Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Pracovní sešit do matematiky
Analytická geometrie v prostoru

Jana Bělohlávková, Zuzana Morávková

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

ISBN 978-80-248-4662-0

Obsah

1 Úvod . . . 3
2 Vektorová algebra . . . 4
2.1 Vektory . . . 4
2.2 Skalární součin vektorů . . . 5
2.3 Délka vektoru . . . 6
2.4 Vektorový součin vektorů . . . 7
2.5 Smíšený součin vektorů . . . 8
3 Body, přímky, roviny . . . 8
3.1 Bod . . . 8
3.2 Přímka . . . 9
3.3 Vzájemná poloha dvou přímek . . . 11
3.4 Rovina . . . 12
3.5 Vzájemná poloha dvou rovin . . . 18
3.6 Vzájemná poloha přímky a roviny . . . 19
4 Metrické úlohy . . . 20
4.1 Vzdálenosti . . . 20
4.2 Odchylky . . . 23
4.3 Obsahy a objemy . . . 26

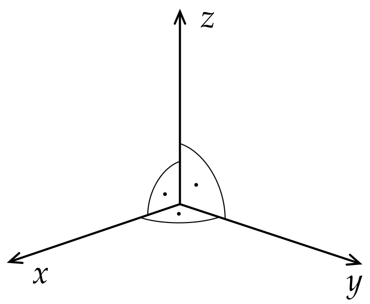
1 Úvod

V tomto pracovním sešitě se budeme zabývat vektory, body, přímkami, rovinami a souvisejícími pojmy. Budeme je pro jednoduchost uvažovat pouze v tzv. trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 a budeme je znázorňovat v kartézské soustavě souřadnic, kterou známe ze střední školy.

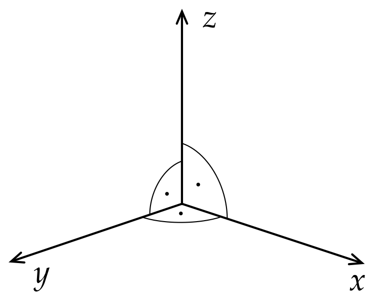
Připomeňme si, jak kartézskou soustavu souřadnic v prostoru zavádíme. Zvolíme si tři navzájem kolmé orientované přímky x, y, z procházející jedním bodem O a na každé přímce zvolíme jednotku délky. Takové soustavě říkáme **pravoúhlá soustava souřadnic**. Zvolíme-li jednotky délky shodné, říkáme soustavě **kartézská**.

Přímky x, y, z se nazývají **souřadnicové osy** a bod O **počátek soustavy souřadnic**. Rovinám xy, xz a yz říkáme **souřadnicové roviny**.

Volbou orientace souřadnicových os dostaneme buď tzv. **pravotočivou** nebo tzv. **levotočivou** soustavu. Budeme používat pravotočivou.

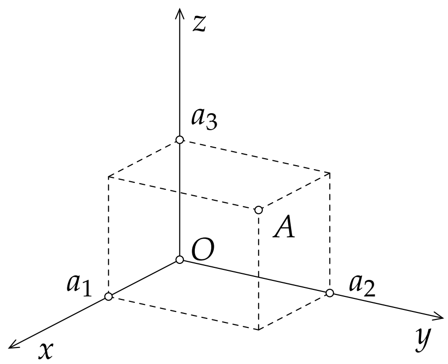


obr. 1: Pravotočivá soustava



obr. 2: Levotočivá soustava

Každému bodu A v prostoru s kartézskou soustavou můžeme jednoznačně přiřadit uspořádanou trojici čísel $[a_1, a_2, a_3]$, jak je znázorněno na obrázku 3. To, že má bod A souřadnice a_1, a_2 a a_3, budeme zapisovat $A = [a_1, a_2, a_3]$.

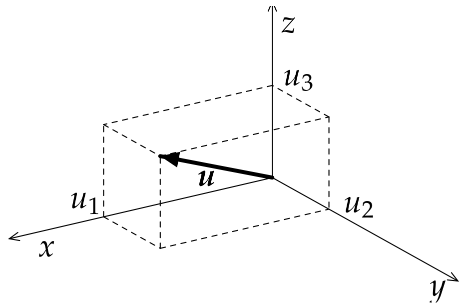


obr. 3: Bod v prostoru a jeho souřadnice

2 Vektorová algebra

2.1 Vektory

Vektorem budeme v celém sešitě rozumět uspořádanou trojici reálných čísel. Budeme ho značit tučně, např. $\boldsymbol{u} = (5, -3, \sqrt{2})$.
Každému vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ odpovídá orientovaná úsečka s počátkem v bodě $O = [0, 0, 0]$ a koncem v bodě $[u_1, u_2, u_3]$. Vektorem $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ budeme rozumět i tuto orientovanou úsečku (obr.4).



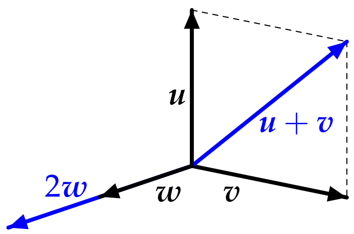
obr. 4: Vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$

Vektory mezi sebou sčítáme a násobíme reálným číslem takto:

Definice 2.1 Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

- součet vektorů: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
- násobení vektoru reálným číslem k: $k\boldsymbol{u} = (\,ku_1,\ ku_2,\ ku_3)$

Vektor $\boldsymbol{o} = (0, 0, 0)$ se nazývá **nulový** vektor,
vektoru $-\boldsymbol{u} = -1\boldsymbol{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$ říkáme vektor **opačný** k vektoru $\boldsymbol{u}$.



obr. 5: Sčítání vektorů a násobení vektoru číslem

Úlohy k procvičení

Příklad 1. Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (2, -4, 3)$, $\boldsymbol{v} = (2, 0, -1)$. Určete souřadnice vektorů

a) $2\boldsymbol{u}$, b) $2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, c) $\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$.

Všimněte si, že pokud $\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, potom platí i $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v} - \frac{1}{2}\boldsymbol{q}$; platí také $\boldsymbol{o} = 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{q}$.

Definice 2.2 Řekneme, že vektor $\boldsymbol{q}$ je **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$, jestliže existují čísla k, ℓ a m taková, že platí

$$\boldsymbol{q} = k\boldsymbol{u} + \ell\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{w}$$

Existují-li taková čísla, říkáme také, že vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{q}$ jsou **lineárně závislé**.

Vektory $\boldsymbol{u} = (1, 3, -1)$, $\boldsymbol{v} = (2, -9, -2)$ a $\boldsymbol{w} = (2, 1, -2)$ jsou lineárně závislé, protože platí $\boldsymbol{o} = 4\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{w}$ (nebo taky $\boldsymbol{o} = 8\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} - 6\boldsymbol{w}$).

Vektory $\boldsymbol{u} = (0, 4, 0)$, $\boldsymbol{v} = (2, 1, 0)$, $\boldsymbol{w} = (0, 1, 1)$ jsou lineárně nezávislé.

Definice 2.3 Říkáme, že dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou **kolineární**, je-li jeden násobkem druhého; tedy platí $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$

Úlohy k procvičení

Příklad 2. Určete, zda jsou vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ kolineární

a) $\boldsymbol{u} = (-1, -1, 4)$, $\boldsymbol{v} = (-2, -2, 8)$,

b) $\boldsymbol{u} = (2, 5, 7)$, $\boldsymbol{v} = (-6, -15, -10)$,

c) $\boldsymbol{u} = (2, 2, -4)$, $\boldsymbol{v} = (1, -1, -2)$.

