2.4. Substituční metoda pro určité integrály

Cíle

Seznámíte se s použitím substituční metody při výpočtu určitých integrálů. Základní typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat, jsou podobné jako při výpočtu neurčitých integrálů v kap. 1.4.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte princip substituční metody a víte, pro které typy integrálů je tato metoda vhodná. Předpokládá se znalost pojmu určitý integrál a dovednost počítat určité integrály pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule.

Výklad

Jak již bylo uvedeno v předcházející kapitole, můžeme při výpočtu určitých integrálů ze složitějších funkcí postupovat v zásadě dvěma způsoby:

- Oddělíme fázi nalezení primitivní funkce od fáze výpočtu určitého integrálu. Nejprve si nevšímáme mezí a počítáme pouze neurčitý integrál. Po vypočítání vybereme jednu z nalezených primitivních funkcí (obvykle volíme integrační konstantu $C = 0$) a podle Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez.
- Neoddělujeme fázi výpočtu primitivní funkce od výpočtu určitého integrálu. U substituční metody kromě zavedení správné substituce ještě určíme nové meze a již se nemusíme vracet k původní proměnné.

První způsob nebude čtenáři patrně dělat problémy. Proto se v dalším zaměříme na druhou možnost výpočtu, která je kratší a elegantnější. Vzorce pro integraci substituční metodou v určitém integrálu připomínají vztahy uvedené ve větách 1.4.1 a 1.4.2.

Věta 2.4.1. (Integrování substituční metodou $\varphi(x) = u$)

Nechť funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu $<\alpha,\beta>$. Nechť funkce $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu $<a,b>$ a nechť pro každé $x \in <a,b>$ platí $\alpha \le \varphi(x) \le \beta$, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$ (tedy funkce φ zobrazuje interval $<a,b>$ na interval $<\alpha,\beta>$).

Potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du .$$

Důkaz:

Z předpokladů věty vyplývá, že existují integrály na levé i pravé straně tvrzení věty 2.4.1. Z toho plyne, že existuje primitivní funkce $F(u)$ k funkci $f(u)$ na intervalu $<\alpha, \beta>$.

Podle věty 1.4.1 je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Proto podle Newtonovy – Leibnizovy formule (věta 2.2.1) platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(u)du .$$

Poznámky

1. Při výpočtu určitého integrálu zavedeme vhodnou substituci $u = \varphi(x)$ a vypočteme diferenciál $du = \varphi'(x)dx$ jako u neurčitého integrálu. Navíc musíme ještě určit nové meze. „Staré“ meze a, b jsou pro původní proměnnou x. „Nová“ proměnná u bude mít meze $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$.

2. V řešených příkladech vyznačíme změnu mezí takto: $a \mapsto \varphi(a)$ (staré dolní mezi a odpovídá nová dolní mez $\varphi(a)$), resp. $b \mapsto \varphi(b)$ (staré horní mezi b odpovídá nová horní mez $\varphi(b)$).

3. V konkrétním případě se může stát, že $\varphi(a) > \varphi(b)$ (nová dolní mez je větší než mez horní). Podle definice 2.2.1 můžeme meze zaměnit a znaménko integrálu se změní na opačné. Pokud dostaneme $\varphi(a) = \varphi(b)$, je podle poznámky k definici 2.2.1 integrál roven nule a nemusíme dále počítat.

Řešené úlohy

Příklad 2.4.1. Vypočtěte integrál $\int_0^2 3x\sqrt{5+x^2}\,dx$.

Řešení:

a) Bylo by možno nejprve vypočítat neurčitý integrál (nalézt primitivní funkci) jako v příkladu 1.4.4.

$$\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ 5+x^2 = u \\ 2xdx = du \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int 2x\sqrt{5+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{3}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$= \sqrt{\left(5+x^2\right)^3} + C$.

