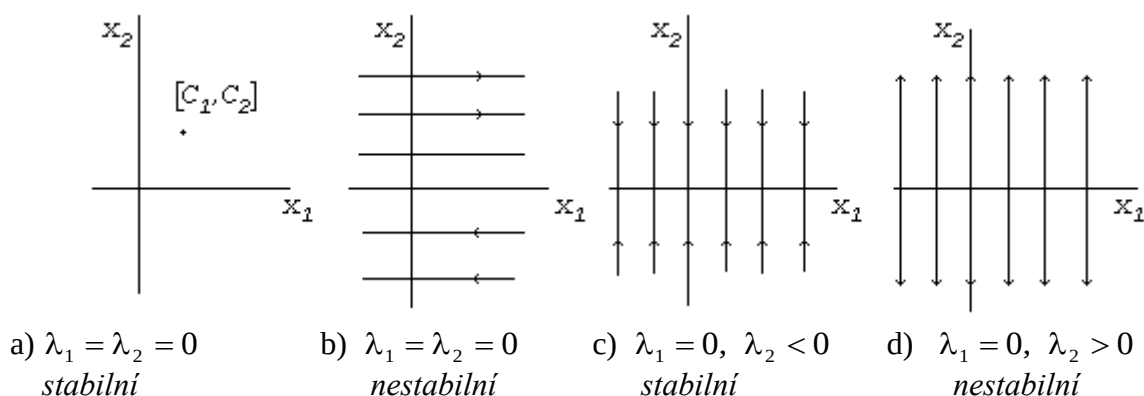
$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= C_1 + C_2 t \\ x_2 &= C_2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Trajektoriemi jsou **přímky rovnoběžné s osou** x_1 (obr. 4.8b). Zatímco případ (a) je evidentně stabilní, soustava (b) vždy vykazuje nestabilitu.

(B2) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ (variantu $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ si čtenář snadno odvodí samostatně)

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= C_1 \\ x_2 &= C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Trajektorie jsou **rovnoběžky s osou** x_2 na obr. 4.8c,d, které jsou stabilní pro $\lambda_2 < 0$ a nestabilní v opačném případě.



Obr. 4.8

4.7.4. Poznámky. a) Tvar trajektorií, který jsme obdrželi v jednotlivých případech předcházejícího rozboru, odpovídá tomu, že jsme vycházeli ze speciálního (Jordanova) tvaru matice soustavy. V obecné úloze (4.44) sice zůstává typ křivek nezměněn, ale mění se například úhel asymptot, místo kružnic můžeme obdržet elipsy a podobně (viz následující příklady).

b) Shrňme-li získané poznatky o homogenních soustavách s konstantními koeficienty z hlediska stability systému, který popisují, docházíme k tomuto závěru:

- soustava je asymptoticky stabilní, mají-li všechna vlastní čísla záporné reálné části,
- soustava je stabilní, mají-li všechna vlastní čísla nulové reálné části,
- soustava je nestabilní v ostatních případech.

4.7.5. Příklad. Napište obecné řešení soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ se zadanou maticí $\mathbf{A}$. Určete typ fázových trajektorií řešení a znázorněte ve fázové rovině řešení počáteční úlohy pro podmínky $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$. Ve všech případech proveďte rozbor stability soustavy.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) Charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 4$, ke kterým dopočítáme vlastní vektory a získáme obecné řešení

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{4t} \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= -C_1 \cdot e^t + 2C_2 \cdot e^{4t}, \\ x_2(t) &= C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{4t}. \end{aligned}$$

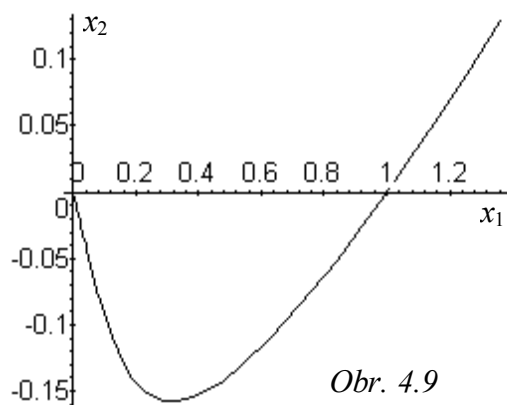
Trajektoriemi jsou zobecněné paraboly, neboť jde o případ s různými vlastními čísly stejného znaménka - viz (A1). Vyloučením parametru obdržíme implicitní vyjádření těchto křivek

