Matematika I: Pracovní sešit
Lineární algebra

Zuzana Morávková, Jiří Krček

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Obsah

1 Vektory v algebře

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1 **Aritmetický vektor** je uspořádaná n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tj. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme **souřadnice vektoru.**
Vektor $\boldsymbol{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ se nazývá **nulový vektor**.

1.2 Počítání s vektory

Rovnost vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$
Vektor $\boldsymbol{a}$ rovná se vektoru $\boldsymbol{b}$, právě když jsou si všechny souřadnice rovny, tedy

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i, \quad \forall i.$$

Součet vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$
Vektor $\boldsymbol{c}$ se nazývá součtem vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, právě když je každá souřadnice $\boldsymbol{c}$ součtem odpovídajících souřadnice vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, tedy

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad c_i = a_i + b_i, \quad \forall i.$$

Násobek vektoru $\boldsymbol{a}$ reálným číslem k
Násobkem vektoru $\boldsymbol{a}$ číslem $k \in \mathbb{R}$ rozumíme vektor $\boldsymbol{b}$ který vznikne tak, že každou souřadnici vektoru $\boldsymbol{a}$ násobíme číslem $k \in \mathbb{R}$, tedy

$$\boldsymbol{b} = k\,\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad b_i = k\,a_i, \quad \forall i.$$

1.3 Lineární závislost a nezávislost

Definice 1.2 Vektor $\boldsymbol{b}$ je **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$, právě když existují reálná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ taková, že platí

$$\boldsymbol{b} = \alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a_k}\,.$$

Definice 1.3 Vektory $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ jsou **lineárně závislé**, právě když existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, a platí

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a_k} = \boldsymbol{o}\,.$$

V opačném případě jsou **lineárně nezávislé**.

Poznámka

Vektory jsou lineárné závislé, lze-li aspoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

2 Matice

2.1 Základní pojmy a definice

Definice 2.4 Schéma $m \cdot n$ čísel z $\mathbb{R}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, uspořádaných do m řádků a n sloupců se nazývá **matice typu** $m \times n$, tedy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matici A typu $m \times n$ zkráceně označíme $A_{m \times n}$.
Prvek matice A ležící v i-tém řádku a j-tém sloupci značíme a_{ij}.
Hlavní diagonála matice je tvořena prvky $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{kk}$, kde $k = \min\{m, n\}$.

- **Čtvercová matice** A řádu n je matice typu $n \times n$ (tedy $A_{n \times n}$).
- **Nulová matice** (značí se O) je matice, jejíž všechny prvky jsou nuly, tedy

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- **Jednotková matice** (značí se E) je čtvercová matice, kde všechny prvky na hlavní diagonále jsou jedničky a všechny ostatní prvky jsou nuly, tedy

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Horní** (resp. **dolní**) **trojúhelníková matice** je matice, jejíž prvky pod (resp. nad) hlavní diagonálou jsou nulové, tedy

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i > j \qquad (\text{resp. } a_{ij} = 0 \text{ pro } i < j).$$

- **Transponovaná matice** k matici A (značí se A^T) je matice, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce, tedy

$$a_{ij}^\mathsf{T} = a_{ji}.$$

- **Symetrická matice** je čtvercová matice A, pro kterou platí

$$A = A^\mathsf{T}.$$

- Na vektor můžeme pohlížet jako na matici mající jeden sloupec, pak jej nazýváme **sloupcový vektor** nebo jako na matici mající jeden řádek a pak jej nazýváme **řádkový vektor**.

Úlohy k procvičení

Příklad 1. Transponujte matice:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

b)
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & -2 & -5 \\ 6 & -5 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Počítání s maticemi

Rovnost matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$
Matice $\boldsymbol{A}$ rovná se matici $\boldsymbol{B}$, právě když jsou obě matice stejného typu a všechny odpovídající si prvky jsou si rovny, tedy

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{B}_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Součet matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$
Matice $\boldsymbol{C}$ se nazývá součtem matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, právě když jsou matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stejného typu a každý prvek matice $\boldsymbol{C}$ je součtem odpovídajících prvků matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, tedy

$$\boldsymbol{C}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n} + \boldsymbol{B}_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Násobek matice $\boldsymbol{A}$ reálným číslem k
Násobkem matice $\boldsymbol{A}$ číslem $k \in \mathbb{R}$ rozumíme matici $\boldsymbol{B}$ stejného typu, která vznikne tak, že každý prvek matice $\boldsymbol{A}$ násobíme číslem $k \in \mathbb{R}$, tedy

$$\boldsymbol{B}_{m\times n} = k\,\boldsymbol{A}_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = k\,a_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Úlohy k procvičení

