Matematika I: Pracovní sešit
Diferenciální počet

Zuzana Morávková, Kateřina Kozlová

VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

Obsah

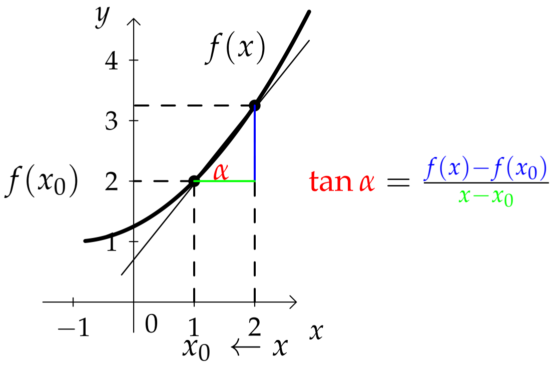
1 Derivace funkce

1.1 Definice derivace

Definice 1.1 Je dána funkce f a bod $x_0 \in D_f$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pak ji nazveme **derivace funkce** f **v bodě** x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.



Obrázek 1: Derivace funkce v bodě

Definice 1.2 Funkce f je definována v každém bodě intervalu (a, b) a má v každém bodě derivaci $f'(x)$. Pak je na (a, b) definovaná funkce f', která každému $x \in (a, b)$ přiřadí hodnotu $f'(x)$. Tuto funkci nazveme **derivace** funkce f. Značíme $f'(x)$, y', $\frac{d f(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

Má-li funkce f derivaci na intervalu, pak říkáme že je na tomto intervalu **diferencovatelná**.

Příklad 1. Pro funkci $f : y = x^2$ spočítáme derivaci $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6$$

Lze najít obecný vztah pro derivaci funkce $y = x^2$?

$$f'(x) = 2x$$

1.2 Derivace elementárních funkcí

Derivace konstantní funkce

$$(c)' = 0$$

Derivace mocninné funkce

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Derivace exponenciální funkce

$$(\mathrm{a}^x)' = \mathrm{a}^x \cdot \ln a \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

Derivace logaritmické funkce

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Derivace goniometrických funkcí

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Derivace cyklometrických funkcí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\mathrm{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Příklad 2. Vypočítejte první derivaci funkce.

a) $y = 4$

b) $y = x^4$

c) $y = \sqrt[3]{x}$

d) $y = x$

e) $y = \frac{1}{x^3}$

Derivace konstantní funkce je $(c)' = 0$

$$\text{a)} \qquad y = 4 \qquad y' = 0$$

Dále budeme derivovat mocninnou funkci podle vzorce $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

$$\text{b)} \qquad y = x^4 \qquad y' = 4x^3$$

$$\text{c)} \qquad y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \qquad y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{d)} \qquad y = x \qquad y' = 1x^{1-1} = 1$$

$$\text{e)} \qquad y = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \qquad y' = (-3)x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

1.3 Vlastnosti derivace

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají na intervalu derivaci. Pak na tomto intervalu platí:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

Derivace součtu

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Derivace součinu

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Derivace podílu

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{pro } g(x) \neq 0$$

Příklad 3. Vypočítejte první derivaci funkce.

a) $y = 7x^3$ b) $y = \dfrac{9}{x^2}$ c) $y = x^4 + 6$ d) $y = 5x^3 - 4x$

Vyskytuje-li se v předpisu funkce násobení konstantou, pak použijeme vzorec $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$.

a) $y = 7x^3 \qquad y' = 7 \cdot 3x^2 = 21x^2$

b) $y = \dfrac{9}{x^2} = 9x^{-2} \qquad y' = 9 \cdot (-2)x^{-3} = \dfrac{-18}{x^3}$

Pro součet funkcí platí $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

c) $y = x^4 + 6 \qquad y' = 4x^3 + 0 = 4x^3$

d) $y = 5x^3 - 4x \qquad y' = 15x^2 - 4$

Úlohy k procvičení

Příklad 4. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = x^5$

b) $y = x^3 + \sqrt{x}$

c) $y = 3x^4 - 5x^2 + 7\sqrt[3]{x}$

d) $y = \dfrac{1}{3}x^5 - \dfrac{2}{5}x$

e) $y = \sqrt{3}x^{12} + 6$

f) $y = -4\sqrt[3]{x^2} + 3x + 2$

g) $y = 4x^2 - 2x + 1$

h) $y = \pi x^3 + \sqrt{5}x^2 + \ln(3)x^7$

i) $y = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5\sqrt{x}}{4} + 9$

Úlohy k procvičení

Příklad 5. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = 5x^3 + \frac{1}{x}$

b) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} - 22$

c) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4} - 4x + 5$

d) $y = \frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{11x^3}{6} + \frac{\pi + 2}{x^3}$

Úlohy k procvičení

Příklad 6. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = 3\sin x + 2\ln x$

b) $y = 4\sin x - \frac{\cos x}{5} + 4$

c) $y = \log_4 x - 5x^2 + 1$

d) $y = x + \frac{3}{x^3} - 2\sin x$

e) $y = 8\mathrm{e}^x + 2^x - 7x^3$

f) $y = \log_2 x - \frac{8}{x} + 5$

Úlohy k procvičení

Příklad 7. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = 2\arcsin x + 3$

b) $y = \frac{2}{3}\tan x + 7x^3 + \frac{19}{5}$

c) $y = -3\arctan x + \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $y = -3 \cdot 4^x - 3 + \frac{2}{5}\operatorname{arccot} x$

e) $y = \frac{\arccos x}{3} + 4x^9 - 3$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 3^x + 5 + 2\cot x$

Příklad 8. Vypočítejte první derivaci funkce

$$y = x^3 \cdot \cos x$$

Pro derivaci součinu platí

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

a tento vzorec aplikujeme na naši funkci $y = x^3 \cdot \cos(x)$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^3 \cdot \cos x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = \\ &= 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x) = x^2\,(3\cos x - x \cdot \sin x) \end{aligned}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 9. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = x \cdot \sin x$

b) $y = x^3 \cdot \ln x + 3$

c) $y = 2 \arcsin x \cdot (x^3 + 7x)$

d) $y = \tan x \cdot (x^3 + x^2 + 1)$

e) $y = \mathrm{e}^x \cdot x^2 + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$

f) $y = -11 \arctan x \cdot (x - 3x^4)$

g) $y = \mathrm{e}^x \cdot x \cdot \sin x$

h) $y = \mathrm{e}^x \cdot x^3 \cdot \cos x$

Příklad 10. Vypočítejte první derivaci funkce

$$y = \frac{x^3}{\cos x}$$

Pro derivaci podílu platí

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

a tento vzorec aplikujeme na naši funkci.

$$y' = \left(\frac{x^3}{\cos x}\right)' = \frac{\left(x^3\right)' \cdot \cos x - x^3 \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$
$$= \frac{3x^2 \cdot \cos x - x^3 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{x^2\,(3\cos x + x \cdot \sin x)}{\cos^2 x}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 11. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \frac{\sin x}{x}$

b) $y = \frac{2\sqrt{x}}{\ln x}$

c) $y = \frac{x^2 + x + 1}{\cos x}$

d) $y = \frac{\tan x}{3x^4} + \frac{5x^3}{2} - 45x - 5$

e) $y = \frac{2^x}{5x - 9}$

f) $y = \frac{7x}{2 \arctan x} - 3x - 1$

g) $y = \frac{7}{2 - 4x}$

h) $y = \frac{x}{x - 1}$

1.4 Derivace složené funkce

Pro derivaci složené funkce $h\,(g(x))$ platí:

$$y' = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Poznámka

Derivace složené funkce je rovna součinu derivace vnější funkce (s původním argumentem) a derivace vnitřní funkce.