Použijeme primitivní funkci pro $C = 0$ (jiné C se stejně odečte): $F(x) = \sqrt{\left(5+x^2\right)^3}$ a z Newtonovy – Leibnizovy věty dostáváme:

$$\int_0^2 3x\sqrt{5+x^2}\,dx = \left[F(x)\right]_0^2 = \left[\sqrt{\left(5+x^2\right)^3}\right]_0^2 = \sqrt{\left(5+2^2\right)^3} - \sqrt{\left(5+0^2\right)^3} = 27 - 5\sqrt{5}.$$

b) Praktičtější je počítat podle věty 2.4.1 (při substituci určit nové meze). Použijeme substituci $5 + x^2 = u$. Nová dolní mez bude $u = 5 + 0^2 = 5$ a nová horní mez je $u = 5 + 2^2 = 9$. Celý výpočet bude vypadat takto:

$$\int_0^2 3x\sqrt{5+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 2x\sqrt{5+x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ 5+x^2 = u\\ 2x dx = du\\ 0 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 9\end{array}\right| = \frac{3}{2}\int_5^9 \sqrt{u}\,du = \frac{3}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_5^9 = \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_5^9 =$$

$$9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} = 27 - 5\sqrt{5}.$$

Příklad 2.4.2. Vypočtěte integrál $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\ln x = u$. Funkce $\varphi(x) = \ln x$ je spojitá na intervalu $< 1, e >$ a má na něm spojitou derivaci. Pro $x \in < 1, e >$ bude $0 \le \ln x \le 1$.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ \ln x = u\\ \frac{1}{x}dx = du\\ 1 \mapsto 0,\ \mathrm{e} \mapsto 1\end{array}\right| = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Poznámka

Při výpočtu musíme dávat pozor, zda jsou splněny podmínky věty 2.4.1. U neurčitých integrálů se můžeme po výpočtu dodatečně derivováním přesvědčit, zda jsme postupovali správně. U určitých integrálů tuto možnost zkoušky nemáme.

Příklad 2.4.3. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{5+\sin^2 x}\, dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\sin x = u$. Pro novou dolní mez dostaneme $\sin(-\pi) = 0$ a pro horní mez vyjde $\sin \pi = 0$. Podle poznámky k definici 2.2.1 bude výpočet integrálu krátký:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{5+\sin^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ \sin x = u \\ \cos x dx = du \\ -\pi \mapsto 0,\ \pi \mapsto 0 \end{array} \right| = \int\limits_0^0 \frac{1}{5+u^2}\, du = 0 \ .$$

Příklad 2.4.4. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x\, dx$.

Řešení:

Provedeme jednoduchou úpravu, abychom nalezli vhodnou substituci:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x}\, dx \, .$$

Je zřejmé, že vhodná substituce je $\cos x = u$, neboť $-\sin x\, dx = du$. Pro novou dolní mez vyjde $\cos 0 = 1$ a pro horní mez dostaneme $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, takže nová dolní mez je větší než nová horní mez. Podle definice 2.2.1 obrátíme meze a změníme znaménko integrálu:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ \cos x = u \\ -\sin x dx = du \\ 0 \mapsto 1,\ \frac{\pi}{4} \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = -\int\limits_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-u^2}{u^3}\, du = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-u^2}{u^3}\, du = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du =$$

$$\left[-\frac{1}{2u^2} - \ln|u|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = -\frac{1}{2} - \ln 1 + \frac{1}{2\frac{2}{4}} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)\, .$$

Výklad

Větu 2.4.1. můžeme použít i v opačném směru (zprava doleva). V běžných úlohách nebývá integrační proměnnou *u*, ale obvykle běžně používáme proměnnou *x*, což je jen jiné písmenko ve vztazích. To odpovídá substituci typu $x=\varphi(t)$ v neurčitém integrálu, která je popsána ve větě 1.4.2. V určitém integrálu budeme muset po uvedené substituci změnit meze. V tomto případě vlastně známe hodnoty $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$. Musíme nalézt hodnoty *a* a *b*, aby byly splněny předpoklady věty 2.4.1. V praxi obvykle bývá funkce $x=\varphi(t)$ taková, že lze zvolit interval $<a,b>$ tak, aby na něm byla funkce $\varphi(t)$ ryze monotonní, tj. aby jej prostě zobrazila na zadaný integrační obor $<\varphi(a),\varphi(b)>$.