(zobecněných mocninných funkcí) například ve tvaru

$$2x_2 - x_1 + C \cdot \sqrt[4]{x_1 + x_2} = 0,$$

kde C je konstanta. Na obr. 4.9 je znázorněno řešení Cauchyho úlohy pro zadané podmínky, jimž odpovídají hodnoty konstant

$$C_1 = -\frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{1}{3}.$$



Obr. 4.9

Křivka v souladu se zadáním prochází bodem $[1,0]$. Systém je nestabilní, protože obě vlastní hodnoty jsou kladná čísla.

b) Charakteristická rovnice má tentokrát jediný dvojnásobný reálný kořen $\lambda = -3$, který je záporný (zde i v následujících dvou úlohách si čtenář jistě sám provede výpočet), a proto se jedná o asymptoticky stabilní systém. Při výpočtu vlastních vektorů se postupuje podle článku 4.4.6, což vede k obecnému řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 - C_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + \begin{pmatrix} C_2 \\ -C_2 \end{pmatrix} \cdot t \cdot e^{-3t}, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-3t}, \\ x_2(t) &= (C_1 - C_2 - C_2 t) \cdot e^{-3t}. \end{aligned}$$

Trajektoriemi jsou zobecněné logaritmické křivky typu (A2b). Na obr. 4.10 je znázorněno řešení Cauchyho úlohy, pro které obdržíme $C_1 = C_2 = 1$.

c) V tomto případě jde o stabilní systém, neboť matice soustavy má komplexně sdružené imaginární kořeny $\lambda = \pm 3i$ (varianta (A3b)). Obecné řešení vyjádříme buď jako dvojici parametrických rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t, \\ x_2(t) &= -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t \end{aligned}$$

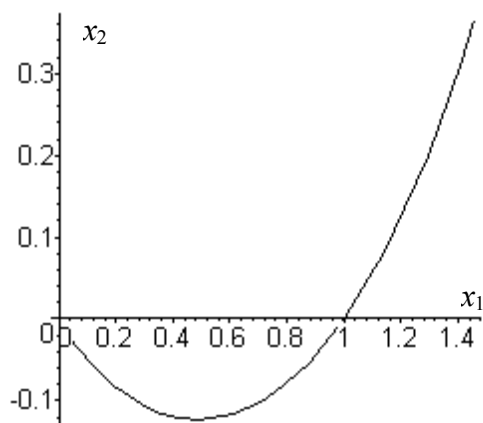
nebo vyloučením t (druhou rovnici vydělíme třemi, obě umocníme a sečteme) získáme implicitní formu

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{9} = C^2 \quad (= C_1^2 + C_2^2).$$

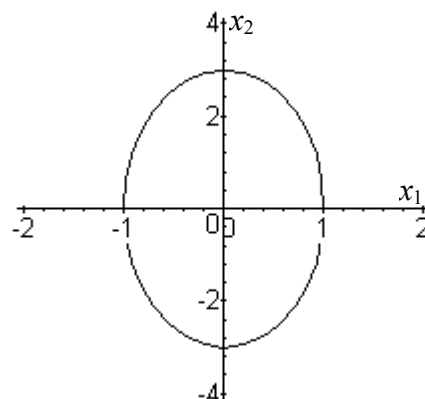
Z ní je ihned vidět, že jde o elipsy, jejichž orientaci můžeme určit na základě parametrických rovnic. Na obr. 4.11 je elipsa jdoucí bodem $[1,0]$, která představuje fázovou trajektorii pro zadané počáteční podmínky. Má parametrické rovnice

$$x_1 = \cos 3t, \quad x_2 = \sin 3t,$$

které odpovídají hodnotám konstant $C_1 = 1, C_2 = 0$.