$y = (x^2-4)^3$	$y' = 3\,(x^2-4)^2 \cdot (x^2-4)' = 3(x^2-4)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-4)^2$
$y = \sin 3x$	$y' = \cos 3x \cdot (3x)' = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x$
$y = \ln(4x+1)$	$y' = \dfrac{1}{4x+1} \cdot (4x+1)' = \dfrac{1}{4x+1} \cdot 4 = \dfrac{4}{4x+1}$
$y = \sin x^2$	$y' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$
$y = \sin^4 x = (\sin x)^4$	$y' = 4\,(\sin x)^3 \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cdot \cos x$
$y = \arctan(x-3)$	$y' = \dfrac{1}{1+(x-3)^2} \cdot (x-3)' = \dfrac{1}{1+(x-3)^2} \cdot 1 = \dfrac{1}{x^2-6x+10}$

Příklad 12. Vypočítejte první derivaci funkce

a) $y = \sin(4x^2+6x-1)$ b) $y = 8\log^4 x$ c) $y = \arcsin(x^3)$

Pro derivaci složené funkce $y = f\,(g(x))$ platí

$$y' = f'\,(g(x)) \cdot g'(x)$$

a tento vzorec aplikujeme.

a)

$$y' = \left(\sin(4x^2+6x-1)\right)' = \cos(4x^2+6x-1) \cdot (4x^2+6x-1)' = \cos(4x^2+6x-1) \cdot (8x+6)$$

b)

$$y' = \left(8\log^4 x\right)' = 8\log^3 x \cdot (\log x)' = 8\log^3 x \cdot \frac{1}{x\ln 10}$$

c)

$$y' = \left(\arcsin(x^3)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot \left(x^3\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 13. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = (x^3+1)^4$

b) $y = \ln(-7x)$

c) $y = 5\arcsin(8x^2)$

d) $y = \mathrm{e}^{1-4x} + \ln(x^4)$

e) $y = \sqrt{4x^3+3}$

f) $y = \tan^2 x$

g) $y = \sqrt{\cos x}$

h) $y = 2\ln^3 x - 3x$

Příklad 14. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \sin\left(x^3(4x+1)\right)$ b) $y = \cos(x^2)\cdot\sqrt{3x}$

a) Použijeme vzorec pro derivaci složené funkce a součinu:

$$y' = \cos\left(x^3(4x+1)\right)\cdot\left(3x^2(4x+1)+x^3 4\right) = \left(16x^3+3x^2\right)\cdot\cos\left(x^3(4x+1)\right)$$

b) Funkci si nejprve napíšeme ve tvaru vhodnějším pro derivaci

$$y = \cos(x^2)\cdot\sqrt{3x} = \cos(x^2)\cdot(3x)^{\frac{1}{2}}$$

A použijeme vzorec pro derivaci součinu a složené funkce:

$$y' = \left(\cos(x^2)\right)'\cdot(3x)^{\frac{1}{2}} + \cos(x^2)\cdot\left((3x)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$
$$= -\sin(x^2)\cdot 2x\cdot(3x)^{\frac{1}{2}} + \cos(x^2)\cdot\frac{1}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3 = -\sin(x^2)\cdot 2x\cdot\sqrt{3x} + \cos(x^2)\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 15. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \sin x\cdot(4x^3-3x+2)^3$

b) $y = 4\,\mathrm{arccot}(x^3-x)\cdot(2x-1)$

c) $y = \dfrac{5x-7}{\sin(3x)} + \log(7-2x)$

d) $y = \ln\left(x^2\cdot(3x-1)\right)$

e) $y = x\cdot 2^{x^2-1}$

f) $y = \dfrac{2}{5}\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot x^4+3}$

Příklad 16. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \sqrt[3]{7\ln(x^2+x+2)}$ b) $y = 3^{\frac{\ln(5x)}{\cos x}}$

a) Funkci si nejprve napíšeme ve tvaru vhodnějším pro derivaci

$$y = \sqrt[3]{7\ln(x^2+x+2)} = \left(7\ln(x^2+x+2)\right)^{\frac{1}{3}}$$

A použijeme vzorec pro derivaci součinu a složené funkce:

$$y' = \frac{1}{3}\left(7\ln(x^2+x+2)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{7}{x^2+x+2}\cdot(2x+1)$$

b)

$$y' = 3^{\frac{\ln(5x)}{\cos x}} = 3^{\frac{\ln(5x)}{\cos x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{\frac{5}{5x}\cos x - \ln(5x)(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$
$$= 3^{\frac{\ln(5x)}{\cos x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{\frac{1}{1x}\cos x + \ln(5x)\sin x}{\cos^2 x}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 17. Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

b) $y = \ln^2(4x^7 - 5x^2 + 1)$

c) $y = \mathrm{e}^{\sin x}$

d) $y = \dfrac{x \cdot \ln x}{1 + \ln x}$

e) $y = \ln \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = 2^{\frac{1}{\cos x}}$

1.5 Derivace vyšších řádů

Definice 1.3 Nechť má funkce $f(x)$ derivaci v intervalu I. Pak funkci $(f'(x))'$ nazveme **druhou derivací funkce** a značíme $f''(x)$.

Obdobně definujeme derivaci n-tého řádu

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' .$$

Příklad 18. Vypočítejte první, druhou a třetí derivaci funkce:

$$y = 2x^4 + 6x^3 - x^2 + 6x - 1$$

První derivaci již počítat umíme. Druhou derivaci spočítáme derivací první derivace. Třetí derivaci spočítáme derivací druhé derivace.

$$\begin{aligned} y &= 2x^4 + 6x^3 - x^2 + 6x - 1 \\ y' &= 8x^3 + 18x^2 - x + 6 \\ y'' &= (y')' = 24x^2 + 36x - 1 \\ y''' &= (y'')' = 48x^2 + 36 \end{aligned}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 19. Vypočítejte druhou derivaci explicitní funkce a výsledek upravte:

a) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

b) $y = \sin(2x) + \cos(2x)$

c) $y = x\big(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\big)$

d) $y = \mathrm{e}^{\sin x}$

2 Aplikace derivace

2.1 Tečna a normála

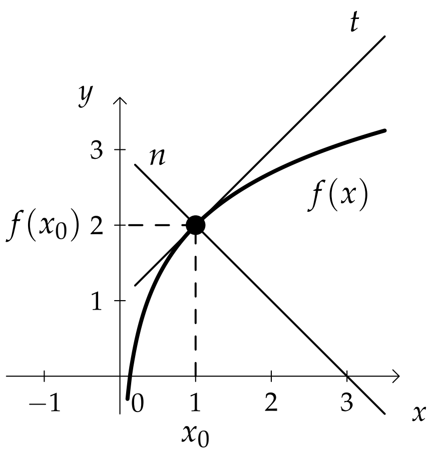
Definice 2.4 Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci. Přímku t, procházející bodem $[x_0; f(x_0)]$ a mající směrnici rovnu hodnotě derivace v x_0 nazveme **tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě** x_0 a je dána předpisem:

$$t: \; y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Přímku n, procházející bodem $[x_0; f(x_0)]$ a kolmou k tečně nazveme **normála ke grafu funkce $f(x)$ v bodě** x_0 a je dána předpisem:

$$n: \; y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

V bodě ve kterém nemá funkce derivaci tečna neexistuje.



Obrázek 2: Tečna a normála ke grafu funkce

Příklad 20. Určete rovnici tečny a normály v bodě $x_0 = 1$ ke grafu funkce $f(x) = 2\ln(x)$

Nejprve spočítáme funkční hodnotu

$$f(x) = 2\ln(x) \qquad f(x_0) = f(1) = 2\ln(1) = 0$$

Dále potřebujeme spočítat hodnotu derivace v x_0

$$f'(x) = \frac{2}{x} \qquad f'(x_0) = f'(1) = \frac{2}{1} = 2$$

A nakonec dosadíme do předpisu tečny

$$\begin{aligned} t: y - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ y - 0 &= 2(x - 1) \\ y &= 2x - 2 \end{aligned}$$

a do předpisu normály

$$
\begin{aligned}
n : y - f(x_0) &= -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \\
y - 0 &= -\frac{1}{2}(x - 1) \\
y &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Úlohy k procvičení

Příklad 21. Určete obecnou rovnici tečny a normály v bodě x_0 ke grafu funkce:

a) $y = \dfrac{8}{4 + x^2} \quad x_0 = 2$

b) $y = \ln x, \quad x_0 = \mathrm{e}$

c) $y = x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1$

d) $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}, \quad x_0 = 0$

Úlohy k procvičení

Příklad 22. Určete rovnice tečen ke grafu funkce, které jsou rovnoběžné s přímkou p:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 10, \quad p:\ 4x + y = 0$

b) $y = x^3 - 12x, \quad p\ : y = 2$

Úlohy k procvičení

Příklad 23. Určete rovnice tečen ke grafu funkce, které jsou rovnoběžné s osou x:

a) $y = x^4 - 12x$

b) $y = x^2 + 4x - 5$

Úlohy k procvičení

Příklad 24. Určete rovnice tečen ke grafu funkce, které jsou kolmé k přímce p:

a) $y = x^2 - 3x + 4, \quad p\ : x + y - 1 = 0$

b) $y = x^2 + 4x - 5, \quad p:\ x - 2y = 0$

Příklad 25. Určete rovnici tečny v bodě $x_0 = 0$ ke grafu funkce $f(x) = \sin x$. Porovnejte hodnoty tečny a funkce pro malé hodnoty.