Příklad 2. Vypočtěte matici $\boldsymbol{D} = 2\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ a matici $\boldsymbol{F} = -3\,\boldsymbol{A} + 2\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

2.3 Součin matic

Součin matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$
Součinem matic $\boldsymbol{A}$ typu $m \times n$ a $\boldsymbol{B}$ typu $n \times p$ ($\boldsymbol{A}$ má tolik sloupců jako $\boldsymbol{B}$ řádků) je matice $\boldsymbol{C}$ typu $m \times p$, jejíž každý prvek počítáme z prvků i-tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a j-tého sloupce matice $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{C}_{m\times p} = \boldsymbol{A}_{m\times n} \cdot \boldsymbol{B}_{n\times p} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \forall i, j.$$

Poznámka

Obecně násobení matic není komutativní! Tedy

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Vlastnosti součinu

$$\begin{aligned} A \cdot E &= A & E \cdot A &= A \\ A \cdot O &= O & O \cdot A &= O \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C & (B + C) \cdot A &= B \cdot A + C \cdot A \end{aligned}$$

$$(A \cdot B)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}$$

Příklad 3. Vypočtěte $A \cdot B$, $B \cdot A$ (pokud to lze), jestliže:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 9 \\ 10 & -5 & 3 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Součin matic $A_{3\times 2} \cdot B_{4\times 3}$ neexistuje.
Nyní spočítáme součin matic $B_{4\times 3} \cdot A_{3\times 2} = C_{4\times 2}$

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 9 \\ 10 & -5 & 3 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 5 \cdot 1 + (-1)\cdot(-4) & 3 \cdot 5 + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 9 \cdot (-4) & 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 9 \cdot 3 \\ 10 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 + 3 \cdot (-4) & 10 \cdot 5 + (-5) \cdot 0 + 3 \cdot 3 \\ 7 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot (-4) & 7 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ -25 & 47 \\ 3 & 59 \\ 19 & 29 \end{pmatrix}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 4. Vypočtěte $A \cdot B$, $B \cdot A$ (pokud to lze), jestliže:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 7 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Hodnost matice

Definice 2.5 **Hodnost matice** $\boldsymbol{A}$ (označení $h(\boldsymbol{A})$) je největší počet lineárně nezávislých řádků této matice.

Je-li matice $\boldsymbol{A}$ typu $m \times n$, pak

$$h(\boldsymbol{A}) \leq \min\{m, n\}.$$

Definice 2.6 **Ekvivalentní úpravy** matice jsou:

1. vzájemná výměna libovolných dvou řádků,
2. vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem,
3. přičtení nenulového násobku daného řádku k jinému řádku.

Definice 2.7 Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou **ekvivalentní**, píšeme $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, lze-li jednu matici převést na druhou konečným počtem ekvivalentních úprav.

Věta 2.1 Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost:

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B}).$$

Poznámka

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je **ve stupňovitém tvaru**, jestliže

- každý nenulový řádek kromě prvního, začíná zleva více nulami než řádek předchozí,
- za nulovým řádkem následují jen nulové řádky.

Hodnost matice ve stupňovitém je rovna počtu nenulových řádků.

Příklady matic ve stupňovitém tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Výpočet hodnosti matice

1. Pomocí ekvivalentních úprav převedeme matici na stupňovitý tvar.
2. Hodnost určíme jako počet nenulových řádků.

Poznámka

Hodnost jednotkové matice n-tého řádu je n. Hodnost nulové matice je nula.

Příklad 5. Určete hodnost matice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 9 & 12 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 9 & 12 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 7 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice je ve stupňovitém tvaru a hodnost určíme jako počet nenulových řádků, tj. hodnost matice je $h(A) = 3$.

Úlohy k procvičení

Příklad 6. Určete hodnost matic:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 11 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

d)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

e)

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \\ 6 & -5 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Soustavy lineárních rovnic

3.1 Základní pojmy a definice

Definice 3.8 **Soustava** m **lineárních rovnic** pro n neznámých $x_1, x_2, \dots x_n$ je úloha:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &+ \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ & &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &+ \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Čísla a_{ij} se nazývají **koeficienty** soustavy a b_i **pravé strany**.