Definice 2.4 Vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ o souřadnicích

$$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{j} = (0, 1, 0),\ \boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$$

se nazývají **základní bázové vektory**.

Každý vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ v prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci základních bázových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, takto

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}.$$

Příklad 3. Vyjádřete vektor $\boldsymbol{u} = (2, -4, 3)$ jako lineární kombinaci základních bázových vektorů.

$$\boldsymbol{u} = (2, -4, 3) = 2 \cdot (1, 0, 0) - 4 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1) = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

2.2 Skalární součin vektorů

Definice 2.5 **Skalární součin** dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je číslo

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Příklad 4. Vypočtěte skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} = (2, 0, 3)$ a $\boldsymbol{v} = (1, 4, -1)$.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (2, 0, 3) \cdot (1, 4, -1) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = -1$$

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je -1.

Úlohy k procvičení

Příklad 5. Vypočtěte skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$:

a) $\boldsymbol{u} = (1, 1, 3)$, $\boldsymbol{v} = (2, 5, -2)$,

b) $\boldsymbol{u} = (4, 5, 1)$, $\boldsymbol{v} = (4, -2, -6)$.

Skalární součin nám umožňuje „měřit úhly a velikosti vektorů“.

Definice 2.6 Dva nenulové vektory jsou **kolmé**, je-li jejich skalární součin roven nule.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Úlohy k procvičení

Příklad 6. Zjistěte, zda jsou vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ na sebe kolmé:

a) $\boldsymbol{u} = (-2, -3, 5)$, $\boldsymbol{v} = (4, 2, 7)$, b) $\boldsymbol{u} = (2, 3, 1)$, $\boldsymbol{v} = (-1, -2, 8)$.

Úlohy k procvičení

Příklad 7. Doplňte chybějící souřadnici vektoru $\boldsymbol{v}$ tak, aby byl kolmý k vektoru $\boldsymbol{u}$.

a) $\boldsymbol{u} = (3, 1, 6)$, $\boldsymbol{v} = (-4, 0, ?)$, b) $\boldsymbol{u} = (2, 3, 1)$, $\boldsymbol{v} = (?, -2, 3)$.

Úlohy k procvičení

Příklad 8. Najděte alespoň tři (libovolné) vektory kolmé k vektoru $(1, 3, -1)$.

Poznámka

Pro skalární součin vektorů platí

- komutativní zákon: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$,
- distributivní zákon: $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$.

2.3 Délka vektoru

Definice 2.7 **Délka vektoru** $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, nebo taky **velikost vektoru**, je číslo

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2}$$

Vektor, jehož délka se rovná jedné, se nazývá **jednotkový**.

Všimněte si, že $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$.

Příklad 9. Vypočítejte délku vektoru $\boldsymbol{u} = (2, -4, 1)$.

Souřadnice vektoru dosadíme do vzorce

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21} \doteq 4{,}58\,.$$

2.4 Vektorový součin vektorů

Definice 2.8 **Vektorovým součinem** dvou vektorů $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ rozumíme vektor $\boldsymbol{w}$, pro který platí

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\left(\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$

Vektorový součin můžeme sice formálně, ale zato velmi přehledně zapsat ve tvaru determinantu.

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\cdot\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\cdot\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\cdot\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix},$$

kde $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ jsou bázové jednotkové vektory.

Příklad 10. Vypočítejte vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}=(2,0,3)$, $\boldsymbol{v}=(1,4,-1)$.

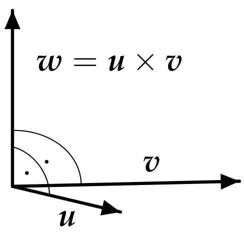
$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-12\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}=(-12,5,8)$$

Úlohy k procvičení

Příklad 11. Vypočítejte vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$:

a) $\boldsymbol{u}=(1,2,-1)$, $\boldsymbol{v}=(3,-1,-2)$, b) $\boldsymbol{u}=(3,1,2)$, $\boldsymbol{v}=(6,2,4)$.

Věta 2.1 Vektorový součin $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.



obr. 6: Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$
v pravotočivé soustavě souřadnic

Úlohy k procvičení

Příklad 12. Ověřte, že vektorový součin $\boldsymbol{w}$ vektorů $\boldsymbol{u}=(1,2,-1)$ a $\boldsymbol{v}=(3,-1,-2)$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{u}$ i k vektoru $\boldsymbol{v}$.

Poznámka

Pro vektorový součin vektorů platí

- antikomutativní zákon: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$,
- distributivní zákon: $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$,
- a pro násobení reálnými čísly k, ℓ: $(k \cdot \boldsymbol{u}) \times (\ell \cdot \boldsymbol{v}) = k \cdot \ell \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$.

2.5 Smíšený součin vektorů

Definice 2.9 **Smíšeným součinem** tří vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ rozumíme číslo

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Příklad 13. Vypočtěte smíšený součin vektorů $\boldsymbol{u} = (2, 0, 3)$, $\boldsymbol{v} = (1, 4, -1)$, $\boldsymbol{w} = (4, 2, 3)$.

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14$$

3 Body, přímky, roviny

3.1 Bod

V souladu s úvodem budeme bodem rozumět uspořádanou trojici reálných čísel psanou v hranatých závorkach např. $[1, -2, \frac{3}{7}]$.

Každé uspořádáné dvojici bodů $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$ přiřadíme vektor

$$AB = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Pro bod A a vektor u pak můžeme psát $A + u = [a_1 + u_1, a_2 + u_2, a_3 + u_3]$.

Úlohy k procvičení

Příklad 14. Je dán bod $A = [3, 4, 1]$ a vektor $\boldsymbol{u} = (0, 2, 1)$. Vypočítejte souřadnice bodů:

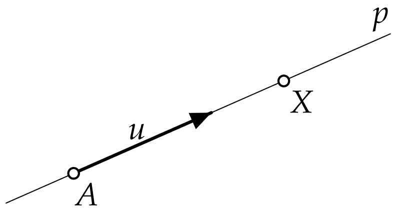
a) $A + \boldsymbol{u}$, b) $A + 2\boldsymbol{u}$, c) $A + 3\boldsymbol{u}$, d) $A - \boldsymbol{u}$.

3.2 Přímka

Přímkou, určenou bodem A a vektorem u, rozumíme všechny body X, pro které platí

$$X = A + t\boldsymbol{u},$$

kde t je libovolné reálné číslo.



Přímku lze jednoznačně určit bodem a vektorem nebo dvěma různými body.

Definice 3.10 Nechť je dán bod $A=[a_1,a_2,a_3]$ a nenulový vektor $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$. **Parametrickými rovnicemi přímky** p určené bodem A a vektorem $\boldsymbol{u}$ nazveme rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ p: y &= a_2 + tu_2 \\ z &= a_3 + tu_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bod $X=[x,y,z]$ je pak bod přímky p.
Vektoru $\boldsymbol{u}$ říkáme **směrový vektor** přímky p. Číslu t říkáme **parametr**.

Příklad 15. Je dán bod $A = [3,4,1]$ a vektor $\boldsymbol{u} = (2,-2,1)$. Sestavte parametrické rovnice přímky určené bodem A a směrovým vektorem u.

