Matematika II: Pracovní listy

Funkce dvou reálných proměnných

Petra Schreiberová, Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Ostrava 2018

Obsah

Kapitola 1

Funkce dvou proměnných

1.1 Definice

Definice: Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $M \neq \emptyset$ množina. Funkcí dvou proměnných na M rozumíme každé zobrazení

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad M \ni [x,y] \mapsto z = f(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Množinu M nazýváme definičním oborem funkce f a značíme ji D_f.

Množina $\mathbb{R}^2$ je kartézským součinem množiny $\mathbb{R}$ se sebou, tedy $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, jejími prvky a také prvky její podmnožiny M jsou tzv. uspořádané dvojice.

Poznámka:

- V analogii s označením používaným pro funkci jedné proměnné, $y = f(x)$, budeme pro označení funkce dvou proměnných používat $z = f(x,y)$.
- Proměnné x a y budeme nazývat nezávislé proměnné. Proměnnou z budeme nazývat závislou proměnnou.
- Není-li specifikován definiční obor, automaticky uvažujeme maximální přípustnou podmnožinu v $\mathbb{R}^2$.
- Pro funkci tří a případně více proměnných máme zcela analogickou definici, přidáváme v podstatě pouze nezávislé proměnné.
- Prvek množiny M nazýváme bod z definičního oboru, obvykle se pro jeho označení používají velká písmena, tj. např. $A \in M$. Bod A je určen dvěma složkami, $A = [x_0, y_0]$.
- Hodnota $z = f(A) = f(x_0, y_0)$ se nazývá funkční hodnota.

Princip hledání definičního oboru pro funkci dvou proměnných je zcela analogický jako pro funkci jedné proměnné. Sestavíme a vyhodnotíme jednotlivé omezující podmínky.

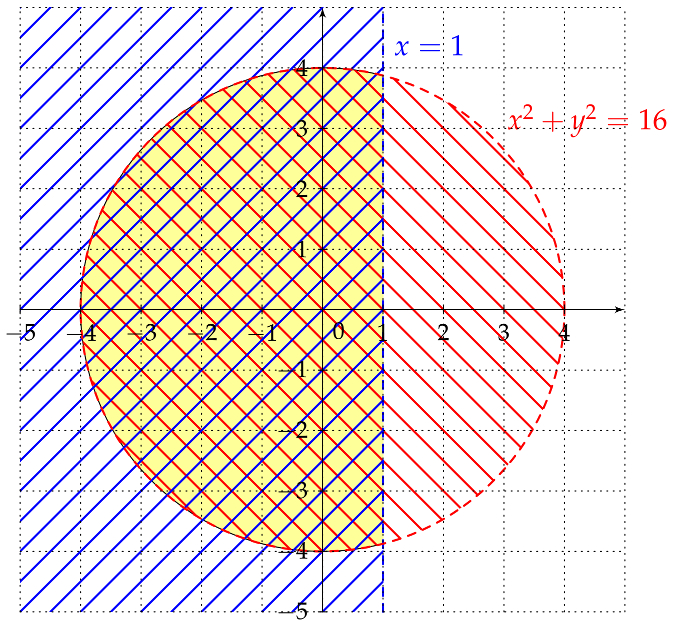
Příklad 1: Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce $z = \dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.

Řešení:
Sestavíme omezující podmínky na definiční obor.

Podmínka $1 - x > 0$ zaručí existenci logaritmu $\Rightarrow x < 1$. Jedná se o polorovinu s hraniční přímkou o rovnici $x = 1$, která ovšem do definičního oboru nepatří, bude vyznačena čárkovaně.

Podmínka $16 - x^2 - y^2 \geq 0$ zajistí existenci druhé odmocniny, podmínka $\sqrt{16 - x^2 - y^2} \neq 0$ vyloučí možnost dělení nulou. Tyto dvě podmínky se dají sloučit do jediné podmínky, $16 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 4^2$. Jedná se o kruh se středem v počátku a poloměrem 4. Hraniční kružnice do definičního oboru patřit nebude, bude vyznačena čárkovaně.

Definičním oborem je pak průnik obou ploch, na obrázku žlutě vyznačená plocha.



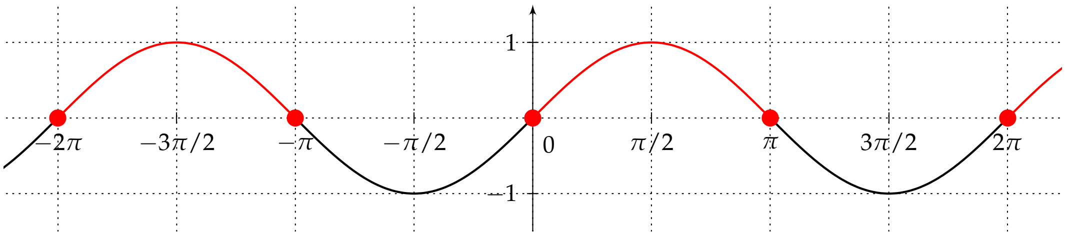
Příklad 2: Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce $z = \sqrt{y \sin x}$.

Řešení:
Sestavíme omezující podmínky na definiční obor. Podmínka $y \sin x \geq 0$ zaručí existenci odmocniny. Součin $y \sin x$ je nezáporný, když jsou oba činitelé nezáporní, nebo jsou oba nekladní, tedy

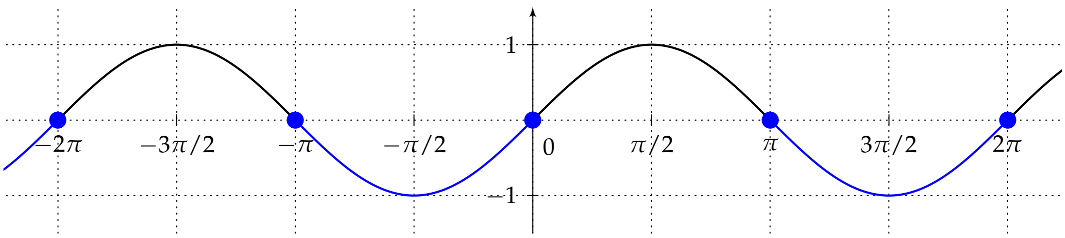
$$(y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0).$$

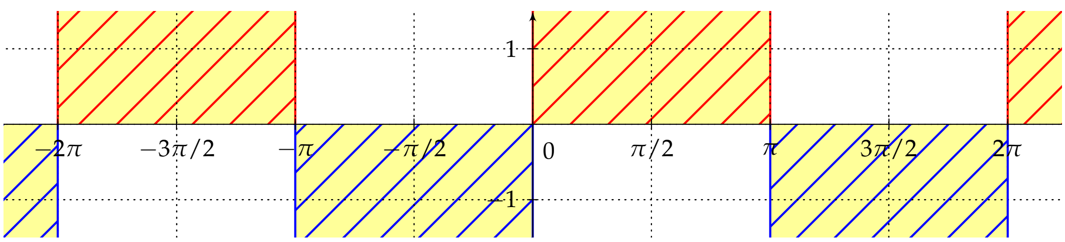
Ještě je nutné vyřešit nerovnici $\sin x \geq 0$ resp. $\sin x \leq 0$, ptáme se, kdy je funkce sinus nezáporná a kdy je nekladná.

$$\sin x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 0 + k2\pi, \pi + k2\pi \rangle$$



$$\sin x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\pi + k2\pi, 0 + k2\pi \rangle$$





Příklady k procvičení: Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce:

a) $z = \dfrac{x-y+8}{x+y-2}$

b) $z = \sqrt{2x+y}$

c) $z = \sqrt{y^2-1}$

d) $z = \dfrac{x+2y}{\sqrt{y^2-1}} + \sqrt{x^2-1}$

e) $z = \ln x + \ln y$

f) $z = \ln(y(x+2))$

g) $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$

h) $z = \dfrac{1}{\arcsin x \arccos x}$

i) $z = \ln(xy-4)$

j) $z = \sqrt{\dfrac{y-x^2}{x^3-y}}$

k) $z = \arccos\left(2x^2 + \dfrac{2y^2}{9} - 1\right)$

l) $z = \sqrt{\cos(x-y)}$

1.2 Graf funkce dvou proměnných

Definice: Grafem funkce dvou proměnných rozumíme množinu $G_f = \{[x,y,z=f(x,y)] \mid [x,y] \in D_f\}$.

Poznámka:

- Množina G_f je podmnožinou v $\mathbb{R}^3$, $G_f \subset \mathbb{R}^3$. Nejčastěji budeme pracovat s funkcemi, jejichž grafem je nějaká plocha v trojrozměrném prostoru.
- Nakreslit graf funkce dvou proměnných tzv. „v ruce“ je poměrně obtížné, a často to vůbec není možné. Jednou z možností, kterou máme k dispozici, je využít průsečnice grafu zadané funkce se souřadnicovými rovinami, především s půdorysnou rovinou.
- K vizualizaci grafů se používá výpočetní technika, existuje řada komerčních i volně šiřitelných programů (Gnuplot, Maple, Matematika, Matlab, Wolfram atd.).
- Grafem funkce tří proměnných je plocha v $\mathbb{R}^4$, tzv. nadplocha. Nelze ji ovšem graficky znázornit.