Řešením soustavy lineárních rovnic nazveme množinu všech vektorů $\boldsymbol{x}$, jejichž souřadnice po dosazení do soustavy za neznámé splňují všechny rovnice soustavy.

Poznámka

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých můžeme zapsat také maticově:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matici $\boldsymbol{A}$, jejíž prvky tvoří koeficienty soustavy a_{ij}, nazýváme **maticí soustavy**.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vektor $\boldsymbol{x}$, jehož souřadnice tvoří neznámé nazýváme **vektor neznámých**.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektor $\boldsymbol{b}$, jehož souřadnice tvoří pravé strany soustavy nazýváme **vektor pravých stran**.

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matici $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ připojením vektoru pravých stran, nazýváme **rozšířenou maticí soustavy**.

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Pokud má soustava všechny pravé strany rovny nule $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, pak se nazývá **homogenní** soustavou:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\,.$$

Věta 3.2 Frobeniova věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení, právě když se hodnost matice soustavy rovná hodnosti matice rozšířené, tedy

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}).$$

Toto řešení je jediné, právě když $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$.
Pro $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) < n$ má soustava **nekonečně mnoho řešení** závislých na $n - h(\boldsymbol{A})$ parametrech.

Pokud $h(A) \neq h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, pak řešení soustavy **neexistuje**.

Z Frobeniovy věty vyplývá, že homogenní soustava lineárních rovnic má vždy alespoň triviální řešení (tj. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$).

3.2 Gaussova eliminační metoda

Definice 3.9 Dvě soustavy lineárních rovnic jsou **ekvivalentní**, právě když jsou ekvivalentní jejich rozšířené matice.

Věta 3.3 Ekvivalentní soustavy mají stejnou množinu řešení.

Princip Gaussovy eliminační metody

Místo dané soustavy řešíme ekvivalentí soustavu, jejíž rozšířená matice je ve stupňovitém tvaru.

Postup Gaussovy eliminační metody

1. Vytvoříme rozšířenou matici $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
2. Pomocí ekvivalentních úprav převedeme matici $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ na stupňovitý tvar a odtud zjistíme hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy.
3. Použijeme Frobeniovu větu pro zjištění existence řešení soustavy.
4. Sestavíme soustavu rovnic odpovídající matici ve stupňovitém tvaru.
5. Při řešení této soustavy postujeme od poslední rovnice k první.

Příklad 7. Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \quad -2x_3 &= \quad 5 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad &= -3 \\ 2x_1 + x_2 \quad -x_3 &= \quad 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & | & 5 \\ 1 & -1 & 0 & | & -3 \\ 2 & 1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -3 \\ 3 & 1 & -2 & | & 5 \\ 2 & 1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 4 & -2 & | & 14 \\ 0 & 3 & -1 & | & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 4 & -2 & | & 14 \\ 0 & 0 & 2 & | & -6 \end{pmatrix}$$

$$h(\boldsymbol{A}) = 3,\ h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 3,\ n = 3$$

Jelikož $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$, tak podle Frobeniovy věty má soustava **právě jedno řešení**. Původní soustavu jsme převedli na ekvivalentní soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 \quad -x_2 \qquad\quad &= -3 \\ 4x_2 \quad -2x_3 &= \quad 14 \\ 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Tuto soustavu řešíme postupně od poslední rovnice:

- 3. rovnice:
$$2x_3 = -6 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -3$$
- 2. rovnice (dosadíme $x_3 = -3$):
$$4x_2 - 2x_3 = 14 \quad \Rightarrow \quad 4x_2 + 6 = 14 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$
- 1. rovnice (dosadíme $x_2 = 2$):
$$x_1 - x_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

Řešení:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Zkoušku provedeme dosazením do původní soustavy:

$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \cdot (-1) + 2 - 2 \cdot (-3) = 5 \\ &x_1 - x_2 = -1 - 2 = -3 \\ &2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \cdot (-1) + 2 - (-3) = 3 \end{aligned}$$

Příklad 8. Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad - x_3 \quad\quad &= 0 \\ x_1 - x_2 \quad\quad + x_4 &= 1 \\ -x_1 \quad\quad + x_3 + x_4 &= -1 \\ 3x_1 \quad - 2x_3 \quad\quad &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} h(\boldsymbol{A}) &= 3 \\ h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) &= 4 \end{aligned}$$

Jelikož $h(\boldsymbol{A}) \neq h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, tak podle Frobeniovy věty soustava **nemá řešení**.