Nejprve spočítáme funkční hodnotu

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \qquad & f(x_0) &= f(0) = \sin 0 = 0 \\
f'(x) &= \cos x \qquad & f'(x_0) &= f'(0) = \cos 0 = 1
\end{aligned}
$$

Dosadíme do předpisu tečny

$$
\begin{aligned}
t:\ y - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\
y - 0 &= 1(x - 0) \\
y &= x
\end{aligned}
$$

funkce $y = \sin x$	tečna $y = x$
$\sin(0,1) = 0,0998$	$0,1$
$\sin(0,2) = 0,1986$	$0,2$
$\sin(0,3) = 0,2955$	$0,3$

2.2 Taylorův polynom

Funkci $f(x)$ lze nahradit v okolí bodu x_0 jednodušší funkcí, například polynomem stupně n, který bude mít v bodě x_0 stejné hodnoty derivací až do řádu n.

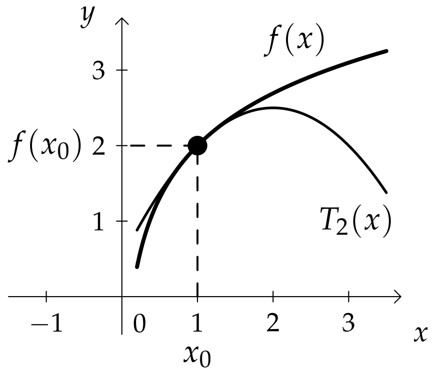
Definice 2.5 Nechť je dána funkce $f(x)$, která má v bodě $x_0 \in D_f$ derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$. Pak polynom:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazveme **Taylorův polynom funkce $f(x)$ stupně n v bodě x_0**.

Poznámka

Taylorův polynom prvního stupně je tečna.



Obrázek 3: Taylorův polynom

Příklad 26. Napište Taylorův polynom třetího stupně v bodě $x_0 = 1$ pro funkci $f(x) = \ln(x)$.

Spočítáme derivace až do třetího stupně a vypočítáme jejich hodnoty v bodě $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) & f(1) &= \ln(1) = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -\frac{1}{1^2} = -1 \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3} & f^{(3)}(1) &= \frac{2}{1^3} = 2 \end{aligned}$$

Dosadíme do předpisu Taylorova polynomu

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 = \\ &= 0 + \frac{1}{1}(x - 1) + \frac{-1}{2}(x - 1)^2 + \frac{2}{6}(x - 1)^3 = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 \end{aligned}$$

Příklad 27. Pomocí Taylorova polynomu z předchozího příkladu spočítejte hodnotu $\ln(1,1)$.

Dosadíme $1,1$ do předpisu Taylorova polynomu

$$
\begin{aligned}
T_3(x) &= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \\
T_3(1,1) &= 1,1 - 1 - \frac{1}{2}(1,1-1)^2 + \frac{1}{3}(1,1-1)^3 = \\
&= 0,1 - \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^3}{3} = 0,1 - \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{3} = \\
&= 0,1 - 0,005 + 0,000\overline{3} \doteq 0,0953
\end{aligned}
$$

Přesná hodnota je $\ln(1,1) = 0.09531\ldots$

Příklad 28. Napište Taylorův polynom čtvrtého stupně v bodě $x_0 = 0$ funkce $f(x) = \cos(x)$.

Spočítáme derivace až do čtvrtého stupně a vypočítáme jejich hodnoty v bodě $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x) & f(0) &= \cos(0) = 1 \\
f'(x) &= -\sin(x) & f'(0) &= -\sin(0) = 0 \\
f''(x) &= -\cos(x) & f''(0) &= -\cos(0) = -1 \\
f^{(3)}(x) &= \sin(x) & f^{(3)}(0) &= \sin(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos(x) & f^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1
\end{aligned}
$$

Dosadíme do předpisu Taylorova polynomu

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = \\
&= 1 + \frac{0}{1}x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4
\end{aligned}
$$

Úlohy k procvičení

Příklad 29. Napište Taylorův polynom n-tého stupně $T_n(x)$ v bodě x_0 pro funkci:

a) $f : y = \sqrt{x},\ x_0 = 1,\ n = 3$

b) $f : y = \cos\frac{x}{2},\ x_0 = \frac{\pi}{2},\ n = 3$

c) $f : y = \sin 2x,\ x_0 = 0,\ n = 4$

d) $f : y = \frac{1}{x},\ x_0 = 1,\ n = 2$

e) $f : y = \mathrm{e}^x,\ x_0 = 0,\ n = 6$

f) $f : y = \sin x,\ x_0 = 0,\ n = 6$

2.3 l'Hospitalovo pravidlo

V kapitole o limitách jsme uvedli několik vět, podle kterých jsme počítali limity. V některých případech však tyto věty nelze použít. Nyní si ukážeme jak spočítat limity typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Věta 2.1 Nechť

1. $\lim_{x \to b} f(x) = 0$, $\lim_{x \to b} g(x) = 0$
   (nebo $\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to b} g(x) = \pm\infty$)
2. existuje $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

pak existuje limita $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ a je rovna číslu A. Tedy

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Poznámka

Limity vedoucí na neurčité výrazy typu

$$0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty,\ \infty^\infty,\ 0^\infty$$

lze převést na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ a pak řešit l'Hospitalovým pravidlem

Příklad 30. Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{3x}$ b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x}$

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{3x} = \text{„typ } \frac{0}{0}\text{“} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\cos^2(x)} = \frac{1}{3}$$

b)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \text{„typ } \frac{0}{0}\text{“} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{2x}{2x - 1} = \frac{4}{3}$$

c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \text{„typ } \frac{0}{0}\text{“} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Příklad 31. Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem (nejprve limitu převeďte na vhodný typ)

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \cdot \ln(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right)$

a) Ukážeme, jak lze limitu typu „$0\cdot\infty$" převede na typ „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$".

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\cdot\ln(x) = \text{„typ } 0\cdot\infty\text{ “} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \text{„typ } \frac{\infty}{\infty}\text{ “} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$$

b) Ukážeme, jak lze limitu typu „$\infty-\infty$" převede na typ „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$".

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right) = \text{„typ } \infty-\infty\text{ “} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)-x}{x\cdot\ln(x+1)} = \text{„typ } \frac{0}{0}\text{ “} \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-(x+1)}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{(x+1)\ln(x+1)+x} =$$

$$= \text{„typ } \frac{0}{0}\text{ “} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\ln(x+1)+(x+1)\frac{1}{x+1}+1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\ln(x+1)+2} = -\frac{1}{2}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 32. Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x^2-x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$

g) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^{2x}}{x^3}$

3 Průběh funkce

3.1 Monotonnost funkce

Věta 3.2 Platí-li $f'(x_0) > 0$, pak je funkce v tomto bodě rostoucí. Platí-li $f'(x_0) < 0$, pak je funkce v tomto bodě klesající.

Věta 3.3 Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu I a platí-li na tomto intervalu $f'(x) > 0$, pak je funkce $f(x)$ na tomto intervalu rostoucí. Platí-li $f'(x) < 0$, pak je funkce klesající.

Poznámka

Intervaly, na kterých je funkce rostoucí nebo klesající nazveme **intervaly monotonnosti**.

3.2 Extrémy funkce

Definice 3.6 Řekneme, že funkce $f(x)$ má **v bodě** x_0 **lokální maximum** (resp. **lokální minimum**), existuje-li takové okolí bodu x_0, že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))\,.$$

Platí-li $f(x) < f(x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0)$), pak řekneme, že má **ostré lokální maximum** (resp. **ostré lokální minimum**).

Poznámka

Má-li funkce v bodě lokální maximum nebo lokální minimum, říkáme, že má v bodě **lokální extrém**. Má-li funkce v bodě ostré lokální maximum nebo ostré lokální minimum, říkáme, že má v bodě **ostrý lokální extrém**.