Definice: Řezy grafu funkce $z = f(x,y)$ rovinami rovnoběžnými s půdorysnou rovinou se nazývají vrstevnice. Vrstevnicovým grafem rozumíme průměty vrstevnic do půdorysné roviny $z = 0$.

Vrstevnice je množina bodů se stejnou funkční hodnotou. S vrstevnicemi se můžeme setkat především na turistických mapách, kde vrstevnice (obvykle šedé křivky) reprezentují množiny bodů se stejnou nadmořskou výškou. Na obrázku se nachází turistická mapa okolí Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava.

`http://mapy.cz/#!x=18.151648&y=49.832078&z=14&l=16.`

Příklad 3: Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{5x}{x^2+y^2+1}$.

Řešení:

Dosadíme do zadané funkce $z = k$, kde $k \in \mathbb{R}$, tedy

$$k = \frac{5x}{x^2+y^2+1} \;\Rightarrow\; x^2+y^2+1 = \frac{5x}{k} \;\Rightarrow\; x^2 - \frac{5x}{k} + y^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \left(x - \frac{5}{2k}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4k^2} + 1 = 0.$$

Výraz $x^2 - \dfrac{5x}{k}$ jsme doplnili na úplný čtverec, $x^2 - \dfrac{5x}{k} = \left(x - \dfrac{5}{2k}\right)^2 - \dfrac{25}{4k^2}$.

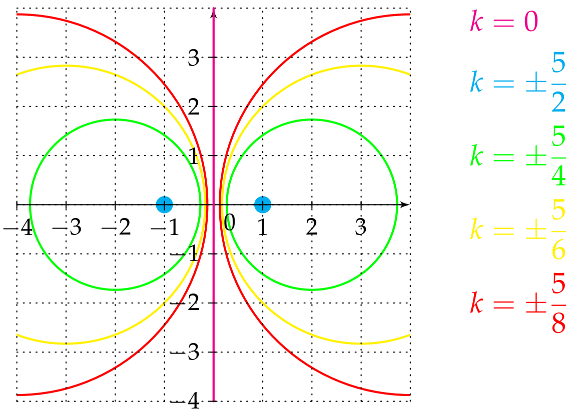
Nyní je třeba diskutovat konkrétní hodnoty k.

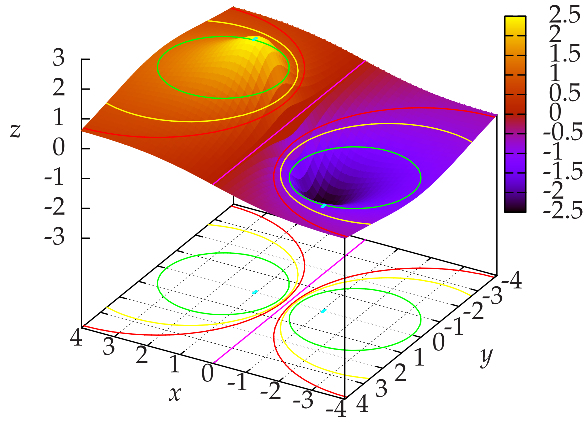
1. Pro $k = 0$ (řez grafu funkce z půdorysnou rovinou) dostáváme $0 = \dfrac{5x}{x^2+y^2+1} \;\Rightarrow\; x = 0$, vrstevnicí je osa y.

2. Pro $k \neq 0$ dostáváme $\left(x - \dfrac{5}{2k}\right)^2 + y^2 = \dfrac{25}{4k^2} - 1$. Vrstevnicemi budou kružnice pouze v případě, kdy pravá strana rovnice bude větší než 0.

$$\frac{25}{4k^2} - 1 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{25}{4k^2} > 1 \;\Rightarrow\; 25 > 4k^2 \;\Rightarrow\; k^2 < \frac{25}{4} \;\Rightarrow\; |k| < \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; k \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

3. Pro $k = \pm\dfrac{5}{2}$ platí $(x \pm 1)^2 + y^2 = 0$. Jedná se o dvě singulární kružnice (body). Vrstevnicemi jsou dva body, $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.





Hledáme průniky grafu funkce s rovinami rovnoběžnými s půdorysnou rovinou, tj. dosazujeme $z = k$, $k \in \mathbb{R}$. Číslo k je možné volit libovolně. Ovšem může se stát, že při nevhodné volbě se plochy neprotnou.

Příklady k procvičení: Sestrojte vrstevnicový graf funkce:

a) $z = x^2 + y^2 - 4$

b) $z = \dfrac{2y}{x^2} + 1$

1.3 Limita a spojitost funkce dvou proměnných

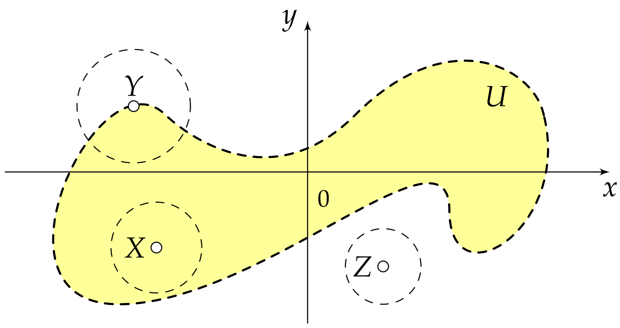
Limita s spojitost funkce dvou proměnných je definována úplně stejně, jako v případě funkcí jedné proměnné.

Definice: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v hromadném bodě $P = [x_0, y_0]$ limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže $\forall \epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall X \in \mathring{\mathcal{O}}_\delta(P)$ platí $|f(X) - a| < \epsilon$.

Pojem okolí bodu je zobecněn, v případě funkcí jedné proměnné se jedná o otevřený interval, pro funkce dvou proměnných se jedná o otevřený kruh (kruh bez hraniční kružnice).

Okolí $\mathring{\mathcal{O}}_\delta(P)$ je tzv. deltové prstencové okolí v bodě P, jedná se o otevřený kruh se středem v bodě P bez bodu P o poloměru δ.

Definice: Buď $U \subset \mathbb{R}^2$, bod $P \in \mathbb{R}^2$ se nazývá hromadný bod množiny U, jestliže každé jeho prstencové okolí $\mathring{\mathcal{O}}(P)$ má s množinou U neprázdný průnik, $\mathring{\mathcal{O}}(X) \cap U \neq \emptyset$.



Body X a Y jsou hromadné body množiny U. Bod Z není hromadným bodem množiny U.

V případě funkcí jedné proměnné vyšetřujeme chování funkce (počítáme limitu) na levé resp. pravé části okolí (otevřeného intervalu). Zkoumáme pouze dva případy. Problém u funkcí dvou proměnných je ten, že k limitnímu bodu se můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby.

Limity funkcí dvou proměnných řešíme většinou přímým dosazením limitního bodu. Řeší se spíše jiný typ úlohy, dokazuje se, že limita v daném bodě neexistuje.

Používaná notace:

$$\lim_{X \to P} f(X) = a, \qquad \lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y) = a.$$

Definice: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je spojitá v bodě $P = [x_0, y_0] \in D_f$, jestliže platí

$$\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funkce je spojitá v bodě, jestliže existuje limita v tomto bodě, kterou určíme přímým dosazením limitního bodu, tj. jako funkční hodnotu v tomto bodě.

Funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Příklad 4: Vypočítejte limitu funkce $z = \dfrac{y(x+1)}{x^3+1}$ v bodě $[-1, 0]$ a dokažte, že limita funkce $z = \dfrac{x^2+x}{xy+y}$ v bodě $[0, 0]$ neexistuje.

Řešení:
Řešíme první část úlohy,

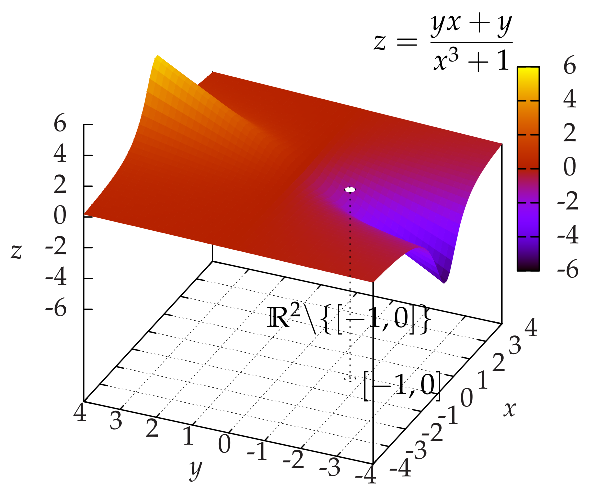
$$\lim_{[x,y] \to [-1,0]} \frac{yx+y}{x^3+1} = \text{„}\frac{0}{0}\text{“} = \lim_{[x,y] \to [-1,0]} \frac{y(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{[x,y] \to [-1,0]} \frac{y}{x^2-x+1} = 0.$$

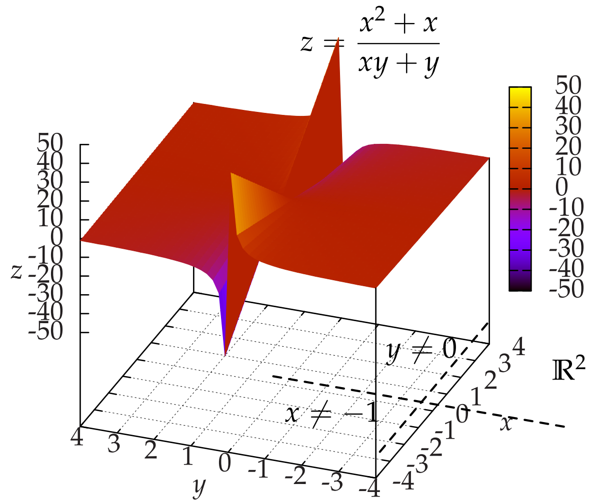
Ve druhé části úlohy musíme dokázat, že limita neexistuje. Na rozdíl od funkcí jedné proměnné, kdy se k limitnímu bodu můžerme blížit pouze ze dvou stran (zleva a zprava), v případě funkcí dvou i více proměnných se k limitnímu bodu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby. Limita neexistuje v případě, že její hodnota závisí na volbě přibližování, či se pro různé volby přibližování mění. Pokud ovšem limita na konkrétní volbě přibližování nezávisí, pak to ještě neznamená, že existuje.