Příklad 9. Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad - x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 \quad + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} h(\boldsymbol{A}) &= 2 \\ h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) &= 2 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

Jelikož $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) < n$, tak podle Frobeniovy věty má soustava **nekonečně mnoho řešení** závislých na $n - h(\boldsymbol{A}) = 3 - 2 = 1$ parametru.
Původní soustavu jsme převedli na ekvivalentní soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení závisí na 1 parametru, zvolíme si tedy $x_3 = t$, kde t může být libovolné reálné číslo, a soustavu opět řešíme od poslední rovnice:

- 2. rovnice (dosadíme $x_3 = t$):

$$x_2 + x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 + t = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - t$$

- 1. rovnice (dosadíme $x_2 = 1 - t,\ x_3 = t$):

$$x_1 + x_2 - x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 - t - t = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 + 2t$$

Řešení:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Zkoušku provedeme dosazením do původní soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 + 2t + 1 - t - t = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2(3+2t) + 3(1-t) - t = 9 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= -(3+2t) + 1 - t + 3t = -2 \end{aligned}$$

Příklad 10. Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & -2x_3 - 3x_4 & = & -3 \\ -x_1 + x_2 & & +3x_3 + x_4 & = & 4 \\ x_1 + x_2 & & -x_3 - 5x_4 & = & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} h(\boldsymbol{A}) &= 2 \\ h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) &= 2 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Jelikož $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) < n$, tak podle Frobeniovy věty má soustava **nekonečně mnoho řešení** závislých na $n - h(\boldsymbol{A}) = 4 - 2 = 2$ parametrech.
Původní soustavu jsme převedli na ekvivalentní soustavu:

$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad -2x_3 - 3x_4 & = & -3 \\ x_2 \quad +x_3 - 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

Řešení závisí na 2 parametrech, zvolíme si tedy $x_3 = r,\ x_4 = s$, kde r, s mohou být libovolná reálná čísla, a soustavu opět řešíme od poslední rovnice:

- 2. rovnice (dosadíme $x_3 = r,\ x_4 = s$):

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 + r - 2s = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - r + 2s$$

- 1. rovnice (dosadíme $x_3 = r,\ x_4 = s$):

$$x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 2r - 3s = -3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3 + 2r + 3s$$

Řešení:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3+2r+3s \\ 1-r+2s \\ r \\ s \end{pmatrix}, \quad r,s \in \mathbb{R}$$

Zkoušku provedeme dosazením do původní soustavy:

$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -3+2r+3s-2r-3s = -3 \\ &-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -(-3+2r+3s)+1-r+2s+3r+s = 4 \\ &x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = -3+2r+3s+1-r+2s-r-5s = -2 \end{aligned}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 11. Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ 2x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 5 \\ 3x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

4 Determinanty

Definice 4.10 **Determinant** čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ řádu n (značí se $|\boldsymbol{A}|$) je číslo, pro které platí:

1. je-li $\boldsymbol{A}$ řádu $n = 1$, pak $|\boldsymbol{A}| = a_{11}$,
2. je-li $\boldsymbol{A}$ řádu $n \geq 2$, pak

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}(-1)^{1+1}|\boldsymbol{A}_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|\boldsymbol{A}_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}|\boldsymbol{A}_{1n}|,$$

kde $\boldsymbol{A}_{1j}$ je matice, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynecháním prvního řádku a j-tého sloupce.

Poznámka

- Obecně matice $\boldsymbol{A}_{ij}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.
- Číslo $(-1)^{i+j}|\boldsymbol{A}_{ij}|$ nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij}.
- Determinant se značí $|\boldsymbol{A}|$ nebo $\det \boldsymbol{A}$.