Příklad 2.4.5. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá pro $x\in<-1,1>$, takže určitý integrál existuje.

Použijeme substituci

$x=\sin t$, takže $dx=\cos t\,dt$. Transformujme meze integrálu:

Pro $x_1=-1$ je $-1=\sin t_1$, takže $t_1=-\frac{\pi}{2}$. Pro $x_2=1$ je $1=\sin t_2$, takže $t_2=\frac{\pi}{2}$. Protože na intervalu $<-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}>$ je funkce $x=\sin t$ monotonně rostoucí a tento interval se uvedenou funkcí zobrazí na interval $<-1,1>$, lze psát

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\\ -1\mapsto-\frac{\pi}{2},\ 1\mapsto\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,|\cos t|\cos t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2(2t)\,dt.$$

V předcházející úpravě jsme využili skutečnosti, že pro $t\in<-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}>$ je $\cos t\geq 0$, a tedy $|\cos t|=\cos t$. Po užití známého vztahu $\sin 2t=2\sin t\cos t$ dostáváme integrál typu

$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ (viz kapitola 1.6).

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\left(1-\cos 4t\right) dt = \frac{1}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}\ .$$

Příklad 2.4.6. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$. ✖

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá pro každé reálné x, takže určitý integrál existuje.

Použijeme substituci

$x = \operatorname{tg} t$, takže $dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt$. (Je možno použít i substituci $x = \operatorname{cotg} t$). Transformujme meze integrálu:

Pro $x_1 = 0$ je $0 = \operatorname{tg} t_1$, takže $t_1 = 0$. Pro $x_2 = 1$ je $1 = \operatorname{tg} t_2$, takže $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$. Protože na intervalu $< 0, \dfrac{\pi}{4} >$ je funkce $x = \operatorname{tg} t$ monotonně rostoucí a tento interval $< 0, \dfrac{\pi}{4} >$ se funkcí $x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t$ zobrazí na interval $< 0,1 >$, lze psát

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt \\ 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}\,\frac{1}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\,\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{|\cos t|}\,\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t}dt\ .$$

V předcházející úpravě jsme využili skutečnosti, že pro $t \in < 0, \dfrac{\pi}{4} >$ je $\cos t > 0$, a tedy $|\cos t| = \cos t$. Dostáváme integrál typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$. Jelikož $n = -3$ je liché, řešíme integrál opět substitucí, a to $\sin t = v$ (viz kapitola 1.6). Bylo by možno použít rovněž univerzální substituci $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = v$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^4 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ \sin t = v \\ \cos t dt = dv \\ 0 \mapsto 0,\ \frac{\pi}{4} \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{(1-v^2)^2} =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{(1-v)^2(1+v)^2}.$$

Dostáváme integrál z racionální funkce, kdy polynom ve jmenovateli má reálné násobné kořeny. Je nutno provést rozklad racionální funkce na součet parciálních zlomků (viz kapitola 1.5).

$$\frac{1}{(1-v)^2(1+v)^2} = \frac{A_1}{1-v} + \frac{A_2}{(1-v)^2} + \frac{B_1}{1+v} + \frac{B_2}{(1+v)^2}$$

Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, B_1, B_2. Rovnici vynásobíme polynomem $Q_4(v) = (1-v)^2(1+v)^2$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$1 = A_1(1-v)(1+v)^2 + A_2(1+v)^2 + B_1(1-v)^2(1+v) + B_2(1-v)^2$$

Pro $v = 1$ dostaneme $1 = 0A_1 + 4A_2 + 0B_1 + 0B_2$. Tedy $A_2 = \frac{1}{4}$.

