Numerická matematika
Banka řešených příkladů

Radek Kučera, Pavel Ludvík, Zuzana Morávková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Vysoká škola báňská – Technická Univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3894-6

OBSAH

Předmluva

Studijní materiály tvořící tato skripta jsou určeny převážně pro studenty kombinované i prezenční formy fakulty strojní Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava navštěvující předmět Numerická matematika.

Naše skripta obsahují řešené příklady a jsou přirozený doplněk skript Radka Kučery *Numerické metody*, která jsou zaměřená na teoretický výklad základních partií numerické matematiky.

Rádi bychom upozornili na webovou stránku `http://mdg.vsb.cz/portal/nm`, kde je umístěn nejen tento text, ale také řada dalších souvisejících studijních materiálů.

Tento studijní text vznikl za finanční podpory projektu IRP-FRVŠ 158/2015 *Inovace předmětu Numerická matematika na Fakultě strojní Vysoké školy báňské - Technické univerzitě Ostrava* a Katedry matematiky a deskriptivní geometrie VŠB-TUO.

Příjemně strávený čas s numerickou matematikou přeje kolektiv autorů.

KAPITOLA

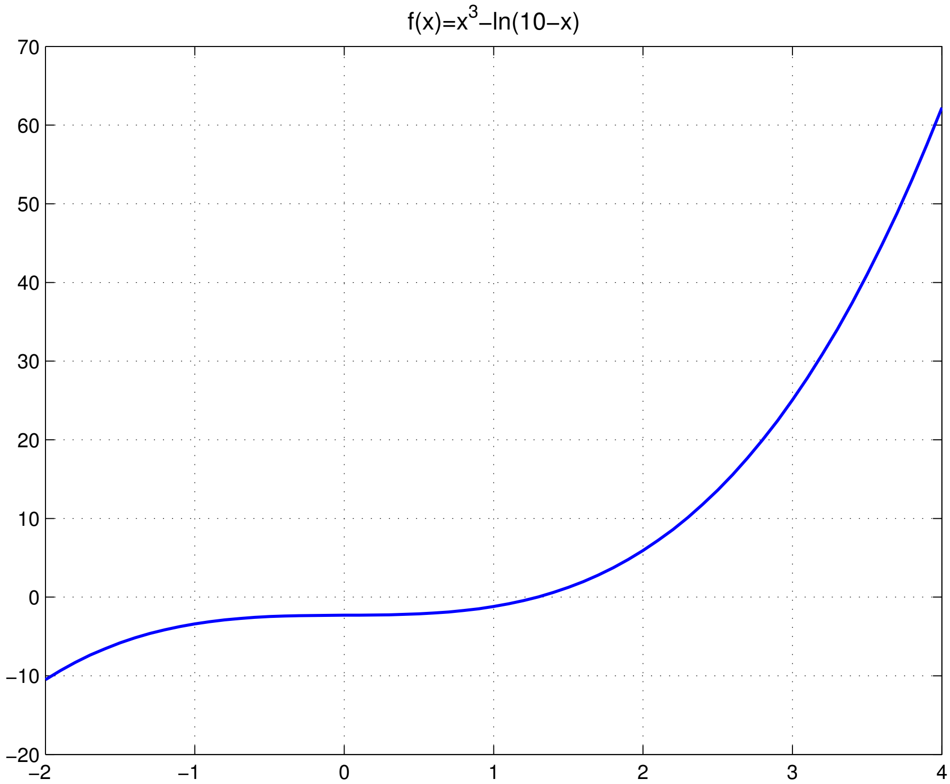
1

ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Příklad 1.1: Metodou půlení intervalu určete všechny kořeny rovnice

$$x^3 = \ln(10 - x)$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-3}$.



Z grafu vidíme, že kořen (průsečík s osou x) leží v intervalu $\langle 1, 2\rangle$. Vytabelujeme si na tomto intervalu hodnotu funkce

$$f(x) = x^3 - \ln(10 - x)$$

a zjistíme, že znaménko funkčních hodnot se mění mezi 1.2 a 1.3. Funkce je spojitá na daném intervalu. Rovnice má jeden kořen na intervalu $\langle 1.2,\ 1.3\rangle$.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	-1.1972	-0.8551	-0.4468	0.0337	0.5922	1.2349	1.9678	2.7967	3.7279