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ p: y &= 4 - 2t \\ z &= 1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 16. Je dán bod $A = [1,4,-1]$ a vektor $\boldsymbol{u} = (3,0,2)$.

a) Sestavte parametrické rovnice přímky určené bodem A a směrovým vektorem u.

b) Najděte souřadnice čtyř libovolných bodů na této přímce.

c) Určete chybějící souřadnice bodů $[-2,?,?]$, $[?,?,7]$ a $[?,6,?]$, tak aby ležely na této přímce.

Úlohy k procvičení

Příklad 17. Zjistěte, zda body $A=[2,0,2]$, $B=[5,1,3]$, $C=[-7,6,-1]$ leží na přímce p:

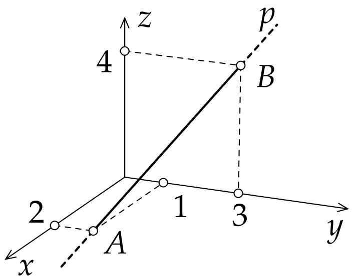
$$\begin{aligned} x &= -1 + 3r \\ p: y &= 2 - 2r \\ z &= 1 + r, \quad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úlohy k procvičení

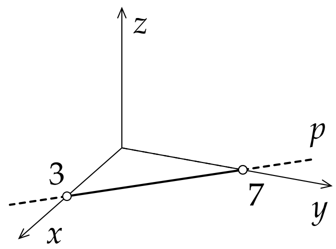
Příklad 18. a) Sestavte parametrické rovnice přímky p určené body A, B na obr. 7.

b) Sestavte parametrické rovnice přímky p určené body na obr. 8.

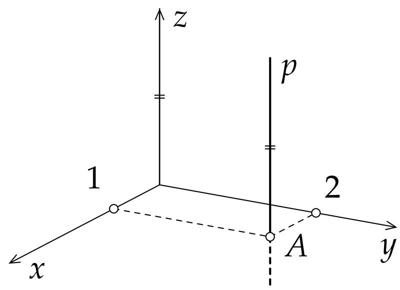
c) Sestavte parametrické rovnice přímky p určené bodem A a rovnoběžné s osou z podle obr. 9.



obr. 7



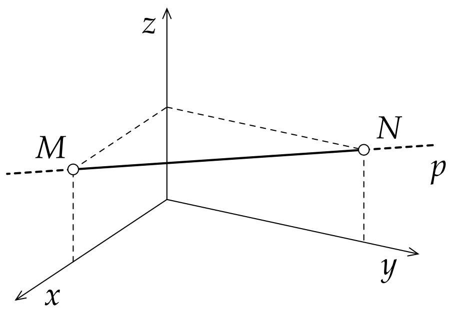
obr. 8



obr. 9

Úlohy k procvičení

Příklad 19. Najděte takové body M a N přímky p, které leží v rovinách yz a xz (obr. 10).



obr. 10

$$p: \begin{aligned} x &= 8 - 2t \\ y &= -9 + 3t \\ z &= 5, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 20. Rozhoděte, zda body $A = [1, 1, 1]$, $B = [4, 3, 5]$, $C = [7, 5, 9]$ leží v jedné přímce.

Definice 3.11 Pokud mají dvě různé přímky jeden společný bod, nazýváme ho **průsečík**.

Příklad 21. Mají přímky p a q průsečík?

$$p: \begin{aligned} x &= 8 - 3t \\ y &= 1 - t \\ z &= 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x &= 3 + s \\ y &= s \\ z &= 8 + s, \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Hledaný průsečík $P = [p_1, p_2, p_3]$ leží na přímce p i na přímce q, a proto jeho souřadnice splňují parametrické rovnice obou těchto přímek:

$$\begin{aligned} p_1 &= 8 - 3t \\ p_2 &= 1 - t \\ p_3 &= 3 + 2t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_1 &= 3 + s \\ p_2 &= s \\ p_3 &= 8 + s \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8 - 3t &= 3 + s \\ 1 - t &= s \\ 3 + 2t &= 8 + s \end{aligned}$$

Dostáváme soustavu tří lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} -3t - s &= -5 \\ -t - s &= -1 \\ 2t - s &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

V tomto případě má soustava jedno řešení: $t = 2$ a $s = -1$. Souřadnice průsečíku pak dostaneme dosazením hodnoty $t = 2$ do parametrických rovnic přímky p nebo hodnoty $s = -1$ do parametrických rovnic přímky q:

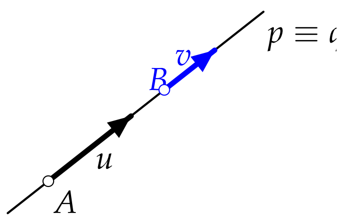
$$\begin{aligned} P &= [8 - 3t, 1 - t, 3 + 2t] = [8 - 3 \cdot 2, 1 - 2, 3 + 2 \cdot 2] = [2, -1, 7] \\ P &= [3 + s,\ s, 8 + s] = [3 + (-1), -1, 8 - (-1)] = [2, -1, 7] \end{aligned}$$

Přímky p a q mají průsečík $P = [2, -1, 7]$.

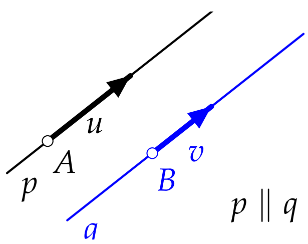
3.3 Vzájemná poloha dvou přímek

Nechť jsou dány dvě přímky p, q. Rozlišujeme čtyři typy vzájemné polohy dvou přímek.

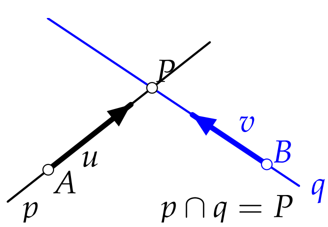
- Přímky jsou **totožné**, mají-li společné všechny body (a stejný směr).
- Přímky jsou **rovnoběžné různé**, pokud nemají společný bod a mají stejný směr.
- Přímky jsou **různoběžné**, mají-li společný jeden bod (a nemají stejný směr).
- Přímky jsou **mimoběžné**, pokud nemají ani společný bod ani stejný směr.



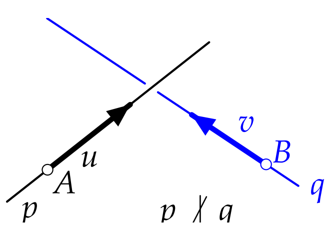
obr. 11: Totožné přímky



obr. 12: Rovnoběžné přímky



obr. 13: Různoběžné přímky



obr. 14: Mimoběžné přímky

Úlohy k procvičení

Příklad 22. Určete vzájemnou polohu dvou přímek p a q:

a) $p: \begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 3+t \\ z &= 5+2t \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x &= -3+r \\ y &= 6-r \\ z &= 7-r \end{aligned}$

b) $p: \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 1-2t \\ z &= -2+3t \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x &= 2-r \\ y &= 2+3r \\ z &= -5-4r \end{aligned}$

c) $p: \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 1-2t \\ z &= -2+3t \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x &= 2+2r \\ y &= 2-4r \\ z &= -5+6r \end{aligned}$

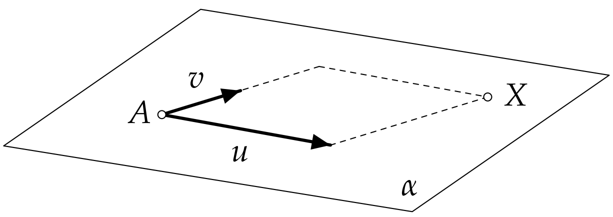
d) $p: \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 1-2t \\ z &= -2+3t \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x &= 2-3r \\ y &= -1+6r \\ z &= 1-9r \end{aligned}$

3.4 Rovina

Rovinou určenou bodem A a dvěma nekolineárními vektory u a v rozumíme všechny body X, pro které platí

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v},$$

kde t, s jsou libovolná reálná čísla, tzv. parametry.



obr. 15: Rovina

Rovinu lze jednoznačně určit bodem a dvěma nekolineárními vektory nebo třemi body neležícími na téže přímce.