Obr. 4.10



Obr. 4.11

d) Již na první pohled je patrné, že matice soustavy je singulární, což znamená, že alespoň jedno z vlastních čísel bude nula. Výpočtem zjistíme, že druhá charakteristická hodnota je nenulová, konkrétně $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 4$. Obecné řešení

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{4t}, \quad x_2(t) = 2C_1 - 2C_2 \cdot e^{4t}$$

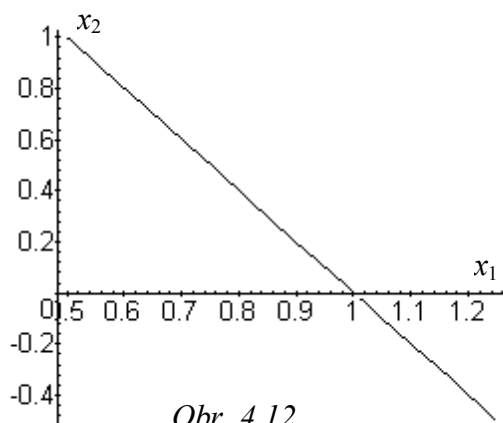
lze snadno vyloučením parametru zredukovat na rovnici systému rovnoběžných přímek

$$x_2 = -2x_1 + 4C_1.$$

Na obr. 4.12 vidíme graf polopřímky

$$x_2 = -2x_1 + 2, \quad x_1 > 0,$$

kterou získáme jako trajektorii pro dané počáteční podmínky ($C_1 = C_2 = 0,5$). Ze známých důvodů ($\lambda_2 > 0$) se jedná o nestabilní soustavu.



Obr. 4.12

Příklady k procvičení

P4.11. Určete typ fázových trajektorií a vyšetřete druh a stabilitu bodu rovnováhy:

a)	$\dot{x} + 2x + y = 0$ $\dot{y} + x + 2y = 0$	b)	$\dot{x} = -x + 3y$ $\dot{y} = -3x + 9y$
c)	$\dot{x} = -2x - 2y$ $\dot{y} = 4x + 3y$	d)	$\dot{x} = x + y$ $\dot{y} = 3x - y$

P4.12. Určete a znázorněte ve fázové rovině řešení Cauchyho úlohy. Klasifikujte bod rovnováhy a rozhodněte o jeho stabilitě.

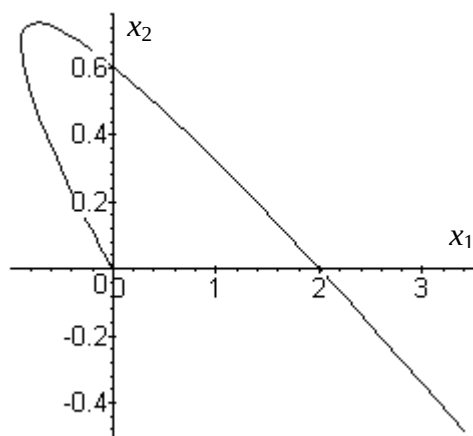
a)	$\dot{x}_1 = -3x_1 - 4x_2$ $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$ $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$	b)	$5\dot{x}_1 = 4x_1 + 5x_2$ $5\dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2$ $x_1(0) = 2, x_2(0) = -0,4$	c)	$2\dot{x}_1 = 3x_1 - 4x_2$ $2\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$ $\mathbf{x}(0) = (0, 1)^T$
----	---	----	---	----	---

P4.13. Pro jaké reálné hodnoty parametru a má následující soustava asymptoticky stabilní (resp. stabilní) řešení?