4.1 Vlastnosti determinantů

Nechť $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou čtvercové matice stejného řádu, pak platí:

- $|\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}| = |\boldsymbol{A}|$
- $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$
- Vznikne-li $\boldsymbol{B}$ z $\boldsymbol{A}$:
  - vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců), pak $|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$,
  - vynásobením jednoho řádku (sloupce) číslem $k \in \mathbb{R}$, pak $|\boldsymbol{B}| = k|\boldsymbol{A}|$,
  - přičtením násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému, pak $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|$.
- $|\boldsymbol{A}| = 0$ právě tehdy když jsou řádky matice $\boldsymbol{A}$ lineárně závislé.
- Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

Definice 4.11 Čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ se nazývá

- **regulární**, právě když $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,
- **singulární**, právě když $|\boldsymbol{A}| = 0$.

4.2 Výpočet determinantu

Křížové pravidlo:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Sarrusovo pravidlo:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} = \begin{aligned} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ & -(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}) \end{aligned}$$

Poznámka

Pro determinanty matic čtvrtého a vyšších řádů by obdobná pravidla byla velmi složitá a proto se nepoužívají.

Příklad 12. Vypočtěte následující determinant 2. řádu:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Determinant druhého řádu spočítáme křížovým pravidlem

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 10$$

Příklad 13. Vypočtěte následující determinant 3. řádu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Determinant třetího řádu spočítáme Sarrusovým pravidlem:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{matrix} \end{array} = 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 3 + 0 \cdot 7 \cdot 6 - (3 \cdot 4 \cdot 0 + 6 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \cdot 1) = -21$$

Determinant spočítáme podle definice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}|\boldsymbol{A}_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|\boldsymbol{A}_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|\boldsymbol{A}_{13}| =$$
$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 1\cdot(-22) - 7\cdot 2 + 3\cdot 5 = -21$$

Tento postup lze zobecnit na libovolný řádek nebo sloupec.

Věta 4.4 Laplaceův rozvoj
Je-li $\boldsymbol{A}$ čtvercová matice řádu n, pak platí:

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|\boldsymbol{A}_{ij}| \qquad \text{(rozvoj podle } i\text{-tého řádku)},$$

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|\boldsymbol{A}_{ij}| \qquad \text{(rozvoj podle } j\text{-tého sloupce)}.$$

Příklad 14. Vypočtěte determinant z předchozího příkladu rozvojem podle třetího řádku:

Determinant spočítáme rozvojem podle třetího řádku:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = a_{31}(-1)^{3+1}|\boldsymbol{A}_{31}| + a_{32}(-1)^{3+2}|\boldsymbol{A}_{32}| + a_{33}(-1)^{3+3}|\boldsymbol{A}_{33}| =$$
$$= 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 0 - 5\cdot(-3) + 2\cdot(-3) = -21$$

Poznámka

Determinant matice 4. a vyšších řádů už počítáme pouze pomocí Laplaceova rozvoje, případně můžeme využít vlastnosti determinantu.

Příklad 15. Vypočtěte následující determinant 4. řádu:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Determinant spočítáme rozvojem podle prvního řádku:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\left|\boldsymbol{A}_{11}\right| + a_{12}(-1)^{1+2}\left|\boldsymbol{A}_{12}\right| +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\left|\boldsymbol{A}_{13}\right| + (-1)^{1+4}a_{14}\left|\boldsymbol{A}_{14}\right| =$$

$$= 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 8 - 0\cdot 9 + (-4)\cdot 11 - 2\cdot(-34) = 48$$

Úlohy k procvičení

Příklad 16. Vypočtěte následující determinanty 2. a 3. řádu:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Úlohy k procvičení

Příklad 17. Vypočtěte determinant

a) rozvojem podle vhodného řádku,

b) rozvojem podle vhodného sloupce,

c) úpravou na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 18. Vypočtěte následující determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4.3 Cramerovo pravidlo pro řešení soustav lineárních rovnic

Je-li matice soustavy n lineárních rovnic o n neznámých $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ regulární (tj. $|\boldsymbol{A}| = 0$), pak má matice $\boldsymbol{A}$ má hodnost n a proto podle Frobeniovy věty existuje **jediné řešení**.

Cramerovo pravidlo se dá použít pouze pro soustavy matic se čtvercovou regulární maticí.

Věta 4.5 Cramerovo pravidlo:
Je-li matice soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ regulární, pak jediné řešení soustavy $\boldsymbol{x}$ splňuje

$$x_k = \frac{|\boldsymbol{A}_k|}{|\boldsymbol{A}|},$$

kde matice $\boldsymbol{A}_k$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ nahrazením k-tého sloupce vektorem pravých stran.