Úlohy k procvičení

Příklad 23. Je dán bod $A = [2,3,1]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (0,1,3)$ a $\boldsymbol{v} = (1,2,1)$. Vypočítejte souřadnice bodů

a) $B = A + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, b) $C = A + 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, c) $D = A + \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$.

Definice 3.12 Nechť je dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a dva nekolineární vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. **Parametrickými rovnicemi roviny** α urrčené bodem A a vektory u a v nazveme rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ \alpha : y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bod $X = [x, y, z]$ je pak bod roviny α. Vektory u a v nazveme **směrové** vektory roviny α.

Úlohy k procvičení

Příklad 24. Sestavte parametrické rovnice roviny ϱ určené:

a) bodem $[7, -2, 3]$ a vektory $(1, 5, 3)$ a $(-5, 1, -1)$,

b) body $[1, 1, 1]$, $[4, 3, 5]$, $[7, 5, 9]$.

Příklad 25. Je dán bod $A = [1, 2, -2]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (3, -1, -1)$ a $\boldsymbol{v} = (1, 0, -2)$.

a) Sestavte parametrické rovnice roviny α určené bodem A a vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

b) Najděte souřadnice dvou libovolných bodů B a C ležících v rovině α.

c) Určete chybějící souřadnici bodů $X = [?, 0, 0]$ a $Z = [0, 0, ?]$ tak, aby ležely v rovině α.

a)
$$\begin{aligned} x &= 1 + 3t + s \\ y &= 2 - t \\ z &= -2 - t - 2s, \quad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Souřadnice libovolného bodu ležícího v rovině α najdeme tak, že si libovolně zvolíme čísla (parametry) t a s a dosadíme je do rovnic roviny.

Pro $t = 1$, $s = 1$ dostaneme bod $[5, 1, -5] = B$.
Pro $t = 0$, $s = 1$ dostaneme bod $[2, 2, -4] = C$.
Pro $t = 4$, $s = 2$ dostaneme bod $[15, -2, -10]$.
Pro $t = -1$, $s = 0$ dostaneme bod $[-2, 3, -1]$.

c) Bod $X = [a, 0, 0]$ leží v rovině α, musí tedy pro nějaké t a s platit

$$\begin{aligned} a &= 1 + 3t + s \\ 0 &= 2 - t \\ 0 &= -2 - t - 2s. \end{aligned}$$

Z druhé a třetí rovnice vypočítáme $t = 2$ a $s = -2$. Dosadíme do první rovnice a vypočítáme $a = 5$, a tedy bod $X = [5, 0, 0]$.

Podobně najdeme souřadnice bodu $Z = [0, 0, 10]$, pro který vyjde $t = 2$ a $s = -7$.

Příklad 26. Z parametrických rovnic roviny α sestavme jednu rovnici bez parametrů t a s.

$$\alpha : \begin{aligned} x &= 1 + 3t + s \\ y &= 2 - t \\ z &= -2 - t - 2s, \quad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Parametry vyloučíme například tak, že první rovnici vynásobíme dvěma, druhou rovnici pěti a pak všechny tři rovnice sečteme.

$$\begin{aligned} 2x &= 2 + 6t + 2s \\ 5y &= 10 - 5t \\ z &= -2 - t - 2s \\ \hline 2x + 5y + z &= 10 + 0t + 0s \end{aligned}$$

Dostaneme rovnici
$$2x + 5y + z - 10 = 0$$

Této rovnici říkáme obecná rovnice roviny α.

Definice 3.13 **Obecnou rovnicí roviny** nazýváme rovnici

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde aspoň jedno z čísel a, b, c, d je různé od nuly.

Příklad 27. Ověřme, že bod $A = [1, 2, -2]$ leží v rovině $\alpha :\ 2x + 5y + z - 10 = 0$.

Souřadnice bodu dosadíme do rovnice roviny $2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + (-2) - 10 = 0$. Vidíme, že rovnice platí a tedy bod A leží v rovině α.

Úlohy k procvičení

Příklad 28. Ověřte, že body $B = [5, 1, -5]$ a $C = [2, 2, -4]$ z příkladu 25.b) leží v rovině $\alpha : 2x + 5y + z - 10 = 0$.

Úlohy k procvičení

Příklad 29. Určete chybějící souřadnici bodu $Y = [0, ?, 0]$ tak, aby ležel v rovině $\alpha : 2x + 5y + z - 10 = 0$.

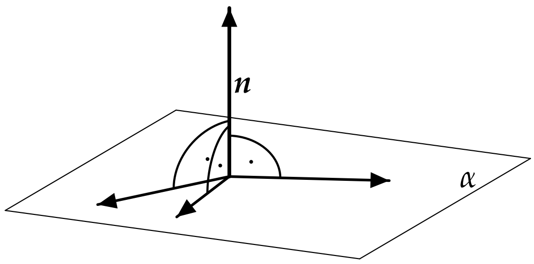
Příklad 30. Koeficienty u proměnných x, y, z v obecné rovnici roviny $\alpha :\ 2x + 5y + z - 10 = 0$ si zapíšeme do vektoru $\boldsymbol{n} = (2, 5, 1)$.
Ověřte, že vektor n je kolmý ke směrovým vektorům $\boldsymbol{u} = (3, -1, -1)$ a $\boldsymbol{v} = (1, 0, -2)$ roviny α (viz příklad 25.).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} &= 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} &= 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 0 \end{aligned}$$

Vektor $\boldsymbol{n}$ je kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$. Vektoru $\boldsymbol{n}$ říkáme normálový vektor roviny α.

Definice 3.14 **Normálovým vektorem** roviny α nazýváme takový vektor $\boldsymbol{n}$, který je kolmý na rovinu α.

Normálovým vektorem roviny $\alpha : 2x + 5y + z - 10 = 0$ je $\boldsymbol{n} = (2,5,1)$, ale také třeba vektory $(4,10,2)$, $(-2,-5,-1)$ nebo další.
Normálový vektor roviny je kolmý na všechny vektory této roviny.



obr. 16: Rovina α a její normálový vektor $\boldsymbol{n}$

Příklad 31. Sestavte obecnou rovnici roviny určené bodem $A=[1,2,-2]$ a vektory $\boldsymbol{u}=(3,-1,-1)$ a $\boldsymbol{v}=(1,0,-2)$.