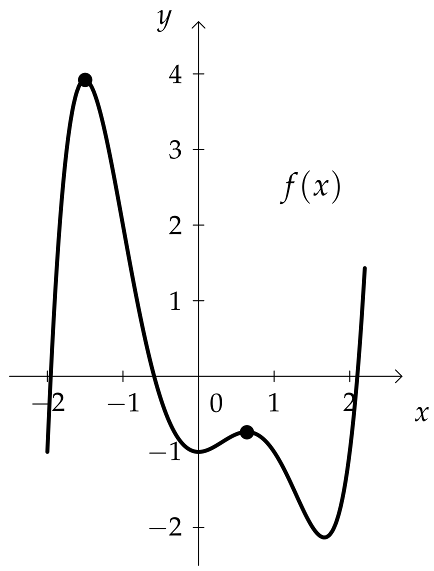
Věta 3.4 (nutná podmínka existence lokálního extrému)
Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace. Pak platí:

$$f'(x_0) = 0\,.$$

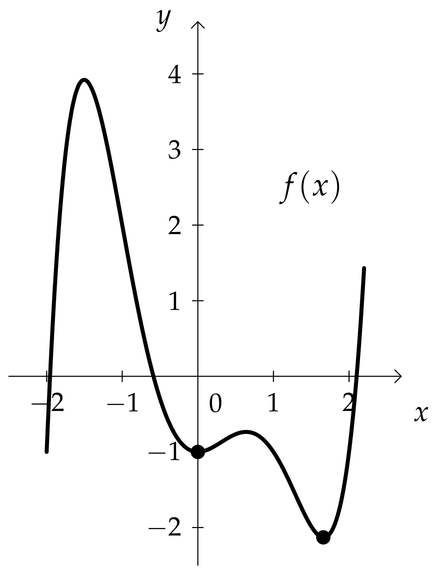
Poznámka

Funkce může mít lokální extrém pouze v bodech, ve kterých buď neexistuje derivace nebo je derivace rovna nule.

Definice 3.7 Bod ve kterém platí $f'(x_0) = 0$ nazveme **stacionárním bodem**.



Obrázek 4: Lokální maximum



Obrázek 5: Lokální minimum

Věta 3.5 Nechť platí $f'(x_0) = 0$ a existuje druhá derivace $f''(x_0)$. Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum. Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum.

Poznámka

V bodech, ve kterých je $f''(x) = 0$ nelze existenci lokálního extrému vyšetřit podle této věty a je nutno použít jiný postup.

Postup při určování lokálních extrémů

(i) Určíme definiční obor funkce.

(ii) Určíme derivaci funkce.

(iii) Najdeme stacionární body a body, ve kterých derivace neexistuje.

(iv) Určíme znaménko derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě (iii). Kde je $f'(x) > 0$ je funkce rostoucí a kde je $f'(x) < 0$ je funkce klesající.

(v) Lokální maximum je v bodech, ve kterých funkce přechází z rostoucí na klesající. Lokální minimum je v bodech, ve kterých funkce přechází z klesající na rostoucí.

Příklad 33. Najděte intervaly monotonnosti (kde funkce roste a kde klesá) a lokální extrémy (lokální maximum a minimum).

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = \mathbb{R}\,.$$

2. Určíme derivaci funkce:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x\,.$$

3. Najdeme stacionární body a body, ve kterých první derivace neexistuje.
Stacionární body najdeme tak, že první derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 6x &= 0 \\ 3x(x+2) &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0,\ x = -2\,. \end{aligned}$$

Získali jsme dva stacionární body: $x = -2$ a $x = 0$.
Nyní zjistíme, máme-li nějaké body, ve kterých první derivace neexistuje.
Určíme definiční obor první derivace:

$$D(f') = \mathbb{R}\,.$$

Protože $D(f') = D(f)$, pak nemáme žádné body, ve kterých $f'(x)$ neexistuje.

4. Určíme znaménko derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě (iii).

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max. $f(-2) = 4$	$\searrow$	lok. min. $f(0) = 0$	$\nearrow$

Z tabulky vidíme, že první derivace nabývá kladných hodnot na intervalech $(-\infty;-2)$, $(0;\infty)$ a záporných hodnot na intervalu $(-2;0)$, tedy:
funkce je rostoucí: $(-\infty;-2)$, $(0;\infty)$,
funkce je klesající: $(-2;0)$.

5. Dále z tabulky vidíme, že pro $x = -2$ funkce přechází z rostoucí na klesající a pro $x = 0$ funkce přechází z klesající na rostoucí, tedy:
lokální maximum v bodě $[-2;4]$,
lokální minimum v bodě $[0;0]$.

Příklad 34. Najděte intervaly monotonnosti (kde funkce roste a kde klesá) a lokální extrémy (lokální maximum a minimum).

$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+3$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f)=\mathbb{R}\,.$$

2. Určíme derivaci funkce:
Zadanou funkci můžeme upravit do vhodnějšího tvaru pro derivování:

$$f\left(x\right)=\left(x+1\right)^{\frac{2}{3}}+3\,.$$

Derivujeme:

$$f'\left(x\right)=\frac{2}{3}\left(x+1\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,.$$

3. Najdeme stacionární body a body, ve kterých první derivace neexistuje.
Stacionární body najdeme tak, že první derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}=0\,.$$

Tato rovnice nemá řešení, nemáme tedy žádný stacionární bod.
Nyní zjistíme, máme-li nějaké body, ve kterých první derivace neexistuje.
Určíme definiční obor první derivace:

$$D(f')=\mathbb{R}\setminus\{-1\}\,.$$

První derivace neexistuje pro $x=-1$, a protože tento bod patří do definičního oboru dané funkce, může v něm nastat extrém.

4. Určíme znaménko derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě (iii).

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;\infty)$
$f'\left(x\right)$	$-$	neexistuje	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min. $f(-1)=3$	$\nearrow$

Z tabulky vidíme, že první derivace nabývá kladných hodnot na intervalu $(-1;\infty)$ a záporných hodnot na intervalu $(-\infty;-1)$, tedy:
funkce je rostoucí: $(-1;\infty)$,
funkce je klesající: $(-\infty;-1)$.

5. Dále z tabulky vidíme, že pro $x=-1$ funkce přechází z klesající na rostoucí, tedy:
lokální minimum v bodě $[-1;3]$.

Příklad 35. Najděte intervaly monotonnosti (kde funkce roste a kde klesá) a lokální extrémy (lokální maximum a minimum).

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

2. Určíme derivaci funkce:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(2x-2-x)}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

3. Najdeme stacionární body a body, ve kterých první derivace neexistuje.
   Stacionární body najdeme tak, že první derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0,\ x = 2. \end{aligned}$$

   Získali jsme dva stacionární body: $x = 0$ a $x = 2$.
   Nyní zjistíme, máme-li nějaké body, ve kterých první derivace neexistuje.
   Určíme definiční obor první derivace:

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

   Protože $D(f') = D(f)$, pak nemáme žádné body, ve kterých f′(x) neexistuje.

4. Určíme znaménko derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě 1 a 3.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	x	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max. $f(0)=0$	$\searrow$	x	$\searrow$	lok. min. $f(2)=4$	$\nearrow$

   Z tabulky vidíme, že první derivace nabývá kladných hodnot na intervalech $(-\infty;0), (2;\infty)$ a záporných hodnot na intervalech $(0;1), (1;2)$, tedy:
   funkce je rostoucí: $(-\infty;0), (2;\infty)$,
   funkce je klesající: $(0;1), (1;2)$.

5. Dále z tabulky vidíme, že pro $x = 0$ funkce přechází z rostoucí na klesající a pro $x = 2$ funkce přechází z klesající na rostoucí, tedy:
   lokální maximum v bodě $[0;0]$,
   lokální minimum v bodě $[2;4]$.

Příklad 36. Najděte intervaly monotonnosti (kde funkce roste a kde klesá) a lokální extrémy (lokální maximum a minimum).

$$f(x) = \ln(x+1) + 2$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = (-1; \infty)\,.$$

2. Určíme derivaci funkce:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}\,.$$

3. Najdeme stacionární body a body, ve kterých první derivace neexistuje.
   Stacionární body najdeme tak, že první derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{1}{x+1} = 0\,.$$

   Tato rovnice nemá řešení, nemáme tedy žádný stacionární bod.
   Nyní zjistíme, máme-li nějaké body, ve kterých první derivace neexistuje.
   Určíme definiční obor první derivace:

$$D(f') = (-1; \infty)\,.$$

   Protože $D(f') = D(f)$, pak nemáme žádné body, ve kterých $f'(x)$ neexistuje.