Zkusme se k limitnímu bodu blížit po přímkách prochazejících počátkem, tj. volíme $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Dosadíme $y = kx$ do funkce $z = \dfrac{x^2+x}{xy+y}$,

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+x}{xy+y} = „\frac{0}{0}“ \overset{y=kx}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{kx^2+kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{k(x^2+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{k},$$

limita závisí na parametru k, pro různé volby parametru k vyjde různě. Tzn. limita funkce $z = \dfrac{x^2+x}{xy+y}$ v bodě $[0,0]$ neexistuje.





Příklady k procvičení: Vyřešte:

a) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,2]} \frac{xy+x-y}{x^3-2}$ b) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{6}]} \sin(2x+y)$ c) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{x^3+1}{y(x+1)}$

Kapitola 2

Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

2.1 Parciální derivace

Definice: Řekneme, že má funkce $z = f(x,y)$ parciální derivaci podle x (prvního řádu) v bodě $A = [x_0, y_0]$, jestliže existuje vlastní limita

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Analogicky definujeme parciální derivaci podle y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

V obou případech se počítá limita z funkce proměnné h, h se mění, zbytek je fixován. Jedná se tedy o limitu funkce jedné proměnné.

Poznámka:

- Označení parciálních derivací: $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(A)$, $f_x(A)$, $f'_x(A)$, atd.
- Parciální derivace v obecném bodě, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}$ resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou opět funkce dvou proměnných.
- Zcela analogicky se definují parciální derivace funkce tří a více proměnných.
- Když určujeme parciální derivaci podle x, pak vše co není x ve funkci $z = f(x,y)$ chápeme jako konstantu. Tzn. derivujeme takovou funkci jako funkci jedné proměnné, proměnné x. U parciálních derivací podle y postupujeme stejně, co není y chápeme jako konstantu.

Počítat parciální derivace funkce dvou proměnných znamená ve skutečnosti výpočet derivací funkcí jedné proměnné. Pro derivování používáme stejné formule a pravidla jako v případě funkcí jedné proměnné.

1.	$(c)' = 0$	8.	$(\cos x)' = -\sin x$		$u = u(x) \quad v = v(x)$
2.	$(x^n)' = nx^{n-1}$	9.	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	15.	$[c \cdot u]' = c \cdot u'$
3.	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	10.	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	16.	$[u \pm v]' = u' \pm v'$
4.	$(a^x)' = a^x \ln a$	11.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	17.	$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
5.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	12.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18.	$\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
6.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	13.	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	19.	$[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$
7.	$(\sin x)' = \cos x$	14.	$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$		

Věta: Nechť existují parciální derivace funkcí dvou proměnných f a g podle jednotlivých proměnných $x = x_1$ a $y = x_2$ na $Q \subseteq D_f \cap D_g$ v bodě $X = [x_1, x_2]$. Pak platí pro každé $i = 1, 2$,

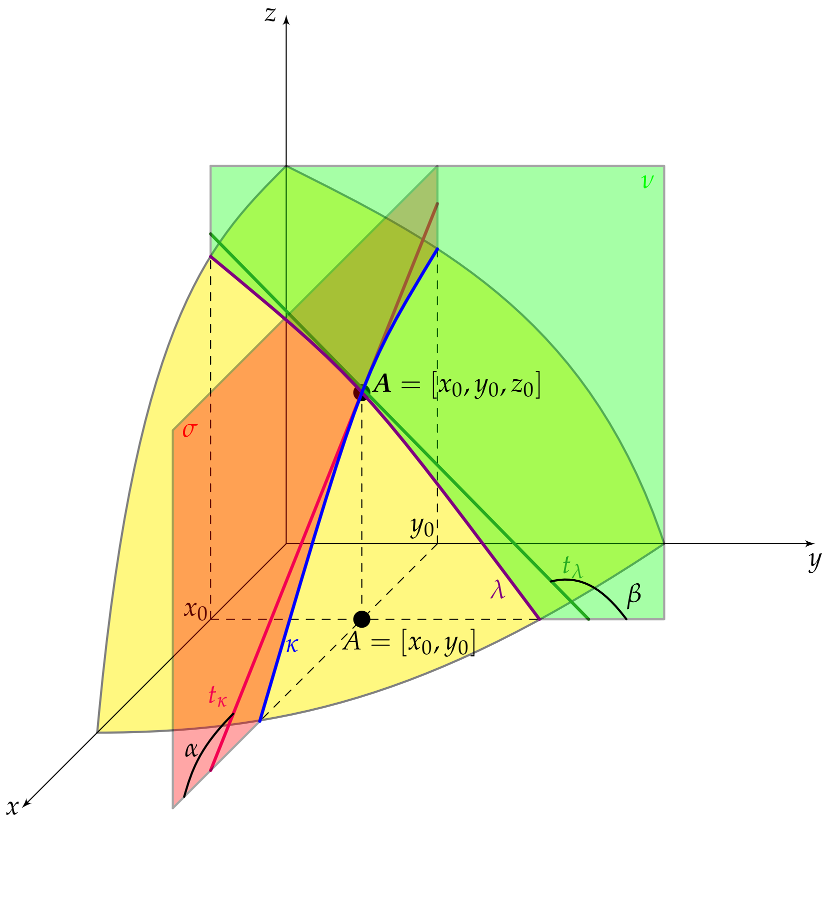
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f \pm g)(X) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(X), \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g)(X) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) + f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X), \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}(X)\right) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) - f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X)}{g^2(X)}. \end{aligned}$$

2.2 Geometrický význam parciálních derivací

Geometrický význam parciálních derivací je úplně stejný, jako v případě „obyčejné“ derivace funkce jedné proměnné. Jedná se o směrnici tečny sestrojené v daném bodě.

Rovina σ určená rovnicí $y = y_0$ je rovnoběžná s rovinou xz (rovina xz je určena rovnicí $y = 0$). Průnikem roviny σ s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka κ. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $A = [x_0, y_0]$, je směrnice tečny $(\tan \alpha)$ t_κ ke křivce κ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$.

Rovina ν určená rovnicí $x = x_0$ je rovnoběžná s rovinou yz (rovina yz je určena rovnicí $x = 0$). Průnikem roviny ν s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka λ. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$, $A = [x_0, y_0]$, je směrnice tečny $(\tan \beta)$ t_λ ke křivce λ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$.



Poznámka: Parciální derivace druhého a vyšších řádů jsou definovány pomocí parciálních derivací prvního řádu.

Definice: Parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ jsou definovány:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Věta: (Schwarzova věta) Jsou-li smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak jsou si v tomto bodě rovny, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A)$.

Příklad 5: Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z = x^2 \sin^2(xy^2)$ v bodě $[\pi, 0]$.

Řešení:
Parciální derivace prvního řádu počítáme vzhledem k jednotlivým proměnným funkce z. Funkce z je funkcí dvou nezávislých proměnných, proměnné x a y. Parciální derivace tedy budeme počítat jak podle proměnné x, tak i podle proměnné y.
Vzhledem k definici parciální derivace budeme postupovat tak, že s proměnnou, podle které se nederivuje, budeme pracovat jako s konstantou. To ale v konečném důsledku znamená, že ve funkci z zůstane pouze jedna nezávislá proměnná. Funkce z se stává funkcí jedné proměnné. Takovou funkci již umíme snadno zderivovat.

Parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$ funkce z podle proměnné x:

Funkci z derivujeme podle x, proto s proměnnou y budeme pracovat jako s konstantou. Úkolem je derivovat součin dvou funkcí proměnné x, funkce x^2 a složené funkce $\sin^2(xy^2)$, kterou derivujeme po jednotlivých složkách v pořadí: druhá mocnina, sinus, xy^2; ve výrazu xy^2 je y^2 konstanta v součinu a proto se derivuje pouze x.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) \cdot \sin^2(xy^2) + x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sin^2(xy^2)) \\ &= 2x \sin^2(xy^2) + x^2 \cdot 2\sin(xy^2) \cdot \cos(xy^2) \cdot y^2 = 2x \sin^2(xy^2) + 2x^2y^2 \sin(xy^2)\cos(xy^2).\end{aligned}$$

Parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial y}$ funkce z podle proměnné y:

Derivujeme zcela analogicky, v tomto případě budeme jako s konstantou pracovat s proměnnou x, derivujeme tedy složenou funkci; x^2 je konstanta v součinu, proto se derivuje podle y pouze druhý činitel jako složená funkce v pořadí: druhá mocnina, sinus, xy^2; ve výrazu xy^2 je x konstanta v součinu a proto se derivuje pouze y^2,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(\sin^2(xy^2)) = x^2 \cdot 2\sin(xy^2) \cdot \cos(xy^2) \cdot x2y = 4x^3y \sin(xy^2)\cos(xy^2).$$

Parciální derivace jsou opět funkce dvou proměnných a snadno je vyčíslíme na zadaném bodě přímým dosazením:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\pi, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(\pi, 0) = 0.$$

Příklad 6: Určete parciální derivace druhého řádu funkce $z = x^y$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení:
Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu,

derivace podle x, derivujeme mocninou funkci	$\frac{\partial z}{\partial x}$	$= yx^{y-1}$
derivace podle y, derivujeme exponenciální funkci	$\frac{\partial z}{\partial y}$	$= x^y \ln x$

K určení parciálních derivací druhého řádu je třeba parciální derivace prvního řádu (opět se jedná o funkce dvou proměnných) derivovat jak podle x, tak i podle y,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^y \ln x) = yx^{y-1}\ln x + x^y \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = x^y \ln x \ln x = x^y \ln^2 x.\end{aligned}$$

Zdůrazněme, že v případě spojitých funkcí se spojitými parciálními derivacemi se smíšené parciální derivace podle Schwarzovy věty rovnají.
Vskutku:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = yx^{y-1}\ln x + x^y\frac{1}{x} = yx^{y-1}\ln x + x^y x^{-1} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Opět zbývá jednoduché vyčíslení parciálních derivací druhého řádu přímým dosazením zadaného bodu $[1,1]$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,1) = 0.$$

Příklad 7: Určete parciální derivaci $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$ funkce $z = 2x^2 e^y + \sin(xy^2)$.

Řešení:
Derivujeme funkci z postupně podle jednotlivých proměnných. Nejdříve derivujeme podle x, poté ještě jednou podle x a pak postupně dvakrát podle y.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xe^y + \cos(xy^2)\cdot y^2 = 4xe^y + y^2\cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4e^y + y^2(-\sin(xy^2)\cdot y^2) = 4e^y - y^4\sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 4e^y - [4y^3\sin(xy^2) + y^4\cos(xy^2)\cdot x2y] = 4e^y - 4y^3\sin(xy^2) - 2xy^5\cos(xy^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} &= 4e^y - [12y^2\sin(xy^2) + 4y^3\cos(xy^2)\cdot x2y] - [10xy^4\cos(xy^2) + 2xy^5(-\sin(xy^2)\cdot x2y)] \\ &= 4e^y - 12y^2\sin(xy^2) - 8xy^4\cos(xy^2) - 10xy^4\cos(xy^2) + 4x^2y^6\sin(xy^2) \\ &= 4e^y - 12y^2\sin(xy^2) - 18xy^4\cos(xy^2) + 4x^2y^6\sin(xy^2)\end{aligned}$$

Příklady k procvičení: Nalezněte parciální derivace prvního řádu:

a) $z = x^2 + y^2$

b) $z = \sin(2x + y)$

c) $z = (x^3 + 1)y(x + 1)$

d) $z = \dfrac{xy + x - y}{x^3 - 2}$

e) $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{\ln(x - y^2)}$

f) $z = \tan(\ln(xy))$

g) $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ v bodě $[1,-1]$

h) $z = (x + y)\sqrt{1 - x^2y^2}$ v bodě $[1,0]$

i) $z = \ln\arctan\dfrac{x}{y - x}$ v bodě $[1,2]$

Příklady k procvičení: Nalezněte parciální derivace druhého řádu:

a) $z = \cot(x + 2y)$

b) $z = xe^{(y+1)}$

c) $z = x^y$

d) $z = x^2\ln y$ v bodě $[3,1]$

e) $z = ye^{-xy^2}$ v bodě $[-1,1]$

Příklady k procvičení: Vypočítejte parciální derivaci $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ funkce $z = \ln(2x + y)$.

2.3 Diferenciál

Definice: Řekneme, že funkce $z = f(x,y)$ je v bodě $A = [x_0, y_0]$ diferencovatelná, nebo má v tomto bodě diferenciál, jestliže je možné její přírůstek Δz na okolí bodu A vyjádřit jako

$$\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \mathcal{A}h + \mathcal{B}k + \rho\tau(h,k),$$

kde $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou konstanty, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ a $\lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h,k) = 0$. Funkce $z = f(x,y)$ se nazývá diferencovatelná, je-li diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru.

Věta: Je-li funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelní v bodě A, pak v bodě A existují parciální derivace prvního řádu a platí

$$\mathcal{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad \mathcal{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(A).$$

Poznámka: Číslo h představuje přírůstek na ose x, k je přírůstek na ose y a bývá zvykem tyto přírůstky značit $h = dx$ resp. $k = dy$. Pro přírůstek na ose z v bodě A při známé hodnotně dx a dy pak dostáváme

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(A)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A)dy + \rho\tau(dx,dy).$$

Definice: Je-li funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná, nazývá se výraz

$$dz = df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

diferenciál funkce $z = f(x,y)$.

Věta: Je-li funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná v bodě A, pak je v tomto bodě spojitá.

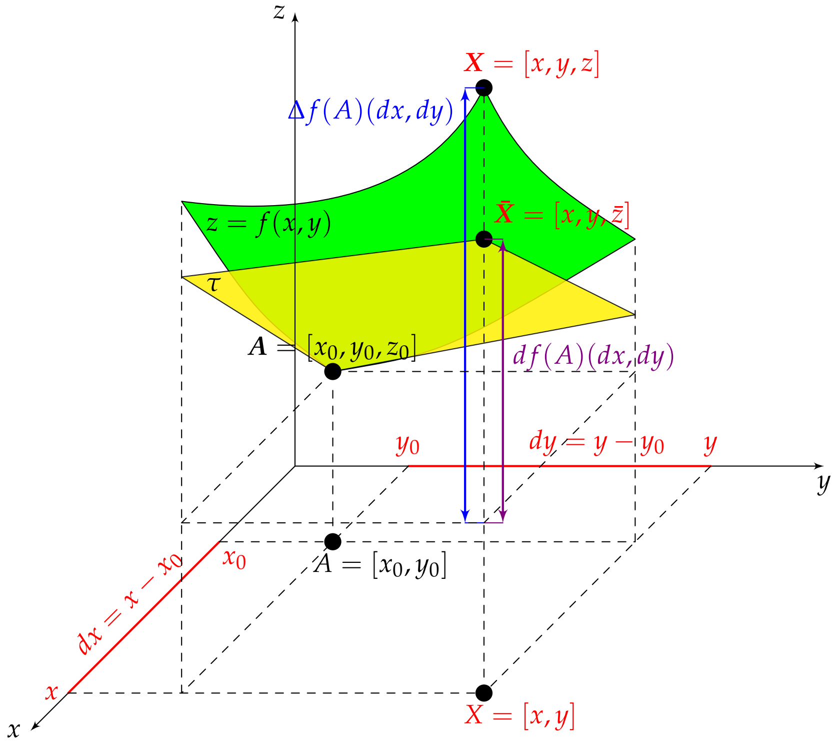
Věta: Jsou-li parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x,y)$ spojité v A, pak je funkce $z = f(x,y)$ v bodě A diferencovatelná (a tedy i spojitá).

Poznámka:

- *Diferenciál funkce* $z = f(x,y)$
$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$
- *Diferenciál funkce* z v bodě $A = [x_0, y_0]$
$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0).$$
- *Diferenciál funkce* z v bodě $A = [x_0, y_0]$ při známých přírůstcích dx, dy,
$$dz(A)(dx,dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}$$
- *Diferenciál druhého řádu funkce* $z = f(x,y)$
$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$
- Přibližný výpočet funkčních hodnot
$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(dx,dy)$$

Geometrický význam diferenciálu

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$ v bodě A při známých přírůstcích dx a dy je přírůstek na tečné rovině ke grafu funkce f v bodě $\boldsymbol{A}$.



Příklad 8: Vypočítejte diferenciál funkce $z = f(x, y) = \sqrt{xy}$ v bodě $A = [2, 1]$. Určete přibližně hodnotu $f(2,04; 0,99)$.

Řešení:
Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu podle proměnných x a y,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}}.$$

Sestavíme diferenciál funkce z,

$$dz = \frac{y}{2\sqrt{xy}}dx + \frac{x}{2\sqrt{xy}}dy = \frac{1}{2\sqrt{xy}}(ydx + xdy).$$

Dosadíme do diferenciálu dz bod A,

$$dz(A) = dz(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1(x-2) + 2(y-1)) = \frac{\sqrt{2}}{4}(x + 2y - 4).$$

Všimněme si, že diferenciál v bodě je lineární funkce dvou proměnných.