Postup u Cramerova pravidla

1. Ověříme, že $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,
2. spočítáme jednotlivé determinanty $|\boldsymbol{A}_k|$,
3. vypočítáme jednotlivé neznámé x_k dosazením do vzorce $x_k = \dfrac{|\boldsymbol{A}_k|}{|\boldsymbol{A}|}$.

Příklad 19. Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 14 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Nejprve spočítáme determinant soustavy lineárních rovnic:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -18$$

Spočítáme determinant $|\boldsymbol{A}_1|$, který vznikne nahrazením prvního sloupce vektorem pravých stran:

$$|\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} -9 & 3 & 1 \\ 14 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -72$$

Obdobně spočítáme determinanty $|\boldsymbol{A}_2|$ a $|\boldsymbol{A}_3|$:

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} -2 & -9 & 1 \\ 3 & 14 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 18 \qquad |\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -9 \\ 3 & 4 & 14 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -36$$

Složky řešení soustavy lineárních rovnic pak dostaneme dosazením do vzorců:

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-72}{-18} = 4, \qquad x_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{18}{-18} = -1, \qquad x_3 = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-36}{-18} = 2.$$

Řešením je tedy vektor $\boldsymbol{x} = (4, -1, 2)^{\mathsf{T}}$.
Nyní provedeme zkoušku dosazením řešení do všech rovnic:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 \; + x_3 &= -2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 2 = -9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 14 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4 + 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 7 \end{aligned}$$

Námi nalezené řešení splnuje všechny rovnice.

Úlohy k procvičení

Příklad 20. Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= -12 \\ 2x_1 - x_2 \; - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5 Inverzní matice

5.1 Základní pojmy a definice

Definice 5.12 Čtvercová matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ se nazývá **inverzní matice** ke čtvercové matici $\boldsymbol{A}$ právě tehdy, když

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Poznámka

- K regulární matici existuje právě jedna inverzní matice.
- K singulární matici neexistuje matice inverzní.
- A pro determinant inverzní matice platí $|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

Věta 5.6 Je-li matice $\boldsymbol{A}$ regulární pak platí

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \cdot \tilde{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}},$$

kde $\tilde{\boldsymbol{A}}$ je matice složená z algebraických doplňků prvků matice $\boldsymbol{A}$.

5.2 Výpočet inverzní matice pomocí determinantů

1. Spočítáme determinant dané matice $\boldsymbol{A}$, tj. $|\boldsymbol{A}|$.
2. Vypočítáme algebraické doplňky $(-1)^{i+j}|\boldsymbol{A}_{ij}|$ prvků matice $\boldsymbol{A}$ a vytvoříme z nich matici $\tilde{\boldsymbol{A}}$.

3. Transponujeme matici $\tilde{\boldsymbol{A}}$.

4. Sestavíme inverzní matici podle vzorce z předchozí věty.

Příklad 21. Vypočtěte matici inverzní a proveďte zkoušku:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Nejprve spočítáme determinant $|\boldsymbol{A}| = -18$ a jak vidíme je nenulový, matice je tedy regulární a existuje k ní matice inverzní.
Pro prvky a_{ij} spočítáme algebraické dopňky $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |\boldsymbol{A}_{ij}|$:

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |\boldsymbol{A}_{11}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |\boldsymbol{A}_{12}| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot |\boldsymbol{A}_{13}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |\boldsymbol{A}_{21}| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |\boldsymbol{A}_{22}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |\boldsymbol{A}_{23}| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \cdot |\boldsymbol{A}_{31}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot |\boldsymbol{A}_{32}| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3} \cdot |\boldsymbol{A}_{33}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -17$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -9 & -9 & 9 \\ 11 & 13 & -17 \end{pmatrix}$$

A nakonec sestavíme matici inverzní:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \cdot \tilde{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -9 & -9 & 9 \\ 11 & 13 & -17 \end{pmatrix}$$

Zkoušku provedeme ověřením vztahu $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$:

$$\frac{1}{-18} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -9 & -9 & 9 \\ 11 & 13 & -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 22. Vypočtěte matici inverzní a proveďte zkoušku:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5.3 Výpočet inverzní matice eliminační metodou

Každou regulární matici $\boldsymbol{A}$ lze převést ekvivalentními úpravami na jednotkovou matici $\boldsymbol{E}$. Stejné úpravy převedou $\boldsymbol{E}$ na $\boldsymbol{A}^{-1}$, tj. $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}) \sim (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1})$.