4. Protože nemáme žádné body, ve kterých může nastat extrém, určíme znaménko derivace pouze pro daný definiční obor.

x	$(-\infty; -1\rangle$	$(-1; \infty)$
$f'(x)$	x	$+$
$f(x)$	x	$\nearrow$

   Z tabulky vidíme, že první derivace nabývá kladných hodnot na intervalu $(-1; \infty)$, tedy:
   funkce je rostoucí: $(-1; \infty)$.

5. Funkce nemá extrémy.

Úlohy k procvičení

Příklad 37. Najděte intervaly monotonnosti (kde funkce roste a kde klesá) a lokální extrémy (lokální maximum a minimum).

a) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 + 27x^2$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

c) $f(x) = x - 2\ln(x+1)$

d) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln x$

e) $f(x) = x - 5\arctan x$

f) $f(x) = x - 2\sin x$

g) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 18x^2 + 12$

h) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

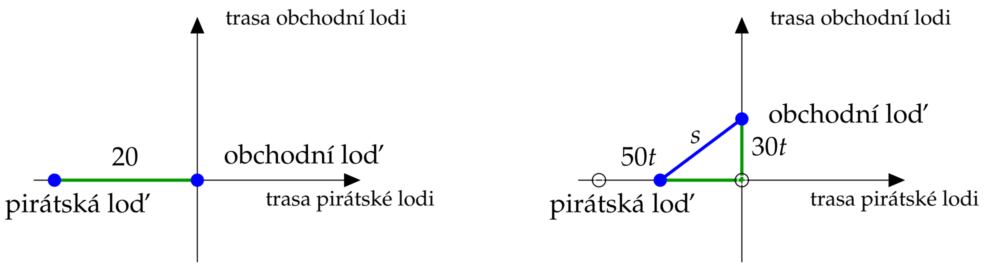
i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

j) $f(x) = (x-1)e^{2x-1}$

k) $f(x) = x^2 e^{3x-2}$

Příklad 38. Trasy dvou lodí se protínají v pravém úhlu. Když je obchodní loď v průsečíku tras, tak je pirátská ještě 20 km vzdálená od onoho průsečíku. Obchodní loď jede rychlostí 30 km/h a pirátská 50 km/h.
Jaká je minimální vzdálenost, kterou od sebe lodi budou mít?

Nakreslíme si polohu lodí podle popisu v zadání, tedy pro čas $t = 0$. Za čas t ujede obchodní loď trasu o délce $30t$ a pirátská loď trasu o délce $50t$ (druhý obrázek).



Poloha lodí v čase $t = 0$ Poloha lodí v čase t

Vzdálenost lodí je v čase t vyjádřená vztahem: $s^2 = (30t)^2 + (20 - 50t)^2$. Vyjádříme vzdálenost jako funkci proměnné t:

$$s(t) = \sqrt{(30t)^2 + (20-50t)^2}$$

Nejmenší vzdálenost najdeme jako minimum této funkce:

$$s'(t) = 0$$

$$\frac{2 \cdot 30^2 t - 100(20-50t)}{2\sqrt{(30t)^2 + (20-50t)^2}} = 0$$

$$2 \cdot 30^2 t - 100(20-50t) = 0$$

$$t = \frac{5}{17} \doteq 0.29 \text{ hod}$$

$$s(0.29) = 10.289 \text{ km}$$

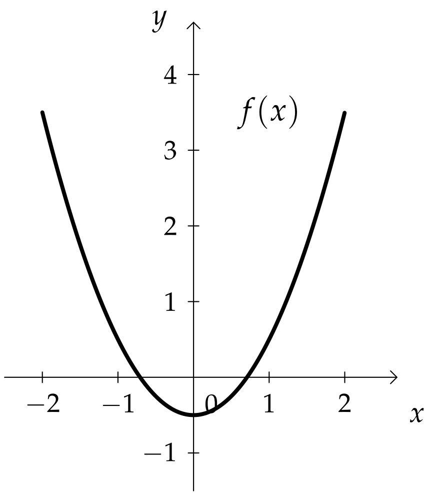
3.3 Konvexnost a konkávnost

Definice 3.8 Nechť má funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0. Řekneme, že **funkce $f(x)$ je v bodě x_0 konvexní (resp. konkávní)**, jestliže existuje okolí bodu takové, že pro všechny x z tohoto okolí je graf funkce nad (resp. pod) tečnou:

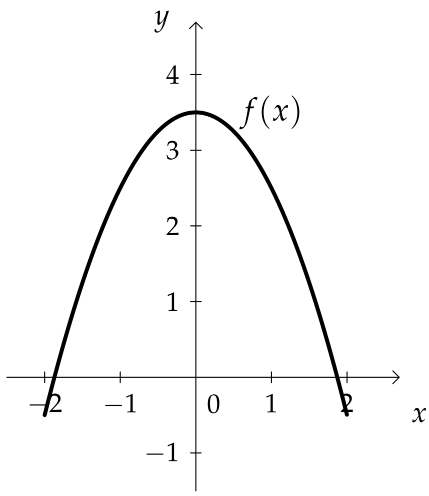
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

resp.

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Obrázek 6: Konvexní funkce



Obrázek 7: Konkávní funkce

Definice 3.9 Řekneme, že **funkce $f(x)$ je konvexní (resp. konkávní) v intervalu** $I \subset D_f$, jestliže je konvexní (resp. konkávní) v každém bodě intervalu I.

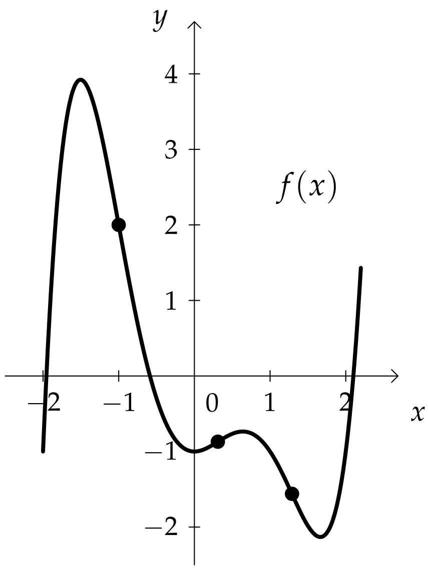
Věta 3.6 Nechť $f''(x_0) > 0$, pak je $f(x)$ v bodě x_0 konvexní. Nechť $f''(x_0) < 0$, pak je $f(x)$ v bodě x_0 konkávní.

3.4 Inflexní body

Definice 3.10 Nechť má funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0. Přechází-li graf funkce v bodě x_0 z polohy pod tečnou do polohy nad tečnou (nebo naopak) nazveme bod x_0 **inflexním bodem** funkce $f(x)$.

Věta 3.7 (nutná podmínka existence inflexního bodu)
Je-li x_0 inflexní bod funkce $f(x)$ a má-li $f(x)$ v tomto bodě druhou derivaci, pak

$$f''(x_0) = 0\,.$$



Obrázek 8: Inflexní body

Poznámka

Funkce může mít inflexi pouze v bodech, ve kterých buď neexistuje druhá derivace nebo je druhá derivace rovna nule.

Věta 3.8 Je-li $f'(x)$ spojitá v x_0 a druhá derivace $f''(x)$ mění v x_0 znaménko, pak x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$.

Poznámka

Změna znaménka druhé derivace znamená změnu konvexnosti na konkávnost (nebo naopak).

Postup při určování konvexnosti, konkávnosti a inflexních bodů

(i) Určíme definiční obor funkce.

(ii) Určíme druhou derivaci funkce.

(iii) Najdeme body, ve kterých je druhá derivace rovna nule nebo neexistuje.

(iv) Určíme znaménko druhé derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě (iii). Kde je $f''(x) > 0$ je funkce konvexní a kde je $f''(x) < 0$ je funkce konkávní

(v) Inflexní body jsou ty body, ve kterých druhá derivace mění znaménko, tedy funkce přechází z konvexní na konkávní nebo naopak.

Příklad 39. Najděte intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní, najděte její inflexní body.

$$f(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 12$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = \mathbb{R}\,.$$

2. Určíme druhou derivaci funkce:

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 - 48x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 36x - 48\,.$$

3. Najdeme body, ve kterých je druhá derivace rovna nule nebo neexistuje.
   Druhou derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x^2 - 36x - 48 &= 0 \\ 12(x-4)(x+1) &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1,\ x = 4\,. \end{aligned}$$

   Získali jsme dva body v nichž je druhá drivace rovna nule: $x = -1$ a $x = 4$.
   Nyní zjistíme, máme-li nějaké body, ve kterých druhá derivace neexistuje.
   Určíme definiční obor druhé derivace:

$$D(f'') = \mathbb{R}\,.$$

   Protože $D(f'') = D(f)$, pak nemáme žádné body, ve kterých $f''(x)$ neexistuje.