Pro přibližný vypočet funkčních hodnot použijeme vztah

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy).$$

Určíme přírustky od bodu $A = [2, 1]$ k bodu $[2,04; 0,99]$,

$$dx = x - x_0 = 2,04 - 2 = 0,04; \quad dy = y - y_0 = 0,99 - 1 = -0,01.$$

Vypočteme funkční hodnotu $f(A) = f(2, 1) = \sqrt{2}$ a určíme hodnotu diferenciálu $dz(A)(dx, dy)$ při známých přírustcích,

$$dz(A)(dx, dy) = dz(2, 1)(0,04; -0,01) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 \cdot 0,04 - 2 \cdot 0,01) = \frac{1}{2\sqrt{2}}0,02 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2}{100} = \frac{\sqrt{2}}{200}.$$

Přibližná hodnota funkce $f(2,04; 0,99)$ pak bude

$$f(2,04; 0,99) \approx f(A) + df(A)(dx, dy) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{200} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{200}\right).$$

Příklad 9: Vypočítejte diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Řešení:
Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu podle proměnných x a y,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

Určíme parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2y(x-y)^{-2}) = -2y(-2)(x-y)^{-3}\cdot 1 = \frac{4y}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2y}{(x-y)^2}\right) = \frac{-2(x-y)^2-(-2y)2(x-y)\cdot(-1)}{(x-y)^4} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{(x-y)^2}\right) = \frac{2(x-y)^2-2x\cdot 2(x-y)\cdot 1}{(x-y)^4} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x(x-y)^{-2}) = 2x(-2)(x-y)^{-3}\cdot(-1) = \frac{4x}{(x-y)^3}.$$

Sestavíme diferenciál druhého řádu

$$d^2z = \frac{4y}{(x-y)^3}dx^2 - 4\frac{x+y}{(x-y)^3}dxdy + \frac{4x}{(x-y)^3}dy^2 = \frac{4}{(x-y)^3}(ydx^2-(x+y)dxdy+4xdy^2).$$

Příklady k procvičení: Vypočítejte diferenciál funkce:

a) $z = \tan(x^2+y^2)$

b) $z = \dfrac{\sqrt{x}}{\log(x+2y)}$

c) $z = (x^3+y^3)\sin(xy)$

d) $z = \mathrm{e}^{x^2y^2-4}$ v bodě $[-1,2]$

e) $z = \arcsin\dfrac{y}{x+1}$ v bodě $[1,1]$

Příklady k procvičení: Určete přibližně hodnotu funkce $z = \sqrt{xy}$ v bodě $[2,08;1,99]$.

Příklady k procvičení: Vypočítejte diferenciál druhého řádu funkce:

a) $z = \dfrac{xy}{x+y}$

b) $z = \sin(5x+2y)$

2.4 Tečná rovina

Věta: Nechť je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$. Pak v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ existuje tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ určená rovnicí

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0).$$

Přímka n kolmá k tečné rovině procházející bodem $\boldsymbol{A}$ se nazývá normála grafu funkce $z = f(x, y)$. Její směrový vektor je kolineární s normálovým vektorem roviny, $\vec{s}_n = \vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1\right)$.

Věta: Normála ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{A}$ je určena parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} n : x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(A)t, \\ y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - t \end{aligned}$$

Věta: Nechť je funkce $z = f(x, y)$ na okolí bodu $A \in D_f$ alespoň $(m+1)$-krát spojitě diferencovatelná. Pak v bodě $X \in \mathrm{O}(A)$ platí

$$\begin{aligned} f(X) &= f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^m f(A)}{m!} + R_m, \text{ kde} \\ R_m &= \frac{d^{m+1} f(A + \kappa(X - A))}{(m+1)!}, \ \kappa \in (0, 1). \end{aligned}$$

Definice: Výraz z předchozí věty nazýváme Taylorovým rozvojem funkce f na okolí bodu A. Hodnota R_m se nazývá Lagrangeův zbytek Taylorova rozvoje. Polynom

$$T_m(X) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^m f(A)}{m!}$$

se nazývá Taylorův polynom m-tého řádu funkce f v bodě A. Je-li $A = [0, 0]$, hovoříme o MacLaurionovu polynomu.

Příklad 10: Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $z = f(x, y) = \sqrt{2x} - \sqrt{3y} - x$ v bodě $\boldsymbol{A} = [2, 3, ?]$.

Řešení:
Bod $\boldsymbol{A}$ je bod dotyku, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, určíme jeho z-ovou složku, $z_0 = f(x_0, y_0) = f(2, 3) = -3$.

Vypočítáme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [2, 3]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{y}},$$

a tyto funkce dvou proměnných vyčíslíme na bodě $A = [2, 3]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}.$$

Sestavíme rovnici tečné roviny

$$\tau : z + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 3),$$

rovnici převedeme na obecný tvar

$$\tau : x + y + 2z + 1 = 0.$$

Pro parametrické rovnice normály dostáváme

$$n : \quad \begin{aligned} x &= 2 - \frac{1}{2}t \\ y &= 3 - \frac{1}{2}t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= -3 - t \end{aligned}$$

Příklad 11: Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = f(x,y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + x - y + 1$ v bodě $A = [1,1]$.

Řešení:
Určíme hodnoty $f(A)$, $df(A)$ a $d^2f(A)$. Poté dosadíme do formule pro Taylorův polynom druhého řádu.
Bod $A = [x_0, y_0] = [1,1]$.

$$\begin{aligned}
f(A) &= 5 \\
df(A) &= (4x - y + 1)|_{[1,1]}(x-1) + (-x + 6y - 1)|_{[1,1]}(y-1) = 4(x-1) + 4(y-1) = 4x + 4y - 8 \\
d^2f(A) &= 4|_{[1,1]}(x-1)^2 + 2 \cdot (-1)|_{[1,1]}(x-1)(y-1) + 6|_{[1,1]}(y-1)^2 \\
&= 4x^2 - 8x + 4 - 2xy + 2x + 2y - 2 + 6y^2 - 12y + 6 = 4x^2 - 2xy + 6y^2 - 6x - 10y + 8 \\
T_2(A) &= 5 + \frac{4x + 4y - 8}{1!} + \frac{4x^2 - 2xy + 6y^2 - 6x - 10y + 8}{2!} \\
&= 5 + 4x + 4y - 8 + 2x^2 - xy + 3y^2 - 3x - 5y + 4 = 2x^2 - xy + 3y^2 + x - y + 1
\end{aligned}$$

Příklady k procvičení:

a) Nalezněte tečnou rovinu τ a normálu n ke grafu funkce $z = \ln(x^2 - 3y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [2,1,?]$.

b) Nalezněte tečnou rovinu τ a normálu n ke grafu funkce $z = \sqrt{x^2 + xy + 1}$ v bodě $\boldsymbol{A} = [0,4,?]$.

c) Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = 3x^2y + 4xy^2 + x^3$ v bodě $A = [2,-1]$.

d) Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = \ln \dfrac{1}{xy}$ v bodě $A = [-2,-3]$.

2.5 Implicitní funkce a její derivace

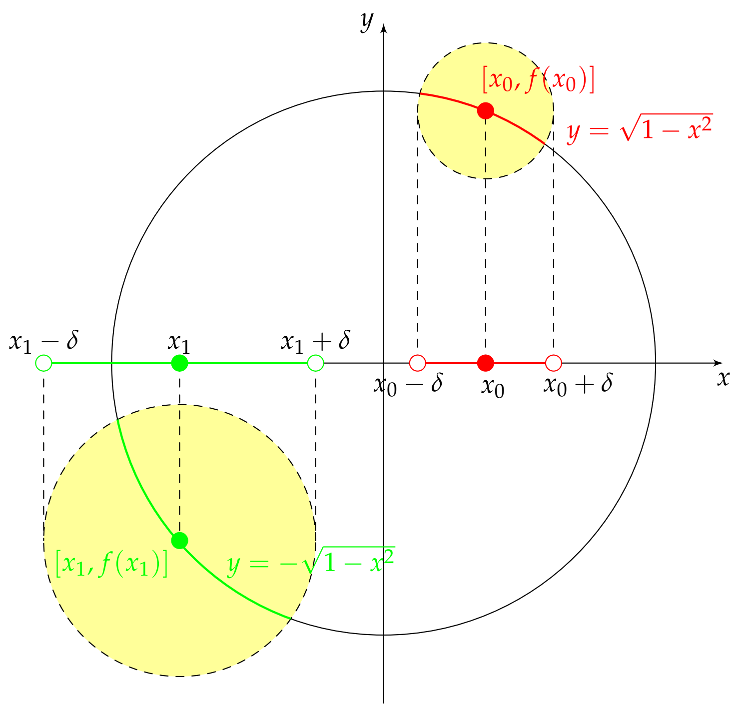
Definice: Buď $z = F(x,y)$ funkce dvou proměnných. Uvažujme křivku

$$M = \{[x,y] \in D_F \mid F(x,y) = 0\}.$$

Nechť $A = [x_0, y_0] \in M$ je bod, $\mathcal{O}_\delta(A) \subset \mathbb{R}^2$ je deltové okolí bodu A, $\delta > 0$. Jestliže je rovnicí $F(x,y) = 0$ na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ určena funkce $y = f(x)$ taková, že platí

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

pak říkáme, že funkce f je na okolí bodu A definována implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$.



Na obrázku je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1,

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Na intervalu $(-1, 1)$ jsou rovnicí určeny dvě implicitní funkce, $y = \sqrt{1 - x^2}$ (horní půlkružnice) a $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (spodní půlkružnice). V bodech $[1, 0]$ a $[-1, 0]$ implicitní funkce neexistuje, každé okolí těchto bodů obsahuje body jak horní, tak spodní půlkružnice.

Poznámka: Ne ke každé rovnici $F(x, y) = 0$ existuje jediná implicitní funkce.

Věta: Nechť je funkce $z = F(x, y)$ je spojitá na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ a $F(A) = 0$. Nechť F má v A spojitou parciální derivaci $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$ a platí $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu A, na kterém je rovnicí $F(x, y) = 0$ definována jediná spojitá implicitní funkce $y = f(x)$.