Hledáme rovnici ve tvaru $ax + by + cz + d = 0$. Víme, že (a,b,c) je normálový vektor roviny, který je kolmý ke všem vektorům roviny, tedy i k vektorům $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. A proto vektor (a,b,c) najdeme jako vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

$$(a,b,c) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2,5,1)$$

Obecná rovnice roviny bude mít tvar

$$2x + 5y + z + d = 0$$

K výpočtu čísla d využijeme toho, že známe bod A. Bod A leží v rovině a proto jeho souřadnice musí rovnici roviny splňovat:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1) + 5 \cdot (2) + (-2) + d &= 0 \\ d &= -10 \end{aligned}$$

Hledaná rovnice roviny je

$$2x + 5y + z - 10 = 0.$$

Porovnejte postup a výsledek s příkladem 26.

Úlohy k procvičení

Příklad 32. Zjistěte zda body $A = [-1,2,5]$, $B = [3,-1,0]$, $C = [-5,-4,2]$ leží v rovině $\gamma : 2x - 5y + 6z - 11 = 0$.

Úlohy k procvičení

Příklad 33. Napište obecnou rovnici roviny β, znáte-li její normálový vektor $(-3, 1, 4)$ a jeden její bod $[1, 2, 1]$.

Úlohy k procvičení

Příklad 34. Sestavte obecnou rovnici roviny určenou

a) bodem $A = [-2, 0, 5]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (4, 2, -1)$ a $\boldsymbol{v} = (-1, 1, 2)$,

b) třemi body $A = [-2, 0, 5]$, $B = [3, 1, 0]$, $C = [1, 1, -3]$,

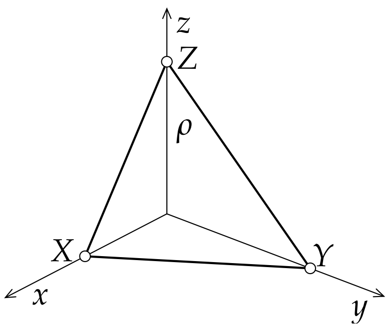
c) třemi body $A = [3, 1, 5]$, $B = [4, 2, 7]$, $C = [5, 3, 9]$.

Úlohy k procvičení

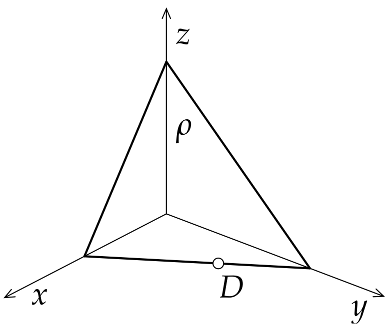
Příklad 35. Je dána rovina $\rho: \ 4x + 6y + z - 12 = 0$.

a) Určete souřadnice bodů X, Y, a Z, průsečíků roviny ρ se osami, obr. 17.

b) Najděte souřadnice libovolného bodu D ležícího v rovině ρ a rovině xy, obr. 18.



obr. 17



obr. 18

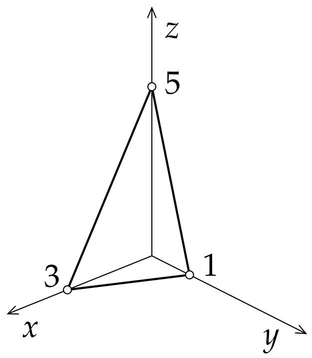
Úlohy k procvičení

Příklad 36.

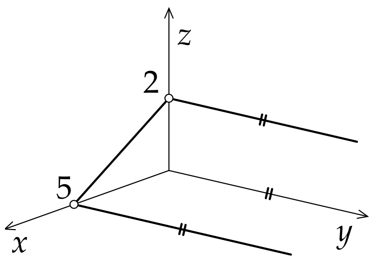
a) Sestavte obecnou rovnici roviny splňující zadání z obr. 19.

b) Sestavte obecnou rovnici roviny rovnoběžné s osou y a splňující zadání z obr. 20.

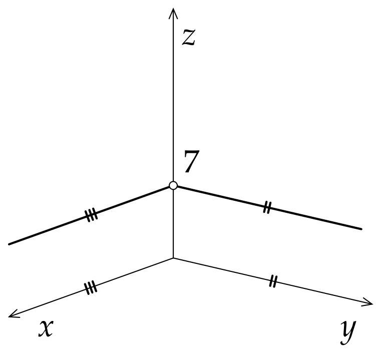
c) Sestavte obecnou rovnici roviny rovnoběžné s rovinou xy a splňující zadání z obr. 21.



obr. 19



obr. 20



obr. 21

Úlohy k procvičení

Příklad 37. a) Určete obecnou rovnici roviny dané parametricky:

$$\varrho : \begin{aligned} x &= -2 + 3s + r \\ y &= 2s + 2r \\ z &= 1 + 2r \end{aligned}$$

b) Určete obecnou rovnici roviny procházející bodem $M = [1, -2, 0]$ a kolmé k přímce

$$p : \begin{aligned} x &= -2 + 3s \\ y &= 2s \\ z &= 1 + 2s \end{aligned}$$

c) Určete obecnou rovnici roviny procházející bodem $Q = [1, -2, 3]$ a kolmé k ose x.

d) Určete obecnou rovnici roviny procházející bodem $M = [1, -2, 3]$ a rovnoběžnou s rovinou $\alpha : 2x - y + 3z = 0$.

Definice 3.15 **Úsekovou rovnicí roviny** ϱ nazýváme rovnici tvaru

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

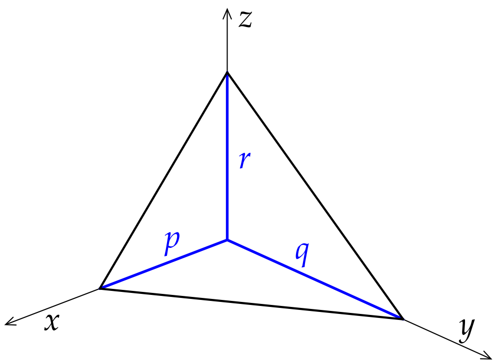
kde $p, q, r \in \mathbb{R}$ jsou úseky, které vytíná rovina na souřadných osách.

Úseky uvažujeme orientované, tedy např. $p = -3$ znamená, že rovina protína osu x v bodě $[-3, 0, 0]$.

Například úseková rovnice roviny $\quad 2x + 5y + z - 10 = 0 \quad$ je $\quad \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{10} = 1.$

Úlohy k procvičení

Příklad 38. Sestavte úsekovou rovnici roviny z příkladu 36.a) a srovnejte ji s obecnou rovnicí.



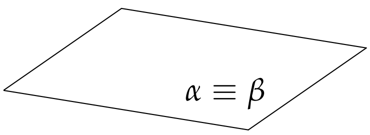
obr. 22: Úseková rovnice roviny

3.5 Vzájemná poloha dvou rovin

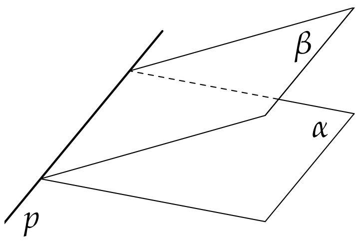
Nechť jsou dány dvě roviny α a β. Rozlišujeme tři typy jejich vzájemné polohy.

- Roviny jsou **totožné**, mají-li společné všechny body (obr. 23).
- Roviny jsou **různoběžné**, mají-li společnou přímku, tzv. **průsečnici** (obr. 24).
- Roviny jsou **rovnoběžné**, nemají-li žádný společný bod (obr. 25).