4. Určíme znaménko druhé derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě (iii).

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;4)$	4	$(4;\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	infex. bod $f(-1) = -29$	$\cap$	infex. bod $f(4) = -524$	$\cup$

   Z tabulky vidíme, že druhá derivace nabývá kladných hodnot na intervalech $(-\infty;-1)$, $(4;\infty)$ a záporných hodnot na intervalu $(-1;4)$, tedy:
   funkce je konvexní: $(-\infty;-1)$, $(4;\infty)$,
   funkce je konkávní: $(-1;4)$.

5. Dále z tabulky vidíme, že pro $x = -1$ funkce přechází z konvexní na konkávní a pro $x = 4$ funkce přechází z konkávní na konvexní, tedy:
   inflexní body: $[-1;-29]$, $[4;-524]$.

Příklad 40. Najděte intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní, najděte její inflexní body.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5} + 5$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = \mathbb{R}\,.$$

2. Určíme druhou derivaci funkce:
   Zadanou funkci můžeme upravit do vhodnějšího tvaru pro derivování:

$$f(x) = (x-1)^{\frac{5}{3}} + 5\,.$$

   Derivujeme:

$$f'(x) = \frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}$$
$$f''(x) = \frac{10}{9}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,.$$

3. Najdeme body, ve kterých je druhá derivace rovna nule nebo neexistuje.
   Druhou derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:

$$f''(x) = 0$$
$$\frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = 0\,.$$

   Tato rovnice nemá řešení, nemáme tedy žádný bod v němž je druhá derivace rovna nule.
   Určíme definiční obor druhé derivace:

$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,.$$

   Druhá derivace neexistuje pro $x = 1$. V tomto bodě může být inflexní bod.

4. Určíme znaménko druhé derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě (iii).

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;\infty)$
$f''(x)$	$-$	neexistuje	$+$
$f(x)$	$\cap$	infex. bod $f(1) = 5$	$\cup$

   Z tabulky vidíme, že druhá derivace nabývá záporných hodnot na intervalu $(-\infty;1)$ a kladných hodnot na intervalu $(1;\infty)$, tedy:
   funkce je konkávní: $(-\infty;1)$,
   funkce je konvexní: $(1;\infty)$.

5. Dále z tabulky vidíme, že pro $x = 1$ funkce přechází z konkávní na konvexní, tedy:
   inflexní bod: $[1;5]$.

Příklad 41. Najděte intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní, najděte její inflexní body.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3}$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. Určíme druhou derivaci funkce:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot x^3 - \left(2x^2 - 3\right) 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 \left(4x^2 - 6x^2 + 9\right)}{x^6} = \frac{-2x^2 + 9}{x^4}$$
$$f''(x) = \frac{-4x \cdot x^4 - \left(-2x^2 + 9\right) 4x^3}{x^8} = \frac{x^3 \left(-4x^2 + 8x^2 - 36\right)}{x^8} = \frac{4\left(x^2 - 9\right)}{x^5}.$$

3. Najdeme body, ve kterých je druhá derivace rovna nule nebo neexistuje.
Druhou derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{4\left(x^2 - 9\right)}{x^5} &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1,\ x = 4. \end{aligned}$$

Získali jsme dva body v nichž je druhá drivace rovna nule $x = -3$ a $x = 3$.
Nyní zjistíme, máme-li nějaké body, ve kterých druhá derivace neexistuje.
Určíme definiční obor druhé derivace:

$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Protože $D(f'') = D(f)$, pak nemáme žádné body, ve kterých $f''(x)$ neexistuje.

4. Určíme znaménko druhé derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě (iii).

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	x	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	infex. bod $f(-3) = \frac{5}{9}$	$\cup$	x	$\cap$	infex. bod $f(3) = -\frac{5}{9}$	$\cup$

Z tabulky vidíme, že druhá derivace nabývá kladných hodnot na intervalech $(-3; 0)$, $(3; \infty)$ a záporných hodnot na intervalech $(-\infty; -3)$, $(0; 3)$, tedy:
funkce je konvexní: $(-3; 0)$, $(3; \infty)$,
funkce je konkávní: $(-\infty; -3)$, $(0; 3)$.

5. Dále z tabulky vidíme, že pro $x = -3$ funkce přechází z konkávní na konvexní a pro $x = 3$ funkce přechází z konkávní na konvexní, tedy:
inflexní body: $\left[-3; \frac{5}{9}\right]$, $\left[3; -\frac{5}{9}\right]$.

Příklad 42. Najděte intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní, najděte její inflexní body.

$$f(x) = x^4 - 2x + 1$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

2. Určíme druhou derivaci funkce:

$$f'(x) = 4x^3 - 2$$
$$f''(x) = 12x^2.$$

3. Najdeme body, ve kterých je druhá derivace rovna nule nebo neexistuje.
   Druhou derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:

$$f''(x) = 0$$
$$12x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0.$$

   Získali jsme jeden bod v němž je druhá drivace rovna nule $x = 0$. Nyní zjistíme, máme-li nějaké body, ve kterých druhá derivace neexistuje.
   Určíme definiční obor druhé derivace:

$$D(f'') = \mathbb{R}.$$

   Protože $D(f'') = D(f)$, pak nemáme žádné body, ve kterých $f''(x)$ neexistuje.

4. Určíme znaménko druhé derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě (iii).

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	není infex. bod	$\cup$

   Z tabulky vidíme, že druhá derivace nabývá kladných hodnot na intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$ a záporných hodnot nenabývá, tedy:
   funkce je konvexní na celém definičním oboru.

5. Dále z tabulky vidíme, že pro $x = 0$ funkce nepřechází z konvexní na konkávní ani z konkávní na konvexní, tedy funkce nemá inflexní body.

Úlohy k procvičení

Příklad 43. Najděte intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní, najděte její inflexní body.

a) $f(x) = 3x^5 - 40x^3 + x - 2$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$

e) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{e^x}$

f) $f(x) = \dfrac{2-x}{(x-3)^2}$

g) $f(x) = x^2 + 2\ln x$

3.5 Asymptoty

Asymptoty jsou přímky, ke kterým se „blíží“ graf funkce.

Definice 3.11 Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na okolí nekonečna. Říkáme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptota se směrnicí** (v nekonečnu), jestliže existují vlastní limity:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

Poznámka

Asymptota v $-\infty$ se počítá obdobně, tj. $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx)$$

Definice 3.12 Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na okolí bodů x_0. Říkáme, že přímka $x = x_0$ je **svislá asymptota**, jestliže aspoň jedna jednostranná limita je nevlastní:

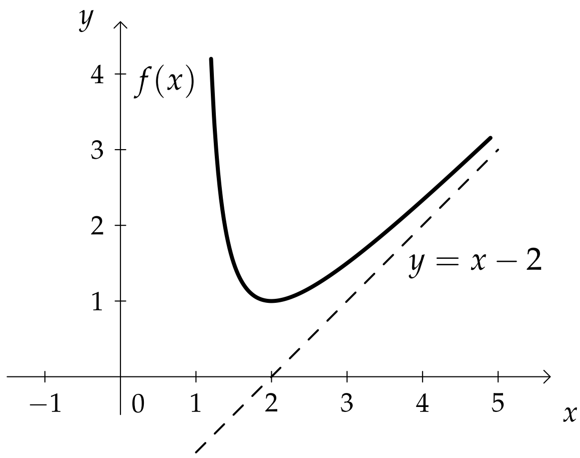
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Postup při určování asymptot

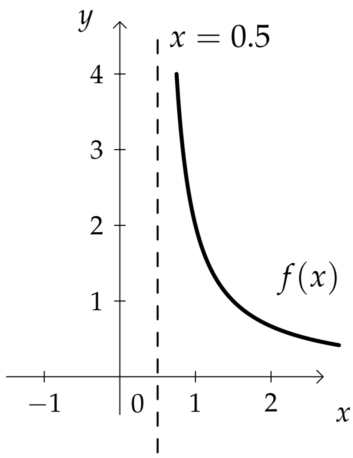
(i) Určíme definiční obor funkce.

(ii) Asymptoty bez směrnice budeme hledat v bodech nespojitosti nebo ve vlastních krajních bodech definičního oboru. Výpočet provedeme pomocí jednostranných limit.