Počítáme kořen na intervalu $\langle 1.2,\ 1.3\rangle$, tedy $a^0 = 1.2$, $b^0 = 1.3$.
Spočítáme první aproximaci x^1:

$$x^1 = \frac{b^0 + a^0}{2} = \frac{1.3 + 1.2}{2} = 1.25.$$

Spočítáme funkční hodnoty funkce $f(x) = x^3 - \ln(10 - x)$ v bodech a^0, x^1, b^0:

$$f(a^0) = -0.446, \quad f(x^1) = -0.2159, \quad f(b^0) = 0.0337$$

a určíme interval $\langle a^1, b^1\rangle$:

$$f(a^0)f(x^1) \not< 0 \Rightarrow a^1 = x^0 = 1.25, \quad b^1 = b^0 = 1.3.$$

Určíme chybu aproximace $\frac{b^0 - a^0}{2} = 0.05 \not< \varepsilon = 10^{-3}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci

$$x^2 = \frac{a^1 + b^1}{2} = \frac{1.25 + 1.3}{2} = 1.275$$

a určíme interval $\langle a^2, b^2\rangle$:

$$f(a^1) = -0.2159, \quad f(x^2) = -0.0935, \quad f(b^1) = 0.0337,$$
$$f(a^1)f(x^2) \not< 0 \Rightarrow a^2 = x^2 = 1.275 \quad b^2 = b^1 = 1.3.$$

Určíme chybu aproximace $\frac{b^1 - a^1}{2} = 0.025 \not< \varepsilon = 10^{-3}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci

$$x^3 = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1.275 + 1.3}{2} = 1.2875$$

a určíme interval $\langle a^3, b^3\rangle$:

$$f(a^2) = -0.0935, \quad f(x^3) = -0.0305, \quad f(b^2) = 0.0337,$$
$$f(a^2) \cdot f(x^3) \not< 0 \Rightarrow a^3 = x^3 = 1.2875, \quad b^3 = b^2 = 1.3.$$

Určíme chybu aproximace $\frac{b^2 - a^2}{2} = 0.0125 \not< \varepsilon = 10^{-3}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci

$$x^4 = \frac{a^3 + b^3}{2} = \frac{1.2875 + 1.3}{2} = 1.2938$$

a určíme interval $\langle a^4, b^4 \rangle$:

$$f(a^3) = -0.0305, \quad f(x^3) = 0.0014, \quad f(b^3) = 0.0337,$$
$$f(a^3)f(x^3) < 0 \Rightarrow a^4 = a^3 = 1.2875, \quad b^4 = x^3 = 1.2938$$

Určíme chybu aproximace $\frac{b^3-a^3}{2} = 0.0062 \not< \varepsilon = 10^{-3}$. Ve výpočtu pokračujeme dál. Spočítáme další aproximaci x^4:

$$x^4 = \frac{a^4 + b^4}{2} = \frac{1.2875 + 1.2938}{2} = 1.2906$$

Určíme interval $\langle a^5, b^5 \rangle$:

$$f(a^4) = -0.0305 \quad f(x^4) = -0.0146 \quad f(b^4) = 0.0014$$
$$f(a^4) \cdot f(x^4) \not< 0 \Rightarrow a^5 = x^4 = 1.2906, \quad b^5 = b^4 = 1.2938$$

Určíme chybu aproximace $\frac{b^4-a^4}{2} = 0.0031 \not< \varepsilon = 10^{-3}$. Ve výpočtu pokračujeme dál. Spočítáme další aproximaci x^5:

$$x^5 = \frac{a^5 + b^5}{2} = \frac{1.2906 + 1.2938}{2} = 1.2922$$

Určíme interval $\langle a^6, b^6 \rangle$:

$$f(a^5) = -0.0146 \quad f(x^5) = -0.0066 \quad f(b^5) = 0.0014$$
$$f(a^5) \cdot f(x^5) > 0 \Rightarrow a^6 = x^5 = 1.2906, \quad b^6 = b^5 = 1.2938$$

Určíme chybu aproximace $\frac{b^4-a^4}{2} = 0.0016 \not< \varepsilon = 10^{-3}$. Ve výpočtu pokračujeme dál. Spočítáme další aproximaci x^4:

$$x^6 = \frac{a^6 + b^6}{2} = \frac{1.2922 + 1.2938}{2} = 1.293$$

Určíme chybu aproximace $\frac{b^6-a^6}{2} = 0.0008 < \varepsilon = 10^{-3}$. Je dosaženo zadané přesnosti. Vše si zapíšeme do tabulky:

i	a^i	$f(a^i)$	x^i	$f(x^i)$	b^i	$f(b^i)$	$\lvert b^i - a^i \rvert/2$
0	1.2	$-$	1.25	$-$	1.3	$+$	0.05
1	1.25	$-$	1.275	$-$	1.3	$+$	0.025
2	1.275	$-$	1.2875	$-$	1.3	$+$	0.0125
3	1.2875	$-$	1.2938	$+$	1.3	$+$	0.0062
4	1.2875	$-$	1.2906	$-$	1.2938	$+$	0.0031
5	1.2906	$-$	1.2922	$-$	1.2938	$+$	0.0016
6	1.2922	$-$	1.2930	$-$	1.2938	$+$	0.0008