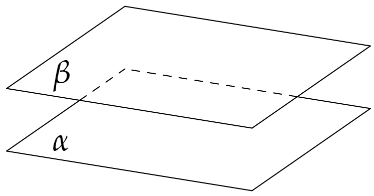
Neexistuje mimoběžná poloha dvou rovin v prostoru.



obr. 23



obr. 24



obr. 25

Příklad 39. Určete průsečnici rovin α a β.

$$\alpha : x - y + 4z + 2 = 0 \qquad \beta : 2x - y + 5z - 1 = 0$$

Body hledané průsečnice p leží v obou rovinach. Pro jejich souřadnice $[p_1, p_2, p_3]$ tedy platí

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 + 4p_3 + 2 &= 0 \\ 2p_1 - p_2 + 5p_3 - 1 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} p_1 &= 3 - t \\ p_2 &= 5 + 3t \\ p_3 &= t \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, roviny mají tedy nekonečně mnoho průsečíků ležících na jejich průsečnici, přímce p.

$$\begin{aligned} x &= 3 - t \\ p : y &= 5 + 3t \\ z &= t \end{aligned}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 40. Určete vzájemnou polohu rovin α a β.

a) $\begin{aligned}\alpha &: x-y+2z+2=0\\ \beta &: 3x-3y+6z+6=0\end{aligned}$ b) $\begin{aligned}\alpha &: x-y+2z+2=0\\ \beta &: 5x-5y+10z+3=0\end{aligned}$ c) $\begin{aligned}\alpha &: x-y+2z+2=0\\ \beta &: x-3y+4z-4=0\end{aligned}$

Úlohy k procvičení

Příklad 41. Určete vzájemnou polohu rovin α a β.

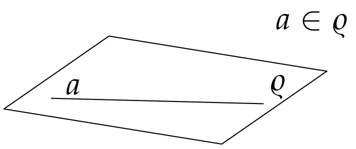
$$\alpha:\ \begin{aligned} x &= -2+3s-4r\\ y &= -3+2s+r\\ z &= 1-s-2r\end{aligned} \qquad \beta: -3x+10y+11z-2=0$$

3.6 Vzájemná poloha přímky a roviny

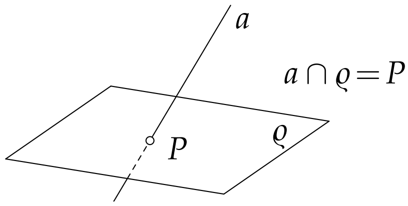
Nechť je dána přímka a a rovina α, rozlišujeme tři typy jejich vzájemné polohy.

- Přímka **leží v** rovině, mají-li společné všechny body přímky (obr.26).
- Přímka je s rovinou **různoběžná**, mají-li právě jeden společný bod tzv. **průsečík** (obr.27).
- Přímka je s rovinou **rovnoběžná**, pokud nemají žádný společný bod (obr.28).

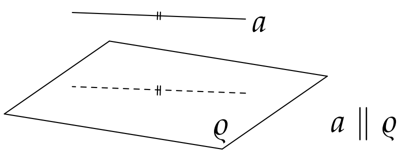
Neexistuje mimoběžná poloha přímky a roviny v prostoru.



obr. 26



obr. 27



obr. 28

Příklad 42. Najděte průsečík přímky a s rovinou ϱ, pokud existuje.

$$a:\ \begin{aligned} x &= 2+2t\\ y &= 1-t\\ z &= 5t\end{aligned} \qquad \varrho: 3x-2y-z-13=0$$

Hledaný průsečík $P=[p_1,p_2,p_3]$ leží na přímce a i v rovině ϱ. Tedy platí

$$\begin{aligned} p_1 &= 2+2t\\ p_2 &= 1-t\\ p_3 &= 5t\end{aligned} \qquad 3p_1-2p_2-p_3-13=0$$

Dosadíme a vypočítáme parametr t průsečíku:

$$\begin{aligned} 3(2+2t)-2(1-t)-5t-13 &= 0\\ t &= 3\end{aligned}$$

Rovnice má jedno řešení, přímka a a rovina ϱ mají společný jeden bod $P=[8,-2,15]$.

Úlohy k procvičení

Příklad 43. Určete vzájemnou polohu přímek a, b a c s rovinou $\varrho : 3x - y + z + 2 = 0$.

$$a : \begin{array}{l} x = 5 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + t \end{array} \qquad b : \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 + 4t \\ z = -1 + t \end{array} \qquad c : \begin{array}{l} x = 4 + t \\ y = 2 + t \\ z = 7 - 2t \end{array}$$

Úlohy k procvičení

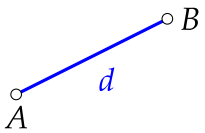
Příklad 44. Určete vzájemnou polohu přímky a a roviny ϱ:

$$a : \begin{array}{l} x = -t - 2 \\ y = -2t + 4 \\ z = -2t - 1 \end{array} \qquad \varrho : \begin{array}{l} x = -2 + 3s + r \\ y = 4 + 2s + 2r \\ z = 1 + 2r \end{array}$$

4 Metrické úlohy

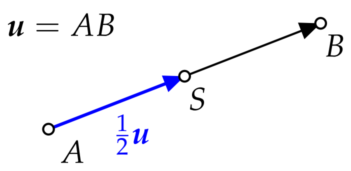
4.1 Vzdálenosti

Definice 4.16 Vzdáleností dvou bodů $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$ rozumíme délku vektoru AB.



$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Příklad 45. Jsou dány body $A = [1, 2, 1]$ a $B = [1, 4, 7]$. Najděte souřadnice středu úsečky AB.



Střed úsečky dostaneme tak, že k bodu A přičteme polovinu vektoru AB:

$$S = [1, 2, 1] + \frac{1}{2}(0, 2, 6) = [1, 3, 4]$$

Střed úsečky je také dán vzorcem:

$$S = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right] = \frac{A + B}{2}$$

Těžiště trojúhelníka ABC se spočítá:

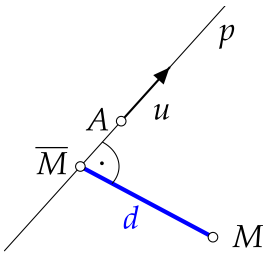
$$T = \left[\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}, \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right] = \frac{A + B + C}{3}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 46. Jsou dány body $A=[4,2,1]$, $B=[-1,-6,4]$, $C=[0,4,7]$. Najděte souřadnice těžiště trojúhelníku ABC.

Definice 4.17 **Vzdáleností bodu** M **od přímky** p rozumíme vzdálenost bodu M od svého kolmého průmětu do přímky p.

Kolmý průmět bodu M do přímky p je takový bod $\overline{M}$ přímky p, že platí $M\overline{M} \perp p$.



Platí:

$$d = \frac{|\boldsymbol{u} \times AM|}{|\boldsymbol{u}|}$$

Příklad 47. Určete vzdálenost bodu $M = [1,4,3]$ od přímky dané parametrickými rovnicemi:

$$x = 3 + t$$
$$y = 2 + 2t$$
$$z = 2$$

Z parametrických rovnic přímky vidíme, že přímka má směrový vektor $\boldsymbol{u} = (1,2,0)$ a bod $A = [3,2,2]$. Určíme souřadnice vektoru $AM = M - A = (-2,2,1)$ a vypočítáme vektorový součin.