Poznámka: Podmínka na nenulovost parciální derivace funkce F je pouze podmínkou postačující pro existenci implicitní funkce. Z rovnice $y^3 - x = 0$ plyne $F(x, y) = y^3 - x$ a v bodě $[0, 0]$ platí $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 3y^2|_{[0,0]} = 0$. Přesto na okolí bodu $[0, 0]$ existuje jediná implicitní funkce $y = \sqrt[3]{x}$.

Derivace implicitní funkce

Věta: Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Nechť existují spojité parciální derivace funkce F. Pak má implicitní funkce f, která je na okolí bodu A dána rovnicí $F(x, y) = 0$, derivaci f' v bodě x_0 a platí

$$f'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(A)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(A)}.$$

Věta: Tečna t resp. normála n k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě A je určena rovnicí

$$t : \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) = 0,$$
$$n : \frac{\partial F}{\partial y}(A)(x - x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(A)(y - y_0) = 0.$$

Příklad 12: Oběma způsoby nalezněte derivaci implicitní funkce dané rovnicí $x^3 + y + y^2 - 2xy = 3$ v bodě $A = [1, -1]$.

Řešení:
V našem případě platí

$$F(x, y) = x^3 + y + y^2 - 2xy - 3.$$

Určíme parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2y - 2x.$$

Jedná se o spojité funkce, navíc

$$\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1 + 2y - 2x|_{A=[1,-1]} = -3 \neq 0.$$

Derivace implicitní funkce tedy existuje a je jediná. Dosadíme do formule pro derivaci implicitní funkce v bodě $A = [x_0, y_0] = [1, -1]$,

$$f'(1) = -\frac{3x^2 - 2y|_{[1,-1]}}{1 + 2y - 2x|_{[1,-1]}} = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}.$$

Druhý způsob spočívá v předpokladu, že v rovnici $F(x, y) = 0$ budeme předpokládat závislost $y = y(x)$. Tzn., že v této rovnici zustává pouze jediná nezávislá proměnná, a to x. Rovnici poté derivujeme podle x, zvlášť pravou i levou stranu rovnice,

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y + y^2 - 2xy - 3 = 0) \Rightarrow 3x^2 + y' + 2yy' - 2y - 2xy' = 0.$$

Z rovnice vyjádříme y'

$$y' + 2yy' - 2xy' = -3x^2 + 2y \Rightarrow y'(1 + 2y - 2x) = -3x^2 + 2y \Rightarrow y' = \frac{-3x^2 + 2y}{1 + 2y - 2x} = -\frac{3x^2 - 2y}{1 + 2y - 2x}.$$

Kde se v rovnici po derivaci vzalo y'? Musíme si uvědomit, že y závisí na x, $y = y(x)$. Nevíme ale, jak konkrétně ta závislost vypadá. Derivujeme tedy pouze formálně, tj. nad y napíšeme čárku. Funkci y^2 musíme ovšem derivovat jako složenou funkci, máme nějakou y závislost na x, na kterou působí druhá mocnina. Derivujeme nejdříve vnější složku (druhou mocninu) v tom samém bodě (v y) a poté násobíme derivací vnitřní funkce, derivací y podle x, což je formálně y'. Výraz $2xy$ musíme derivovat jako součin dvou funkcí proměnné x.

Příklad 13: Nalezněte tečnu a normálu k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $\mathrm{e}^{xy} = x + 2y$ v bodě $A = [1, 0]$.

Řešení:
V našem případě je funkce F dána

$$F(x, y) = \mathrm{e}^{xy} - x - 2y.$$

Určíme parciální derivace funkce F v bodě $A = [x_0, y_0] = [1, 0]$,

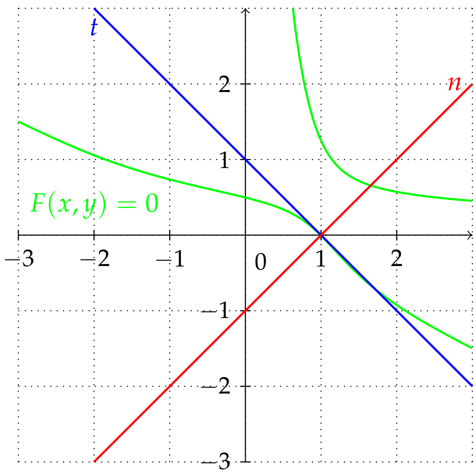
$$\frac{\partial F}{\partial x}(A) = y\mathrm{e}^{xy} - 1|_{[1,0]} = -1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(A) = x\mathrm{e}^{xy} - 2|_{[1,0]} = -1.$$

Sestavíme rovnici tečny t ke grafu implicitní funkce,

$$t : -(x - 1) - y = 0 \Rightarrow y = -x + 1.$$

Sestavíme rovnici normály n ke grafu implicitní funkce,

$$n : -(x - 1) + y = 0 \Rightarrow y = x - 1.$$



Příklady k procvičení:

a) Oběma způsoby nalezněte derivaci implicitní funkce dané rovnicí $x^2 + y^2 + y^3 - xy = 3$.

b) Oběma způsoby nalezněte derivaci implicitní funkce dané rovnicí $\cot(3y) = x^2 y$.

c) Oběma způsoby nalezněte derivaci implicitní funkce dané rovnicí $2^{xy} - 3^{x+y} = 4$ v bodě $A = [1, 2]$.

d) Nalezněte tečnu a normálu k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $\dfrac{x + y}{x - y} = 2$ v bodě $A = [3, 1]$.

e) Nalezněte tečnu a normálu k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $3^{xy} = y \ln 3 + x \ln 3$ v bodě $A = [-1, -1]$.

Kapitola 3

Extrémy funkcí dvou proměnných

3.1 Lokální extrémy

Definice: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A \in D_f$ lokální maximum, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq D_f$ bodu A takové, že $\forall X \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(X) \leq f(A)$. Platí-li $f(X) \geq f(A)$, hovoříme o lokálním minimu v bodě A. V případě ostrých nerovností hovoříme o ostrém lokálním maximu resp. minimu.

Definice: Řekneme, že bod $A \in D_f$ je stacionárním bodem funkce f, jestliže

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$$

Fermatova věta - nutná podmínka existence extrému

Věta: Nechť má funkce f v bodě A lokální extrém a nechť v A existují všechny parciální derivace prvního řádu. Pak je bod A stacionárním bodem funkce f.

Poznámka:

- Fermatova věta nevylučuje možnost existence extrému v bodě, který není stacionárním bodem funkce f, protože některá z parciálních derivací neexistuje.
- Podmínka pro stacionární body je ekvivalentní s podmínkou $df(A) = 0$, platí-li ovšem, že $df(A) \neq 0$, pak lokální extrém v A neexistuje.

Věta: Nechť existují alespoň spojité parciální derivace druhého řádu funkce f ve stacionárním bodě A, pak platí-li

- $d^2 f(A) < 0$, funkce f má v bodě A ostré lokální maximum,
- $d^2 f(A) > 0$, funkce f má v bodě A ostré lokální minimum.

Postačující podmínka pro existenci extrému

Věta: Nechť je funkce f na okolí bodu A dvakrát spojitě diferencovatelná. Nechť A je stacionární bod. Jestliže

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)\right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v A ostrý lokální extrém. Platí-li navíc

- $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$, funkce f má v bodě A ostré lokální maximum,
- $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, funkce f má v bodě A ostré lokální minimum.

Poznámka: Jestliže $D_2 = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. Toto lze v některých případech vyřešit prověřením lokálního chování funkce f na okolí bodu A.

Příklad 14: Nalezněte lokální extrémy funkce $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2)$.

Řešení:
Definičním oborem funkce z je množina $\mathbb{R}^2$. Určíme parciální derivace prvního řádu a sestavíme rovnice pro stacionární body,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2x)(2y^2+x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}2x = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-1) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2y)(2y^2+x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}4y = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-2) = 0.$$

Exponenciální funkce $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je kladná, tedy nikdy nemůže nabýt nulové hodnoty a lze ji z rovnic pro stacionární body vykrátit. Rovnice přejdou na tvar

$$x(2y^2+x^2-1) = 0,$$
$$y(2y^2+x^2-2) = 0.$$

Předpokládejme nejdříve, že $x = 0$. Ze druhé rovnice $y(2y^2-2) = 0$ dostaneme řešení $y = 0$ a $y = \pm 1$. Obdržíme tři různé stacionární body, $A_1 = [0,0]$, $A_2 = [0,1]$ a $A_3 = [0,-1]$.

Ve druhé rovnici předpokládejme, že $y = 0$. Z první rovnice $x(x^2-1) = 0$ dostaneme řešení $x = 0$ a $x = \pm 1$. Bod $[0,0]$ již máme vypočítaný, přibyly další dva nové stacionární body, bod $A_4 = [1,0]$ a $A_5 = [-1,0]$.

Pokud $x \neq 0$ i $y \neq 0$, řešíme následující soustavu rovnic,

$$2y^2+x^2-1 = 0,$$
$$2y^2+x^2-2 = 0.$$

Pokud obě rovnice od sebe odečteme, dostaneme rovnici $1 = 0$, ale 1 se nikdy 0 nerovná. Soustava nemá žádné řešení.