Pro $v = -1$ dostaneme $1 = 0A_1 + 0A_2 + 0B_1 + 4B_2$. Tedy $B_2 = \frac{1}{4}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů můžeme použít srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u v^3: $0 = -A_1 + B_1$

Koeficienty u v^0: $1 = A_1 + A_2 + B_1 + B_2$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $A_1 = \frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{4}$.

Integrujeme získané parciální zlomky:

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{(1-v)^2(1+v)^2} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{1-v} + \frac{1}{(1-v)^2} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{(1+v)^2}\right] dv =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\ln|1-v| + \frac{1}{1-v} + \ln|1+v| - \frac{1}{1+v}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{2v}{1-v^2} + \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}+\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\right]=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{2}+\ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right|\right]=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{2}+\ln\left|\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2}\right|\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2})\right].$$

Poznámky

1. Úlohu lze rovněž řešit substitucí $\sqrt{1+x^2}=t-x$. *Postup výpočtu je popsaný v poznámce k příkladu 1.4.8.*

2. Tento příklad nám ukazuje, že výpočet určitého integrálu i zdánlivě jednoduché funkce může být pracný a zdlouhavý. Je věcí cviku zvolit co nejúspornější postup. U takových příkladů nám mohou hodně pomoci vhodné počítačové programy.

3. Pokud zadáme integrál nějakému matematickému programu (např. Derive, Maple, Mathematica), získáme výsledek $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)$. *Na první pohled se zdá, že se jedná o úplně jinou funkci. Snadno se však přesvědčíme, že* $-2\ln(\sqrt{2}-1)=\ln(3+2\sqrt{2})$ *a tedy* $-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)=\frac{1}{4}\ln(3+2\sqrt{2})$.

Integrace sudých nebo lichých funkcí

Výklad

Výpočet určitého integrálu je jednodušší, pokud je integrovaná funkce sudá nebo lichá na intervalu $<-a,a>$. Připomeňme si definici 1.4.3 z část Matematika I.

Funkce f se nazývá **sudá** , jestliže $\forall x\in D_f : f(-x)=f(x)$ (graf funkce je souměrný podle osy y).

Funkce f se nazývá **lichá,** jestliže $\forall x\in D_f : f(-x)=-f(x)$ (graf funkce je souměrný podle počátku).

Věta 2.4.2. (Integrál sudé, popř. liché funkce)

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< -a, a >$.

Je-li $f(x)$ na intervalu $< -a, a >$ sudá, pak

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx,$$

Je-li $f(x)$ na intervalu $< -a, a >$ lichá, pak

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

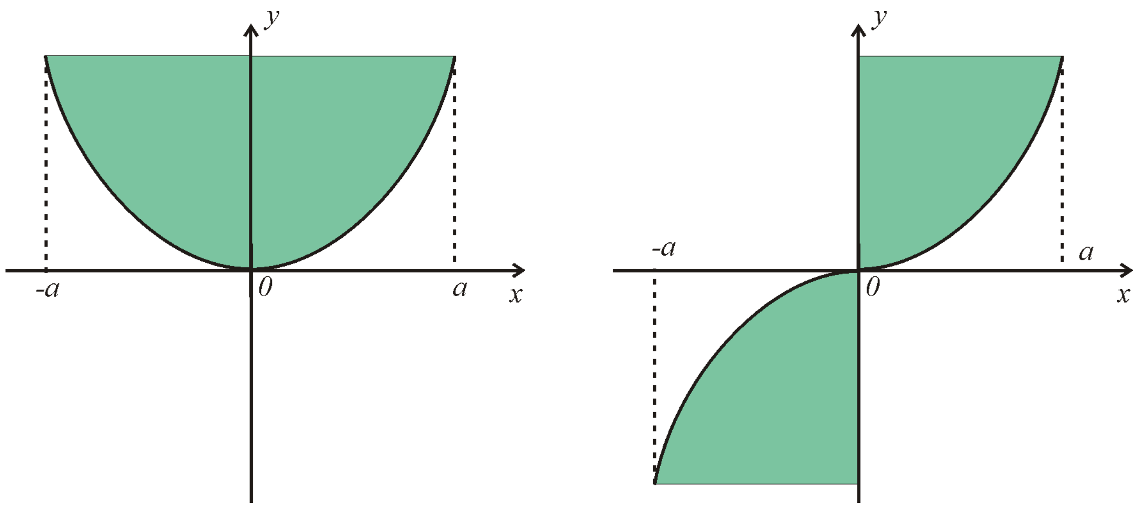
Důkaz: Je-li $f(x)$ na intervalu $< -a, a >$ sudá, pak platí $f(-x) = f(x)$. Integrál můžeme zapsat jako součet integrálů (věta 2.2.3):