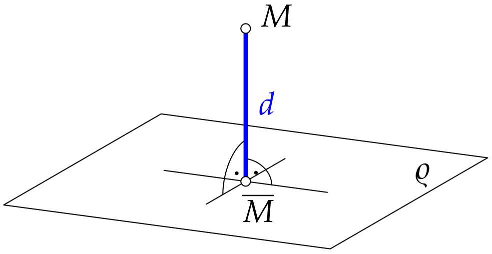
$$\boldsymbol{u} \times AM = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,6)$$

Dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky.

$$d = \frac{|\boldsymbol{u} \times AM|}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{|(2,-1,6)|}{|(1,2,0)|} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{5}} \doteq 2{,}86$$

Definice 4.18 **Vzdáleností bodu** $M = [m_1, m_2, m_3]$ **od roviny** $\varrho : ax + by + cz + d = 0$ rozumíme vzdálenost bodu M od svého kolmého průmětu do roviny ϱ.

Kolmý průmět bodu M do roviny ϱ je bod $\overline{M}$ ležící v rovině ϱ takový, že platí $M\overline{M} \perp \varrho$.



Platí:

$$d = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Příklad 48. Určete vzdálenost bodu $M=[1,4,3]$ od roviny dané obecnou rovnicí $2x-y+5z+7=0$.

Dosadíme do vzorce pro výpočet vzdálenosti bodu od roviny.

$$d=\frac{|am_1+bm_2+cm_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2\cdot 1+(-1)\cdot 4+5\cdot 3+7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}}=\frac{20}{\sqrt{30}}=3,65$$

Úlohy k procvičení

Příklad 49. a) Určete vzdálenost bodu $R=[2,4,3]$ od přímky dané body $P=[2,3,1]$, $Q=[-2,1,0]$.

b) Určete vzdálenost bodu $M=[-2,1,3]$ od roviny $\varrho: 2x+y-2z+5=0$.

• **Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek** spočítáme tak, že na jedné z přímek zvolíme libovolný bod a úlohu převedeme na hledání vzdálenosti tohoto bodu od druhé přímky.

• **Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin** spočítáme tak, že v jedné z rovin zvolíme libovolný bod a úlohu převedeme na hledání vzdálenosti tohoto bodu od druhé roviny.

• **Vzdálenost přímky od rovnoběžné roviny** spočítáme tak, že na přímce zvolíme libovolný bod a úlohu převedeme na hledání vzdálenosti bodu od roviny.

Příklad 50. Určete vzdálenost dvou rovnoběžek p a q.

$$\begin{aligned} x&=2+t \\ p: y&=-1-4t \\ z&=3+3t \end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned} x&=1+-2s \\ q: y&=3+8s \\ z&=2-6s \end{aligned}$$

Přímka p je určena bodem $A=[2,-1,3]$ a vektorem $\boldsymbol{u}=(1,-4,3)$. Vybereme libovolný bod na přímce q (např. volbou $s=0$), tedy $M=[1,3,2]$.
Vypočítáme vektor $AM=M-A=(-1,4,-1)$.
A vypočítáme vektorový součin

$$\boldsymbol{u}\times AM=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=(-8,-2,0)$$

Dosadíme do vzorce pro výpočet vzdálenosti bodu M od přímky p:

$$d=\frac{|\boldsymbol{u}\times AM|}{|\boldsymbol{u}|}=\frac{|(8,-2,0)|}{|(1,-4,3)|}=\frac{\sqrt{68}}{\sqrt{26}}\doteq 1,62$$

Příklad 51. Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin α a β.

$$\alpha: x+y+z=0 \qquad\qquad \beta: 2x-y-z-2=0$$

Vybereme libovolný bod v rovině α, například $M=[1,-1,0]$.
Dosadíme do vzorce pro výpočet vzdálenosti bodu M od roviny β:

$$d = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 - 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \doteq 0,4082$$

Příklad 52. Určete vzdálenost přímky p a roviny α s ní rovnoběžné.

$$p: \begin{aligned} x &= 4 - t \\ y &= 1 - t \\ z &= 3 + 2t \end{aligned} \qquad \alpha: x - z = 0$$

Vybereme libovolný bod na přímce p (např. volbou $t=0$), tedy $M=[4,1,3]$.
Dosadíme do vzorce pro výpočet vzdálenosti bodu M od roviny α:

$$d = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1\cdot 4 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 0|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0,7071$$

Úlohy k procvičení

Příklad 53. a) Určete vzdálenost dvou rovnoběžek.

$$p: \begin{aligned} x &= -7 + 3t \\ y &= -4 + 4t \\ z &= -3 - 2t \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x &= 21 + 6s \\ y &= -5 + 8s \\ z &= 2 - 4s \end{aligned}$$

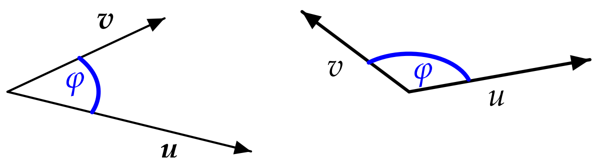
b) Určete vzdálenost rovnoběžných rovin.

$$\alpha: -3x + 7y - 2z + 4 = 0 \qquad \beta: 3x - 7y + 2z + 10 = 0$$

4.2 Odchylky

Definice 4.19 Odchylka dvou vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které platí

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}$$



$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$$

obr. 29: Odchylka vektorů

Příklad 54. Vypočítejte odchylku vektorů $\boldsymbol{u} = (2,4,2)$ a $\boldsymbol{v} = (1,1,0)$.

Vypočítáme skalární součin a velikosti vektorů.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= (2,4,2) \cdot (1,1,0) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 6 \\ |\boldsymbol{u}| &= \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} \\ |\boldsymbol{v}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

A dosadíme do vzorce pro odchylku vektorů.

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|} = \frac{6}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

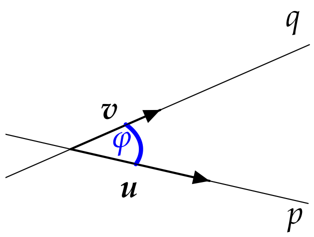
Úlohy k procvičení

Příklad 55. Vypočítejte odchylku vektorů

a) $\boldsymbol{u} = (1,1,3)$, $\boldsymbol{v} = (2,5,-2)$,

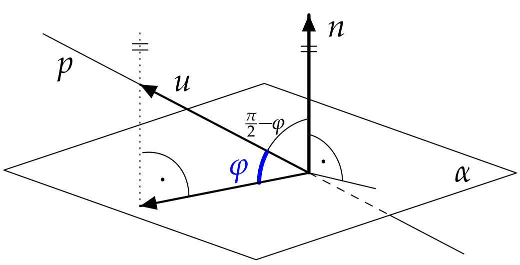
b) $\boldsymbol{u} = (4,5,1)$, $\boldsymbol{v} = (4,-2,-6)$.

• **Odchylka dvou přímek** se počítá jako odchylka jejich směrových vektorů.