Určili jsme celkem pět stacionárních bodů:

$$A_1 = [0,0], \quad A_2 = [0,1], \quad A_3 = [0,-1], \quad A_4 = [1,0], \quad A_5 = [-1,0].$$

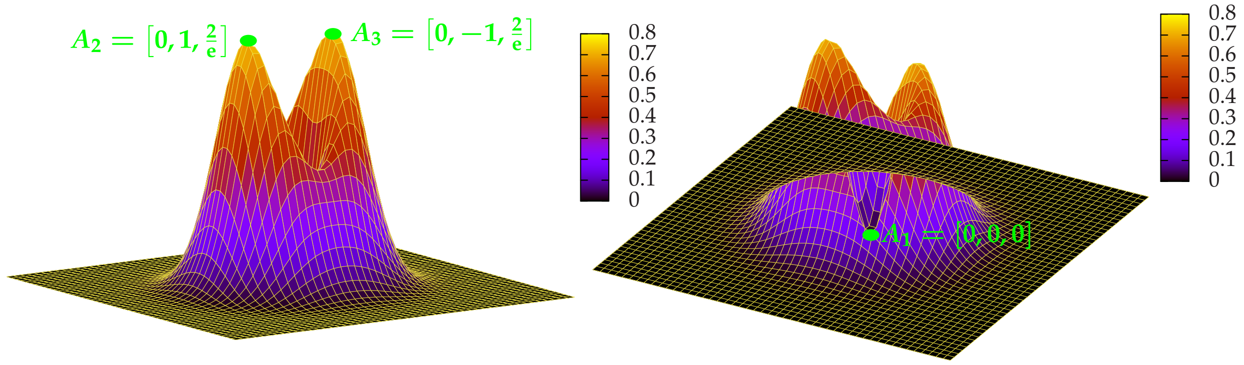
Určíme matici druhých parciálních derivací a vyhodnotíme ji na jednotlivých stacionárních bodech A_i, $i = 1,2,3,4,5$,

$$Q = \begin{pmatrix} ((-2+4x^2)(2y^2+x^2-1)-4x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} & 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-3) \\ 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-3) & ((-2+4y^2)(2y^2+x^2-2)-8y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{pmatrix},$$

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Q(A_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}, Q(A_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}, Q(A_4) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}, Q(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

V následující tabulce uvádíme souhrnný přehled klasifikace extrémů v jednotlivých bodech:

Stacionární bod A_i	D_1	D_2	extrém o hodnotě $z = f(A_i)$
$A_1 = [0,0]$	$2 > 0$	$8 > 0$	ostré lokální minimum $z = 0$
$A_2 = [0,1]$	$-\frac{2}{\mathrm{e}} < 0$	$\frac{16}{\mathrm{e}^2} > 0$	ostré lokální minimum $z = \frac{2}{\mathrm{e}}$
$A_3 = [0,-1]$	$-\frac{2}{\mathrm{e}} < 0$	$\frac{16}{\mathrm{e}^2} > 0$	ostré lokální minimum $z = \frac{2}{\mathrm{e}}$
$A_4 = [1,0]$	$-\frac{4}{\mathrm{e}} < 0$	$-\frac{8}{\mathrm{e}^2} < 0$	extrém neexistuje
$A_5 = [-1,0]$	$-\frac{4}{\mathrm{e}} < 0$	$-\frac{8}{\mathrm{e}^2} < 0$	extrém neexistuje



Příklad 15: Nalezněte lokální extrémy funkce $z = f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení:
Určíme parciální derivace prvního řádu a sestavíme rovnice pro stacionární body,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \sin(x - y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y + \sin(x - y) = 0.$$

Ze druhé rovnice dostáváme

$$\sin(x - y) = \sin y.$$

Protože jak x, tak y patří do intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, bude rozdíl $x - y$ patřit do intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Nicméně funkce sinus je jak na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, tak i na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ prostá, to ale znamená, že existuje funkce inverzní, arkussinus, kterou lze aplikovat na druhou rovnici,

$$\arcsin(\sin(x - y) = \sin y) \Rightarrow \arcsin(\sin(x - y)) = \arcsin(\sin y) \Rightarrow x - y = y \Rightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Tuto rovnici dosadíme do první rovnice,

$$\cos x - \sin(x - y) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin\left(x - \frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Využijeme goniometrické identity $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ a $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$,

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 1 - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2\sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - 1 = 0.$$

Použijeme substituci $\sin \dfrac{x}{2} = t$,

$$2\sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = -1.$$

Vzhledem k omezení x na interval $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ záporné řešení neuvažujeme,

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{x}{2}, \sin k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{stacionární bod } A = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right].$$

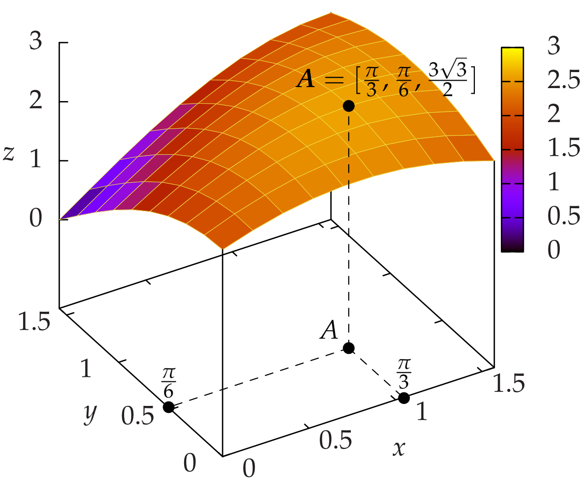
Určíme matici druhých parciálních derivací a vyhodnotíme ji na bodě A,

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x - y)|_A & \cos(x - y)|_A \\ \cos(x - y)|_A & -\cos y - \cos(x - y)|_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Určíme determinanty D_1 a D_2,

$$D_1 = -\sqrt{3}, \quad D_2 = \frac{9}{4}.$$

Protože $D_2 > 0$, v bodě $A = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ extrém existuje. Protože $D_1 < 0$, má funkce $z = f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ v bodě $A = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ ostré lokální maximum $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.



Příklady k procvičení: Nalezněte lokální extrémy funkce:

a) $z = x^2 + 6x + 3y^2 - 12y + 11$

b) $z = 3xy - x + 2y$

c) $z = x^2 - xy + 3x + y + 3$

d) $z = (x^2 + 4x)y + y^2$.

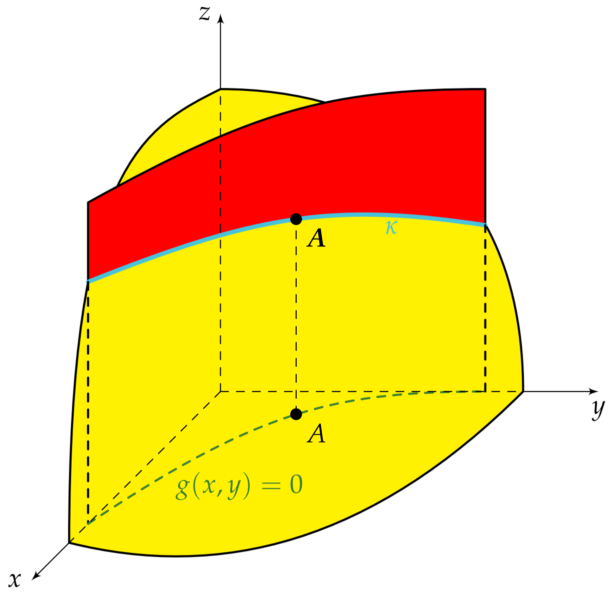
3.2 Vázané extrémy

Definice: Řekneme, že funkce $z = f(x,y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0]$ lokální extrém vázaný podmínkou $g(x,y) = 0$, jestliže $\forall X \in \mathcal{O}(A) \subset D_f$, které vyhovují uvedené podmínce. Platí

- $f(X) \leq f(A)$, funkce f má v bodě A vázané lokální maximum,
- $f(X) \geq f(A)$, funkce f má v bodě A vázané lokální minimum.

Geometrický význam vázaných extrémů

Vázaný extrém může nastat pouze v bodech z definičního oboru funkce f, které leží na křivce $g(x,y) = 0$. Těmto bodům odpovídají body na ploše $z = f(x,y)$, které tvoří prostorovou křivku κ, průsečnici plochy s válcovou plochou $g(x,y) = 0$. Z geometrického hlediska se jedná o lokální extrémy prostorové křivky.



Lagrangeova metoda

Věta: Buď dána funkce $z = f(x,y)$ a podmínka $g(x,y) = 0$. Jestliže má funkce

$$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ve svém stacionárním bodě lokální extrém, má i funkce f v tomto bodě lokální extrém vázaný podmínkou $g(x,y) = 0$.

Poznámka:

- Funkce Φ se nazývá Lagrangeova funkce, číslo λ Lagrangeův multiplikátor.
- Stacionární body určíme jako řešení soustavy lineárních rovnic,

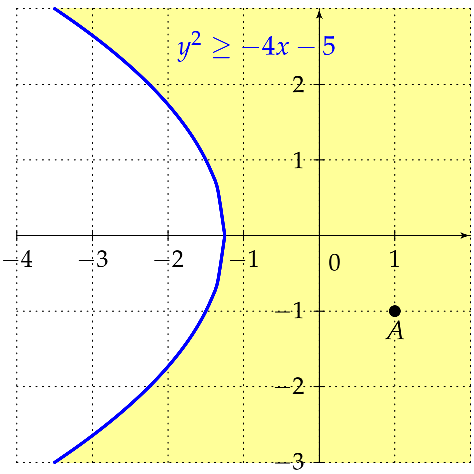
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad g(x,y) = 0.$$

- Pokud lze jednoznačně z rovnice vyjádřit $y = \varphi(x)$ resp. $x = \psi(y)$, pak vázané lokální extrémy hledáme jako lokální extrémy funkce $z = f(x, \varphi(x))$ resp. $z = f(\psi(y), y)$.