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

První integrál řešíme substitucí $-x = t$, z níž plyne $dx = -dt$, meze $0 \mapsto 0$, $-a \mapsto a$.

Dostaneme $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Druhou část věty o integraci liché funkce dokážeme analogicky.



$f(-x) = f(x)$ $\qquad\qquad$ $f(-x) = -f(x)$

Obr. 2.4.1. Integrál ze sudé a z liché funkce

Příklad 2.4.7. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Řešení:

Tuto úlohu jsme již řešili v příkladu 2.4.5. Integrovaná funkce je sudá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$, protože

$$f(-x) = (-x)^2\sqrt{1-(-x)^2} = x^2\sqrt{1-x^2} = f(x).$$

Podle věty 2.4.2 můžeme výpočet poněkud zjednodušit, neboť stačí počítat integrál na intervalu $< 0,1 >$, kdy máme jednodušší dolní mez.

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad \dots \quad = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt = \quad \dots \quad = \frac{1}{4}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

Příklad 2.4.8. Vypočtěte integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos 2x\,dx$.

Řešení:

Jelikož $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x$ snadno ukážeme, že integrovaná funkce je lichá:

$$f(-x) = \sin^3(-x)\cos(-2x) = -\sin^3 x\cos 2x = -f(x).$$

Podle věty 2.4.2 není nutno integrál vůbec počítat, neboť

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos 2x\,dx = 0.$$

Ověřte výpočtem platnost uvedeného výsledku!

? Kontrolní otázky ?

1. Uveďte princip substituční metody při výpočtu určitého integrálu.
2. Čím se při výpočtu odlišuje substituční metoda pro určitý integrál od substituční metody pro integrál neurčitý?

3. Ukažte, že $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ pro lichou funkci *f(x)*.

4. Ukažte, že platí $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(a+b-x)dx$.

5. Ukažte, že platí $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{a} f(-x)dx$

6. Zdůvodněte, proč jsou všechny následující integrály rovny nule.

$$\int\limits_{-1}^{1} \sin 3x \cos 5x \, dx, \quad \int\limits_{-a}^{a} \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} dx, \quad \int\limits_{0}^{2\pi} \sin x \sqrt{\cos^3 x + 1} \, dx, \quad \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} x \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx .$$

7. Ukažte, že $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$ pro $m \neq n$ a $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi$ pro $m = n$.