(iii) Asymptoty se směrnicí získáme výpočtem podle vzorců z definice 3.13..



Obrázek 9: Asymptota se směrnicí (v ∞)



Obrázek 10: Svislá asymptota

Příklad 44. Určete všechny asymptoty grafu funkce:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1}$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

2. Určíme asymptoty bez směrnice.
Asymptotu bez směrnice budeme hledat v bodě nespojitosti $x = \frac{1}{2}$. Vypočteme v tomto bodě nejprve limitu zprava:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1} = +\infty.$$

Protože limita zprava je nevlastní, není nutné počítat limitu zleva a můžeme říct, že v bodě $x = \frac{1}{2}$ je asymptota bez směrnice.

3. Určíme asymptoty se směrnicí.
Dosadíme postupně do vzorců z definice 3.13. a vypočteme podle známých pravidel. Výpočet budeme provádět současně pro $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2-2x+1}{2x-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x} = \frac{1}{2} \\ q &= \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1} - \frac{1}{2}x \right) = \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + x}{2(2x - 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x + 2}{4x - 2} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Hledaná asymptota má rovnici

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Příklad 45. Určete všechny asymptoty grafu funkce:

$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x}$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = (1; \infty) .$$

2. Určíme asymptoty bez směrnice.
   Asymptotu bez směrnice budeme hledat v bodě $x = 1$. Počítáme limitu v tomto bodě pouze zprava, protože zleva funkce není definovaná:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{x} = -\infty .$$

   Protože limita zprava je nevlastní, můžeme říct, že v bodě $x = 1$ je asymptota bez směrnice.

3. Určíme asymptoty se směrnicí.
   Dosadíme postupně do vzorců z definice 3.13. a vypočteme podle známých pravidel. Výpočet budeme provádět pouze pro $+\infty$, protože v $-\infty$ funkce není definovaná:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln(x-1)}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x^2} = 0$$
$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = 0 .$$

   Hledaná asymptota má rovnici

$$y = 0 .$$

Příklad 46. Určete všechny asymptoty grafu funkce:

$$f(x) = x + \arctan \frac{x}{2}$$

1. Určíme definiční obor:

$$D(f) = \mathbb{R} .$$

2. Určíme asymptoty bez směrnice.
   Protože je definiční obor množina $\mathbb{R}$, asymptoty bez směrnice neexistují.

3. Určíme asymptoty se směrnicí.
   Dosadíme postupně do vzorců z definice 3.13. a vypočteme podle známých pravidel. Výpočet budeme provádět současně pro $\pm\infty$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 1$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \arctan\frac{x}{2}$$

V tomto příkladě musíme počítat limity v $\pm\infty$ zvlášť a obdržíme dva různé výsledky:

$$q = \lim_{x\to-\infty} \arctan\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2}$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Hledané asymptoty jsou dvě a mají rovnice

$$y = x - \frac{\pi}{2}, \qquad \text{pro } x \to -\infty$$
$$y = x + \frac{\pi}{2}, \qquad \text{pro } x \to \infty.$$

Úlohy k procvičení

Příklad 47. Určete všechny asymptoty grafu funkce:

a) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x + 3}$

b) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

c) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = x + \dfrac{\ln(x)}{x}$

e) $y = x \arctan(x)$

3.6 Sestavení grafu funkce

K sestavení grafu funkce je potřeba vyšetřit následující vlastnosti

1. určit definiční obor funkce
2. vypočítat limity v bodech nespojitosti a v krajních bodech definičního oboru
3. zjistit, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická
4. nalézt průsečíky s osami a určit intervaly, na kterých je funkce kladná, záporná
5. spočítat derivaci, nalézt lokální extrémy a určit intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající
6. spočítat druhou derivaci, nalézt inflexní body a určit intervaly, na kterých je funkce konvexní, konkávní
7. zjistit zda má funkce svislé asymptoty, asymptoty se směrnicí

Příklad 48. Sestavte graf funkce: $f\left(x\right)=\dfrac{2-x}{(x-3)^2}$

1. Určíme definiční obor funkce:
$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}\ .$$

2. Vypočteme limity v bodech nespojitosti a v krajních bodech definičního oboru:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+}\frac{2-x}{(x-3)^2}&=-\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{2-x}{(x-3)^2}&=-\infty\\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-x}{(x-3)^2}&=0\,.\end{aligned}$$

3. Zjistíme, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická:
Funkce nemá souměrný definiční obor, proto funkce není sudá, není lichá, není periodická.

4. Určeme průsečíky s osami a intervaly, na kterých je funkce kladná, záporná:
průsečík s osou x je: $[2,0]$
průsečík s osou y je: $\left[0,\frac{2}{9}\right]$
funkce je kladná intervalu $(-\infty,2)$, záporná na $(2,3)$ a $(3,-\infty)$.

5. Vypočteme první derivaci, najdeme lokální extrémy a určíme intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Určíme derivaci funkce:
$$f'\left(x\right)=\frac{x-1}{(x-3)^3}\,.$$
Najdeme stacionární body a body, ve kterých první derivace neexistuje.
Stacionární body najdeme tak, že první derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:
$$\begin{aligned}f'(x)&=0\\ \frac{x-1}{(x-3)^3}&=0\\ x-1&=0\qquad\Rightarrow\qquad x=1.\end{aligned}$$
Získali jsme jeden stacionární bod $x=1$.
Nyní zjistíme, máme-li nějaké body, ve kterých první derivace neexistuje.
Určíme definiční obor první derivace:
$$D(f')=\mathbb{R}\setminus\{3\}\ .$$
Protože $D(f')=D(f)$, pak nemáme žádné body, ve kterých $f'(x)$ neexistuje. Určíme znaménko derivace v intervalech s krajními body získanými v předchozích výpočtech.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	x	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max $f(1)=\frac{1}{4}$	$\searrow$	x	$\nearrow$

Z tabulky vidíme, že první derivace nabývá kladných hodnot na intervalu $(-\infty;1)$ a záporných hodnot na intervalech $(1;3)$ a $(3;\infty)$, tedy:
funkce je rostoucí: $(-\infty;1)$, $(3;\infty)$,
funkce je klesající: $(1;3)$.

Dále z tabulky vidíme, že pro $x=1$ funkce přechází z rostoucí na klesající, tedy:
lokální maximum v bodě $\left[1;\frac{1}{4}\right]$.

6. Vypočteme druhou derivaci, najdeme inflexní body a určíme intervaly, na kterých je funkce konvexní, konkávní.

   Určíme druhou derivaci funkce:

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x-3)^4}\,.$$

   Najdeme body, ve kterých je druhá derivace rovna nule nebo neexistuje.
   Druhou derivaci položíme rovnu nule a rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -\frac{2x}{(x-3)^4} &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0. \end{aligned}$$

   Získali jsme jeden bod v němž je druhá derivace rovna nule $x=0$. Nyní zjistíme, máme-li nějaké body, ve kterých druhá derivace neexistuje.
   Určíme definiční obor druhé derivace:

$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{3\}\,.$$

   Protože $D(f'') = D(f)$, pak nemáme žádné body, ve kterých $f''(x)$ neexistuje. Určíme znaménko druhé derivace v intervalech s krajními body získanými v předchozích výpočtech.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	x	$-$
$f(x)$	$\cup$	inflex.bod $f(0)=\frac{2}{9}$	$\cap$	x	$\cap$

   Z tabulky vidíme, že druhá derivace nabývá kladných hodnot na intervalu $(-\infty;0)$ a záporných hodnot na intervalech $(0;3)$, $(3;+\infty)$, tedy:
   funkce je konvexní: $(-\infty;0)$,
   funkce je konkávní: $(0;3)$, $(3;+\infty)$.

   Dále z tabulky vidíme, že pro $x=0$ funkce přechází z konvexní na konkávní, tedy:
   inflexní bod: $\left[0;\frac{2}{9}\right]$.