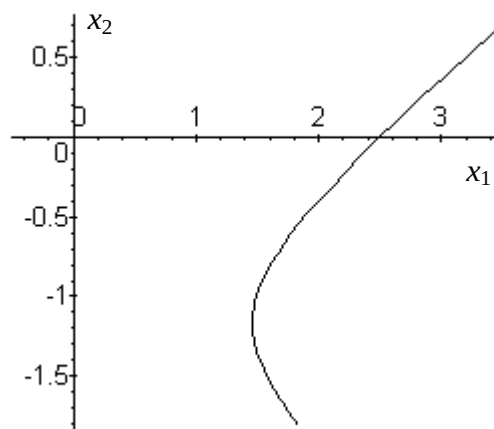
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + 9x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 2ax_2\end{aligned}$$

Výsledky:

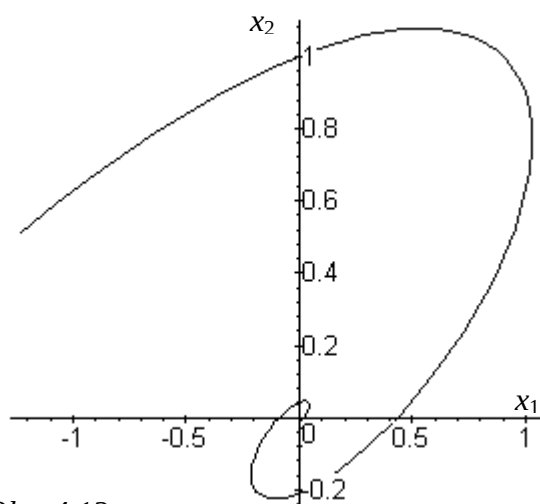
- P4.11. a) asymptoticky stabilní paraboly ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$), uzel
b) nestabilní rovnoběžné přímky ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 8$), nekonečně mnoho bodů rovnováhy
c) nestabilní logaritmické spirály ($\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$), ohnisko
d) nestabilní hyperboly ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$), sedlo
- P4.12. a) trajektorie řešení je obecná logaritmická křivka o parametrických rovnicích
 $x_1 = (2 - 4t) \cdot e^{-t}, x_2 = 2t \cdot e^{-t}$, v počátku má stabilní uzel (obr. 4.13a)
b) trajektorie řešení je obecná hyperbola o parametrických rovnicích
 $x_1 = e^{1,4t} + e^{-0,2t}, x_2 = 0,6 \cdot e^{1,4t} - e^{-0,2t}$,
v počátku má nestabilní sedlo (obr. 4.13b)
c) trajektorie řešení je logaritmická spirála o parametrických rovnicích
 $x_1 = -2 \cdot \sin t \cdot e^{\frac{1}{2}}, x_2 = (\cos t - \sin t) \cdot e^{\frac{1}{2}}$,
v počátku má nestabilní ohnisko (obr. 4.13c)



Obr. 4.13a



Obr. 4.13b



Obr. 4.13c

Poznámka.

Je vhodné si na obr. 4.13a,b,c všimnout skutečnosti, že trajektorie procházejí body zadanými v počátečních podmínkách.

P4.13. systém je stabilní pro $a = 2$, asymptoticky stabilní pro

$$a \in (2, \frac{3\sqrt{2}}{2})$$

Citovaná literatura

- [Br] Brabec, J. - Hrůza, B.: *Matematická analýza II.* SNTL, Praha 1986
- [Ku] Kufner, A.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* Západočeská Univerzita, Plzeň 1993
- [Na] Nagy, J.: *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* SNTL, Praha 1980 (MVŠT, sešit XVI)
- [Pi] Pirč, V.: *Vybrané kapitoly z matematiky.* Technická Univerzita Košice, Košice 1992
- [Re] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užití matematiky.* Prometheus, Praha 1995
- [Šk] Škrášek, J. - Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II.* SNTL, Praha 1986

Další použitá a doporučená literatura

- Amel'kin, V.V.: *Differencial'nyje uravnenija v priloženijach.* Nauka, Moskva 1987
- Keener, J. P.: *Principles of Applied Mathematics.* Adison-Wesley Publ., Bonn 1994
- Nagy, J.: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.* SNTL, Praha 1980 (MVŠT, sešit XV)
- Ošťádalová, E. - Píšová, D.: *Matematika III.* VŠB, Ostrava 1990