Návod: Užijte vztah $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int\limits_{0}^{1} x\left(2x^2-1\right)^{10} dx$ b) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} dx$ c) $\int\limits_{0}^{4} x^3\sqrt{x^2+9}dx$

d) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ e) $\int x^2 \sin\left(1-x^3\right) dx$ f) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

2. a) $\int\limits_{0}^{\pi} e^{\cos x} \sin x \, dx$ b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ c) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

d) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x} \, dx$ e) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$ f) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

3. a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^3 x\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x\, dx$ c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\sin x}}\, dx$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\sin 2x}$ f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}\, dx$

4. a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$

d) $\displaystyle\int_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\, dx$ e) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}}\, dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\, dx$

5. a) $\displaystyle\int_1^2 x\ln\left(1+x^2\right) dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{x+1}\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$ e) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\, dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\, dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{1}{22}$; **b)** 0; **c)** $\frac{1412}{5}$; **d)** 1; **e)** $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$; **f)** $2\sqrt{\ln 3+1}-2$. **2. a)** $e-\frac{1}{e}$; **b)** $\mathrm{arctg}\, e-\frac{\pi}{4}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** $\ln 2$. **3. a)** $\frac{1}{16}$; **b)** $-\frac{1}{4}\ln 2$; **c)** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; **d)** $\frac{9}{32}\left(7\sqrt[3]{4}-12\right)$; **e)** $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$; **f)** $\frac{\ln 3}{2}$. **4. a)** $2\left(\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$; **b)** $4-2\,\mathrm{arctg}\, 2$; **c)** $2\ln 2-1$; **d)** $8+\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$; **e)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; **f)** $1+\frac{\pi}{2}$. **5. a)** $\frac{5}{2}\ln 5-\ln 2-\frac{3}{2}$; **b)** $4-\pi$; **c)** $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-\ln 2$; **d)** $\frac{3\pi}{8}$; **e)** $\frac{3}{2}$; **f)** 0.

Kontrolní test

1. Vypočtěte integrál $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

   a) $7-2\ln 2$, b) $7+2\ln 2$, c) $12+2\ln 2$, d) $15+2\ln 2$.

2. Vypočtěte integrál $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

   a) $\frac{\pi}{12}$, b) π, c) $\frac{\pi}{6}$, d) $\frac{\pi}{3}$.

3. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}\,dx$.

   a) $\frac{\pi}{18}$, b) $\frac{\pi}{6}$, c) $\frac{1}{3}$, d) $\frac{\pi}{3}$.

4. Vypočtěte integrál $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}^3 x\,dx$.

   a) $1-\ln 2$, b) $1+\frac{1}{2}\ln 2$, c) $1-\frac{1}{2}\ln 2$, d) $1+\ln 2$.

5. Vypočtěte integrál $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}+1}\,dx$.

   a) $\frac{3}{2}\ln 3$, b) $4+\ln 3$, c) $\ln 3$, d) $\frac{3}{2}$.

6. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^9}{(1+x^5)^3}\,dx$.

   a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{8}$, c) $\frac{9}{40}$, d) $\frac{1}{40}$.

7. Vypočtěte integrál $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$.

   a) $8+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$, b) $8+\frac{3}{2}\pi\sqrt{3}$, c) $8+\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$, d) $8+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

8. Vypočtěte integrál $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$.

a) $\frac{846}{105}$, b) $\frac{831}{105}$, c) $\frac{848}{105}$, d) $\frac{851}{105}$.

9. Vypočtěte integrál $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{3+e^x}\,dx$.

a) $4+\pi$, b) $4-\frac{\pi}{2}$, c) $4+\frac{\pi}{2}$, d) $4-\pi$.

10. Vypočtěte integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$.

a) $\frac{4}{3}$, b) 0, c) $\frac{2}{3}$, d) $\frac{3}{2}$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. c); 5. a); 6. d); 7. b); 8. c); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.4 a 2.4 znovu.

Shrnutí lekce

Substituční metoda patří k nejčastěji používaným metodám výpočtu určitých integrálů. Jsou možné dva postupy výpočtu. V prvním případě vhodnou substitucí vypočteme neurčitý integrál (nalezneme primitivní funkci) a teprve potom pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez. Výhodnější bývá druhá možnost, kdy vedle zavedení správné substituce ještě určíme nové meze a již se nemusíme vracet k původní proměnné.