1. Zapíšeme matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{E}$ vedle sebe $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})$.
2. Provádíme ekvivalentní úpravy s maticí $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})$:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}) \sim \cdots \sim (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}).$$

3. Získáme hledanou inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Příklad 23. Vypočtěte matici inverzní a proveďte zkoušku:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 6 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -6 & 24 & -15 & 0 & -12 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 6 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 3 & -18 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 18 & 6 & 12 & 0 & 12 & 3 & -18 & 24 \\ 0 & -12 & -24 & 0 & -6 & 12 & -18 & 24 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & -12 & 12 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 3 & -18 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 36 & 12 & 0 & 0 & 12 & 18 & -48 & 72 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & -12 & 12 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 3 & -18 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -36 & 0 & 0 & 0 & -18 & -18 & 54 & -72 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & -12 & 12 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 3 & -18 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} | : (-36) \\ | : 12 \\ | : (-24) \\ | : (-6) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & -4 \end{array}\right) = (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1})$$

Nalezená inverzní matice má tvar:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 24. Vypočtěte matici inverzní a proveďte zkoušku:

a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c)

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.4 Maticové rovnice

Maticové rovnice jsou např. rovnice

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$$

kde matice $\boldsymbol{X}$ je hledaná neznámá matice, $\boldsymbol{A}$ je regulární matice a $\boldsymbol{B}$ je matice vhodného typu. Takovéto rovnice můžeme řešit pomocí inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ a to násobením dané rovnice maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva nebo zprava, dle typu počítané maticové rovnice.

Řešení rovnice typu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B} & & \text{násobíme maticí } \boldsymbol{A}^{-1} \text{ zleva} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \end{aligned}$$

Řešení rovnice typu $X \cdot A = B$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{B} \qquad \text{násobíme maticí } \boldsymbol{A}^{-1} \text{ zprava} \\ \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} &= \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \end{aligned}$$

Příklad 25. Řešte rovnice pro neznámou matici $\boldsymbol{X}$ a proveďte zkoušku:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 0 \\ 2 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Jedná se o maticovou rovnici typu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, tedy její řešením najdeme podle vzorce: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}$.
V tomto příkladu jsou zadané matice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 0 \\ 2 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejprve spočítáme inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Pak

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 24 & 0 \\ 2 & 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Zkoušku provedeme dosazením nalezené matice $\boldsymbol{X}$ do maticové rovnice:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 0 \\ 2 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 26. Řešte rovnice pro neznámou matici $\boldsymbol{X}$ a proveďte zkoušku:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 12 \\ 0 & 10 & 7 \\ 37 & 23 & 73 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 & 51 \\ 13 & 26 & -20 & 23 \end{pmatrix}$$

c)

$$\boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -24 & 38 \end{pmatrix}$$

5.5 Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí inverzní matice

Soustavu lineárních rovnic lze pro regulární matici $\boldsymbol{A}$ řešit jako speciální případ maticové rovnice.

Věta 5.7 Je-li matice soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ regulární (tj. $|\boldsymbol{A}| \neq 0$), pak existuje jediné řešení soustavy $\boldsymbol{x}$ a má tvar

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}.$$

Příklad 27. Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 \; + x_3 &= -9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 14 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Řešení soustavy lineárních rovnic dostaneme dozsazením do vzorce: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$.
Nejprve spočítáme inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -9 & -9 & 9 \\ 11 & 13 & -17 \end{pmatrix}$$

Pak

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -9 & -9 & 9 \\ 11 & 13 & -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} -72 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Řešením je tedy vektor $\boldsymbol{x} = (4, -1, 2)^{\mathsf{T}}$.
Nyní provedeme zkoušku dosazením řešení do všech rovnic:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 \; + x_3 &= -2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 2 = -9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 14 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4 + 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 7 \end{aligned}$$

Námi nalezené řešení splnuje všechny rovnice.

Úlohy k procvičení

Příklad 28. Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice a proveďte zkoušku:

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= -12 \\ 2x_1 - x_2 - \; x_3 &= -3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$