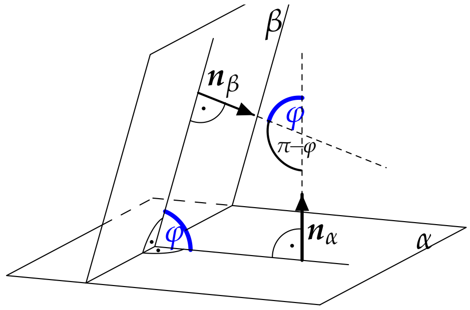
$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}, \ \varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

• **Odchylka přímky od roviny** se počítá pomocí odchylky směrového vektoru přímku od normálového vektoru roviny.



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{n}|}$$

• **Odchylka dvou rovin** se počítá jako odchylka jejich normálových vektorů.



$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}_\beta|}{|\boldsymbol{n}_\alpha| \cdot |\boldsymbol{n}_\beta|}$$

Příklad 56. Určete odchylku přímek p a q.

$$p: \begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 3+t \\ z &= -3t \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x &= 3+r \\ y &= -3-r \\ z &= 1+r \end{aligned}$$

Směrový vektor přímky p je $\boldsymbol{u}=(2,1,-3)$ a přímky q je $\boldsymbol{v}=(1,-1,1)$.

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|} = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-3)\cdot 1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{3}} \doteq 0,3086$$

$$\varphi = \arccos(0,3086) = 1,2571\,\mathrm{rad}$$

Příklad 57. Určete odchylku přímky p od roviny α.

$$p: \begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 1 \\ z &= -3+3t \end{aligned} \qquad \alpha: -2x+4y-z=0$$

Směrový vektor přímky p je $\boldsymbol{u}=(1,0,3)$ a normálový vektor roviny α je $\boldsymbol{n}_\alpha=(-2,4,-1)$.

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_\alpha|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{n}_\alpha|} = \frac{|1\cdot(-2)+0\cdot 4+3\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}\sqrt{(-2)^2+4^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{21}} \doteq 0,3450$$

$$\varphi = \arcsin(0,3450) = 0,3523\,\mathrm{rad}$$

Příklad 58. Určete odchylku rovin α a β.

$$\alpha: x+y+3z+4=0 \qquad \beta: -x+y-2=0$$

Normálový vektor roviny α je $\boldsymbol{n}_\alpha=(1,1,3)$ a roviny β je $\boldsymbol{n}_\beta=(-1,1,0)$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{n}_\beta|}{|\boldsymbol{n}_\alpha|\cdot|\boldsymbol{n}_\beta|} = \frac{|1\cdot(-1)+1\cdot 1+3\cdot 0|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}} = \frac{0}{\sqrt{11}\sqrt{2}} = 0$$

$$\varphi = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 59. a) Určete odchylku přímek p a q.

$$p: \begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 3+t \\ z &= 5+2t \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x &= 3-r \\ y &= 2-r \\ z &= 2r \end{aligned}$$

b) Určete odchylku přímky p od roviny ϱ.

$$p: \begin{aligned} x &= -2+3t \\ y &= 1-2t \\ z &= -5+t \end{aligned} \qquad \varrho: 2x-4y-3z+6=0$$

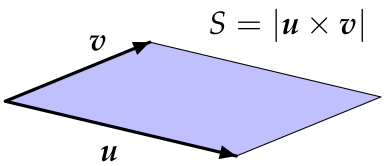
c) Určete odchylku rovin α a β.

$$\alpha: x-y+2z+2=0 \qquad \beta: x+y+2z-3=0$$

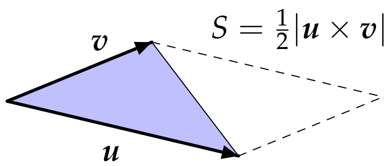
4.3 Obsahy a objemy

Obsah rovnoběžníku o stranách $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ se rovná velikosti vektorového součinu vektorů

$$S = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|\,.$$

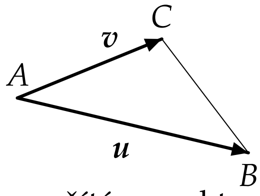


obr. 30: Rovnoběžník



obr. 31: Trojúhelník

Příklad 60. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC; $A=[1,2,4]$, $B=[3,0,7]$, $C=[2,3,5]$.



Nejprve vypočítáme vektory určující trojúhelník.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= AB = B - A = (2,-2,3) \\ \boldsymbol{v} &= AC = C - A = (1,1,1) \end{aligned}$$

A vypočítáme vektorový součin a obsah S.

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5,1,4)$$

$$S = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}|(-5,1,4)| = \frac{\sqrt{42}}{2} = \frac{6,48}{2} = 3,24$$

Úlohy k procvičení

Příklad 61. a) Vypočtěte obsah rovnoběžníku daného stranami $\boldsymbol{u}=(1,1,-2)$, $\boldsymbol{v}=(5,-4,7)$.

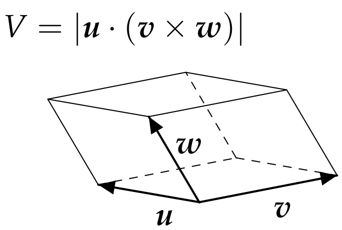
b) Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, přičemž $A=[4,5,-2]$, $B=[1,0,6]$, $C=[7,3,4]$.

Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ je dán vztahem

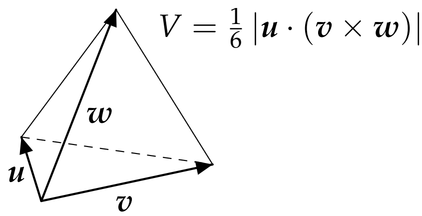
$$V = |\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|$$

Objem čtyřstěnu určeného vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ je dán vztahem

$$V = \frac{1}{6}|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|$$

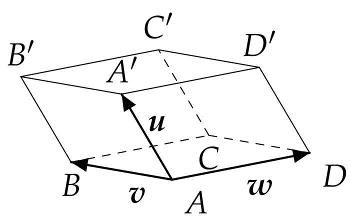


obr. 32: Rovnoběžnostěn



obr. 33: Čtyřstěn

Příklad 62. Je dán rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$ a vrcholy $A = [4,5,0]$, $B = [3,1,1]$, $D = [-1,0,1]$, $A' = [3,2,6]$.
Určete objem tělesa.



Nejprve vypočítáme vektory určující rovnoběžnostěn.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= AA' = A' - A = [3,2,6] - [4,5,0] = (-1,-3,6)\\
\boldsymbol{v} &= AB = B - A = [3,1,1] - [4,5,0] = (-1,-4,1)\\
\boldsymbol{w} &= AD = D - A = [-1,0,1] - [4,5,0] = (-5,-5,1)
\end{aligned}$$

A vypočítáme objem V.

$$\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -5 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -79$$

$$V = |\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u})| = |-79| = 79$$

Úlohy k procvičení

Příklad 63. a) Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu a čtyřstěnu určeného vektory $\boldsymbol{u}=(1,1,-2)$, $\boldsymbol{v}=(5,-4,3)$, $\boldsymbol{w}=(3,-1,0)$.

b) Rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$ je dán vrcholy $A=[0,1,2]$, $B=[5,2,3]$, $D=[-1,6,4]$, $A'=[1,1,6]$. Určete souřadnice zbývajících vrcholů a objem tělesa.

Název: Pracovní sešit do matematiky: Analytická geometrie v prostoru

Katedra: Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Autoři: Jana Bělohlávková, Zuzana Morávková

Místo, rok, vydání: Ostrava, 2023, 1. vydání

Počet stran: 28

Vydala: Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava

Neprodejné

ISBN 978-80-248-4662-0