7. Zjistíme zda má funkce svislé asymptoty, asymptoty se směrnicí.
   Určíme asymptoty bez směrnice:
   Asymptotu bez směrnice budeme hledat v bodě $x = 3$. Vypočet jednostranných limit jsme již provedli v bodě 2 a na základě výsedků můžeme říct, že v bodě $x = 3$ máme asymptotu bez směrnice.
   Určíme asymptoty se směrnicí:
   Dosadíme postupně do vzorců z definice 3.13. a vypočteme podle známých pravidel. Výpočet budeme provádět současně pro $\pm\infty$:

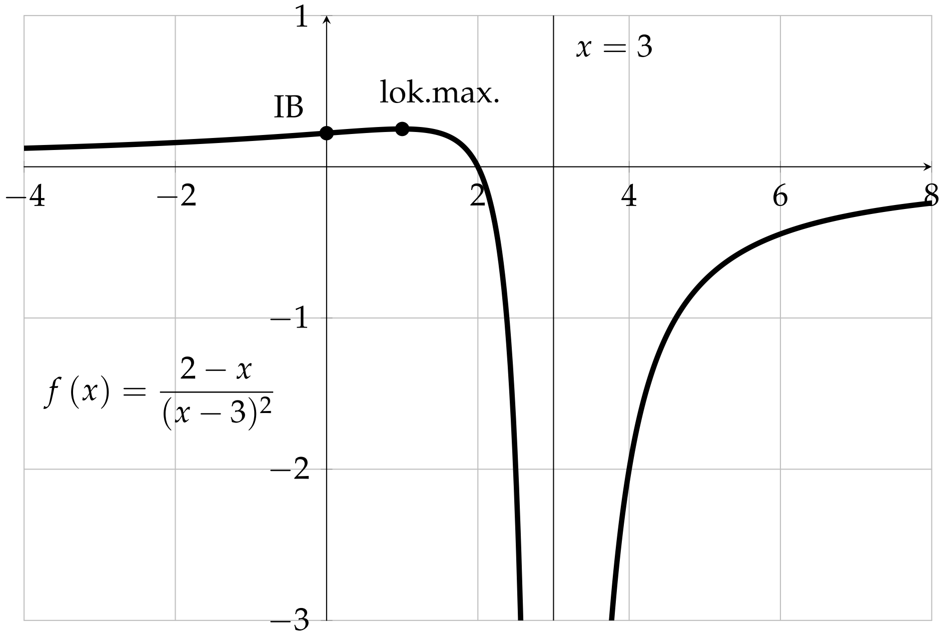
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2-x}{(x-3)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-x}{x(x-3)^2} = 0$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-x}{(x-3)^2} = 0\,.$$

   Hledaná asymptota má rovnici:

$$y = 0\,.$$

8. Graf hledané funkce:



Úlohy k procvičení

Příklad 49. Sestavte graf funkce $f(x)$:

a) $f(x) = (2 - x)\,e^{x-1}$

b) $f(x) = x \ln x$

Úlohy k procvičení

Příklad 50. Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}$
2. funkce nemá body nespojitosti, limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
3. funkce není sudá, není lichá, není periodická
4. průsečík s osou x je: $[-3, 0]$ průsečík s osou y je: $[0, 1]$
   funkce je kladná intervalu $(-3, \infty)$, záporná na $(-\infty, -3)$
5. funkce má lokální maximum v bodě $[-1, 5]$, a lokální minimum v bodě $[1, \frac{1}{2}]$
   je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a klesající na $(-1, 1)$
6. funkce má inflexní body $[-\frac{1}{2}, 2]$
   funkce je konvexní na intervalu $(-\frac{1}{2}, \infty)$ a konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2})$
7. funkce nemá asymptoty

Úlohy k procvičení

Příklad 51. Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle 0, 3)$
2. funkce nemá body nespojitosti, limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$
3. funkce je sudá, není lichá, není periodická
4. průsečík s osou x je: $[0, 0]$, průsečík s osou y je: $[0, 0]$
   funkce je kladná na $\mathbb{R}$
5. funkce má lokální minimum v bodě $[0, 0]$
   je rostoucí na interval $(0, \infty)$ a klesajicí na $(-\infty, 0)$
6. funkce má inflexní body $[-2, 1]$ a $[2, 1]$
   funkce je konvexní na intervalu $(-2, 2)$ a konkávní na $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$
7. funkce má v ∞ a v $-\infty$ asymptotu $y = 3$

Úlohy k procvičení

Příklad 52. Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = (1, \infty)$, $H_f = \mathbb{R}$
2. funkce nemá body nespojitosti, limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
3. funkce není sudá, není lichá, není periodická
4. průsečík s osou x je: $[4, 0]$, průsečík s osou y není
   funkce je kladná intervalu $(4, \infty)$, záporná na $(1, 4)$
5. funkce nemá lokální extrémy, je rostoucí na celém D_f
6. funkce má inflexní bod $[3, -2]$
   funkce je konvexní na intervalu $(3, \infty)$ a konkávní na $(1, 3)$
7. funkce má asymptotu $x = 1$

Úlohy k procvičení

Příklad 53. Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -5, \infty)$
2. funkce nemá body nespojitosti, limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
3. funkce není sudá, není lichá, není periodická
4. průsečíky s osou x je: $[-4, 0]$, a $[2, 0]$, průsečík s osou y je: $[0, -3]$
   funkce je kladná na $(-\infty, -4)$ a $(2, \infty)$, záporná na $(-4, 2)$
5. funkce má lokální minimum v bodě $[-1, -5]$
   je rostoucí na interval $(-1, \infty)$ a klesajicí na $(-\infty, -1)$
6. funkce má inflexní bod $[4, 5]$
   funkce je konvexní na intervalu $(-\infty, 4)$ a konkávní na $(4, \infty)$
7. funkce má v ∞ asymptotu $y = x + 3$

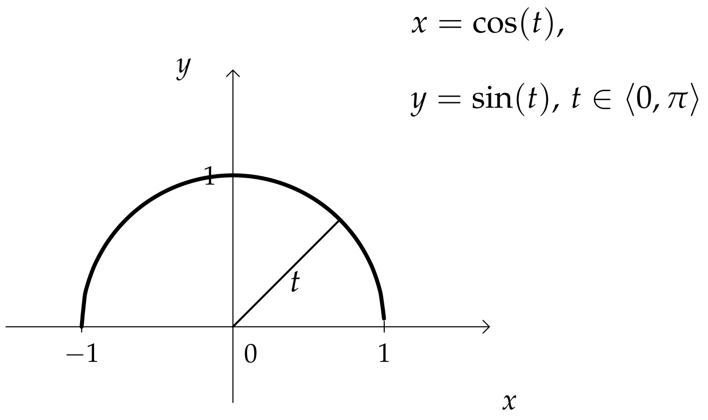
4 Parametricky zadaná funkce a její derivace

4.1 Parametricky zadaná funkce

Definice 4.13 Jsou dány funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$, kde $t \in I$ je parametr. Nechť existuje x^{-1}. Pak funkci

$$y = f(x) = y\left(x^{-1}(x)\right)$$

nazveme **parametricky zadanou funkci**.



Obrázek 11: Půlkružnice

4.2 Derivace paramatericky zadané funkce

Věta 4.9 Funkce f je dána parametricky rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, kde $t \in I$. Nechť $x(t)$ a $y(t)$ mají derivaci v každém bodě intervalu I. Pak **derivace parametricky zadané funkce** f je dána vztahem:

$$y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

Poznámka

Derivaci podle t značíme tečkou, abychom ji odlišili od derivace podle x, kterou značíme čárkou.

Věta 4.10 Funkce f je dána parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$, $y = y(t)$, kde $t \in I$. Nechť $x(t)$ a $y(t)$ mají první a druhou derivaci v každém bodě intervalu I. Pak **druhá derivace parametricky zadané funkce** f je dána vztahem:

$$y'' = \frac{\ddot{y}(t) \cdot \dot{x}(t) - \dot{y}(t) \cdot \ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 54. Vypočítejte první derivaci parametricky zadané funkce:

a) $x = \tan t\,, \quad y = \dfrac{\sin 2t}{2}\,, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$

b) $x = 5\,(t - \cos t)\,, \quad y = 5\,(1 + \sin t)\,, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$

Úlohy k procvičení

Příklad 55. Vypočítejte druhou derivaci parametricky zadané funkce:

a) $x = \dfrac{1-t}{1+t} \quad y = \dfrac{2t}{1+t} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$

b) $x = a\cos t\,, \quad y = b\sin t\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,,\ t \in (0, \pi)$

Úlohy k procvičení

Příklad 56. Určete rovnici tečny t a normály n cykloidy v bodě určeného hodnotou parametru $t = \frac{\pi}{2}$.
Parametrické rovnice cykloidy jsou:

$$\begin{aligned} x &= a\,(t - \sin t) \\ y &= a\,(1 - \cos t)\,; \quad a > 0,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{aligned}$$