Příklad 16: Nalezněte vázané extrémy funkce $z = f(x,y) = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ vzhledem k podmínce $2x - 3 - y = 0$.

Řešení:
Určíme nejdříve definiční obor funkce z, funkce z bude existovat, pokud bude výraz pod odmocninou nezáporný, tj.

$$4x + y^2 + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{4}y^2 - \frac{5}{4}.$$



Z rovnice vazby $2x - 3 - y = 0$ lze jednoznačně vyjádřit jak y, tak x. Vyjádříme y,

$$y = 2x - 3.$$

Dosadíme vazbu do předpisu funkce z,

$$z = \sqrt{4x + (2x-3)^2 + 5} = \sqrt{4x + 4x^2 - 12x + 9 + 5} = \sqrt{4x^2 - 8x + 14},$$

dostaneme funkci jedné proměnné $z = z(x, \varphi(x))$ (proměnné x) a snadno se přesvědčíme, že $D_z = \mathbb{R}$. Určíme první derivaci, poté ji položíme rovnu nule a dostaneme rovnici pro stacionární body této funkce,

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{8x - 8}{2\sqrt{4x^2 - 8x + 14}} = \frac{4x - 4}{\sqrt{4x^2 - 8x + 14}} = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Definičním oborem první derivace je $D_{z'} = \mathbb{R}$. Na intervalu $(-\infty, 1)$ je první derivace $z' < 0$, funkce z je na tomto intervalu klesající. Na intervalu $(1, \infty)$ je první derivace $z' > 0$, tzn. funkce z je na tomto intervalu rostoucí. Ve stacionárním bodě $x = 1$ se mění znaménko první derivace z $-$ na $+$ což znamená, že v bodě $x = 1$ má funkce z lokální minimum.

Dosadíme bod $x = 1$ do rovnice vazby, dostáváme $y = -1$. Snadno ověříme, že bod A patří do definičního oboru funkce $z = \sqrt{4x + y^2 + 5}$, viz. obrázek vpravo.

Funkce $z = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ má v bodě $A = [1, -1]$ vázané lokální minimum $z = f(1, -1) = \sqrt{10}$.

Zcela analogicky budeme postupovat v případě, kdy lze z rovnice vazby vyjádřit jednoznačně x.

Příklad 17: Nalezněte vázané extrémy funkce $z = f(x,y) = -8x + 6y - 5$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 100$.

Řešení:
Sestavíme Lagrangeovu funkci pro funkci $f(x) = -8x + 6y - 5$ a $g(x,y) = x^2 + y^2 - 100$,

$$\Phi(x, y, \lambda) = -8x + 6y - 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 100).$$

Vypočítáme parciální derivace prvního řádu funkce Φ, které položíme rovny nule. Získáme tak rovnice pro stacionární body funkce Φ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -8 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 6 + 2\lambda y = 0,$$

ke kterým přidáme rovnici vazby, řešíme následující soustavu rovnic

$$-8 + 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{\lambda} \qquad\qquad 6 + 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{\lambda}$$

dosadíme do rovnice vazby za x a y,

$$x^2+y^2=100 \Rightarrow \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2+\left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2=100 \Rightarrow \frac{16}{\lambda^2}+\frac{9}{\lambda^2}=100 \Rightarrow 100\lambda^2=25 \Rightarrow \lambda^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{2}.$$

Dopočítáme stacionární body $A=[x,y]$ dosazením λ,

$$\lambda_1=\frac{1}{2} \Rightarrow A_1=[8,-6], \quad \lambda_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow A_2=[-8,6].$$

Sestavíme matici parciálních derivací druhého řádu a vyhodnotíme ji na stacionárních bodech,

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad Q(A_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

V bodě $A_1=[8,-6]$ je $D_1>0$, $D_2>0$. Funkce $z=f(x,y)$ má v bodě $A_1=[8,-6]$ vázané lokální minimum $z=-105$. V bodě $A_2=[-8,6]$ je $D_1<0$, $D_2>0$. Funkce $z=f(x,y)$ má v bodě $A_2=[-8,6]$ vázané lokální maximum $z=95$.

Příklady k procvičení: Nalezněte vázané extrémy funkce $z=f(x,y)$ vzhledem k zadané podmínce $g(x,y)=0$:

a) $z=4x+2y+1, \quad y=x^2+x+\frac{1}{4}$

b) $z=12x+y-3, \quad y=-x^3+3.$

Příklady k procvičení: Nalezněte vázané extrémy funkce $z=4x+3y-4$ vzhledem k zadané podmínce $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

3.3 Globální extrémy

Definice: Řekneme, že funkce $z=f(x,y)$ má v bodě $A=[x_0,y_0]$ globální extrém na uzavřeném definičním oboru D_f, jestliže $\forall X \in D_f$ platí

- $f(X) \leq f(A)$, funkce f má v bodě A globální maximum,
- $f(X) \geq f(A)$, funkce f má v bodě A globální minimum.

Poznámka:

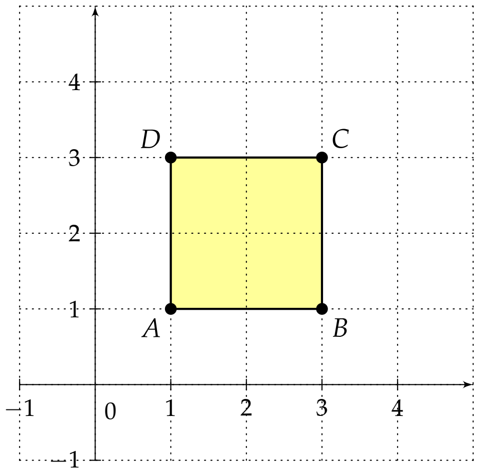
- V případě ostrých nerovností hovoříme o ostrých globálních extrémech.
- Množina D_f se nazývá uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body. Hraničním bodem množiny D_f je takový bod, jehož každé okolí obsahuje body X takové, že $X \in D_f$ a současně obsahuje body Y takové, že $Y \notin D_f$.
- Na rozdíl od lokálních extrémů, které hledáme na okolích bodů, hledáme globální extrémy na celém D_f.

Postup určování globálních extrémů

- určíme definiční obor D_f funkce $z=f(x,y)$,
- nalezneme lokální extrémy této funkce na množině D_f, ze které vyloučíme hranici $g(x,y)=0$,
- určíme vázané extrémy této funkce vzhledem k podmínce $g(x,y)=0$,
- porovnáme funkční hodnoty všech extrémů, bod s největší funkční hodnotou bude globálním maximem, bod s nejmenší funkční hodnotou bude globálním minimem.

Příklad 18: Nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x,y) = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy $[1,1]$, $[3,1]$, $[3,3]$, $[1,3]$.

Řešení:
Definičním oborem funkce z je čtverec.



Určíme lokální extrémy funkce z,

$$\frac{\partial z}{\partial x} : 2x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} : -1 = 0.$$

Je zřejmé, že druhá rovnice nemá řešení, lokální extrémy neexistují. Určíme rovnice hraničních křivek, tyto rovnice reprezentují rovnice vazeb,

$$AB : y = 1,\ x \in (1,3), \quad BC : x = 3,\ y \in (1,3), \quad CD : y = 3,\ x \in (1,3), \quad DA : x = 1,\ y \in (1,3).$$

Jednotlivé rovnice vazeb dosadíme do funkce z a nalezneme případné vázané extrémy,

$$\begin{aligned}
&AB : z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 \notin (1,3) \Rightarrow \text{extrém neexistuje},\\
&BC : z = 9 - y \Rightarrow z' = -1 = 0 \Rightarrow \text{rovnice nemá řešení} \Rightarrow \text{extrém neexistuje},\\
&CD : z = x^2 - 3 \Rightarrow z' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 \notin (1,3) \Rightarrow \text{extrém neexistuje},\\
&DA : z = 1 - y \Rightarrow z' = -1 = 0 \Rightarrow \text{rovnice nemá řešení} \Rightarrow \text{extrém neexistuje}.
\end{aligned}$$

Zbývá porovnat funkční hodnoty ve vrcholech čtverce,

$$f(A) = 0,\ f(B) = 8,\ f(C) = 6,\ f(D) = -2 \Rightarrow f(D) < f(A) < f(C) < f(B).$$

Funkce z má v bodě D globální minimum o hodnotě $z = -2$, v bodě B má globální maximum o hodnotě $z = 8$.

Příklady k procvičení:

a) Nalezněte globální extrémy funkce $z = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy v bodech $[1,1]$, $[3,1]$, $[1,3]$ a $[3,3]$.

b) Nalezněte globální extrémy funkce $z = x^2 + y^2$ na trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0,0]$, $[2,0]$ a $[0,1]$.

c) Nalezněte globální extrémy funkce $z = -x^2 - y^2 + 2y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 16$.