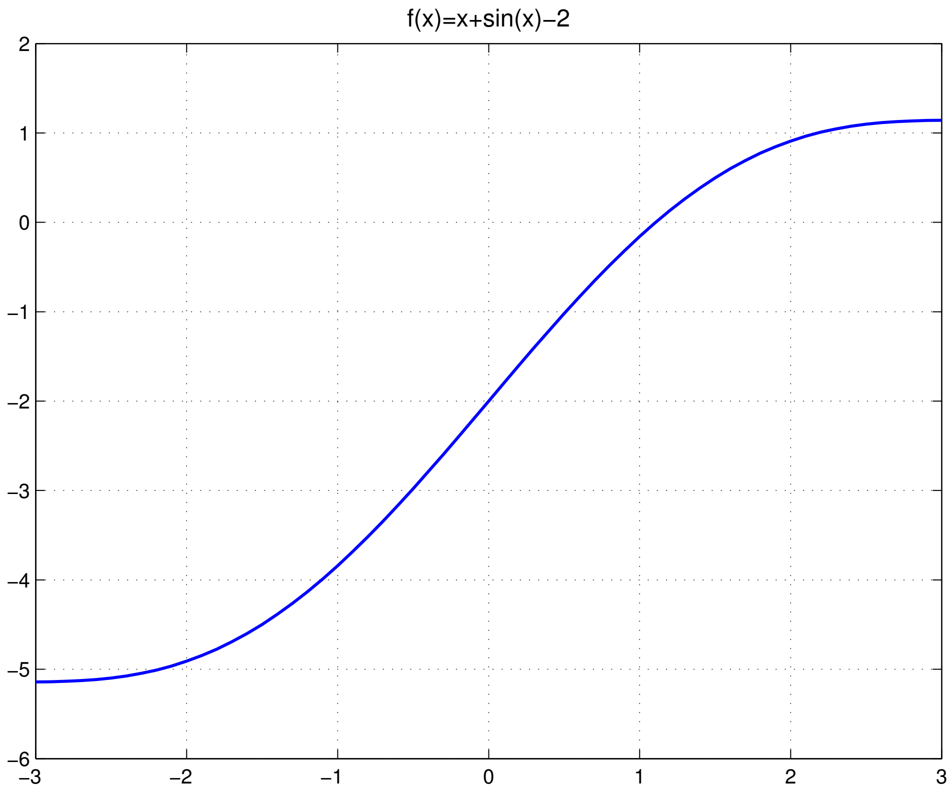
Kořen rovnice je

$$x = 1.293 \pm 0.001.$$

Příklad 1.2: Metodou půlení intervalu určete všechny kořeny rovnice:

$$x + \sin(x) - 2 = 0$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-2}$.



Z grafu vidíme, že kořen (průsečík s osou x) leží v intervalu $\langle 1, 2\rangle$. Vytabelujeme si na tomto intervalu hodnotu funkce

$$f(x) = x + \sin(x) - 2$$

a zjistíme, že znaménko funkčních hodnot se mění mezi 1.1 a 1.2. Funkce je spojitá na daném intervalu. Rovnice má jeden kořen na intervalu $\langle 1.1,\ 1.2\rangle$.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
$f(x)$	-0.1585	-0.0088	0.1320	0.2636	0.3854	0.4975	0.5996	0.6917

Počítáme kořen na intervalu $\langle 1.1,\ 1.2\rangle$ a tedy $a_0 = 1.1$, $b_0 = 1.2$,.
Spočítáme počáteční aproximaci x_0:

$$x_0 = \frac{b_0 + a_0}{2} = \frac{1.2 + 1.1}{2} = 1.15$$

Spočítáme funkční hodnoty funkce $f(x) = x + \sin(x) - 2$ v bodech a_0, x_0, b_0.

$$f(a_0) = -0.0088 \quad f(x_0) = 0.0628 \quad f(b_0) = 0.1320$$

A určíme interval $\langle a_1, b_1\rangle$:

$$f(a_0) \cdot f(x_0) < 0 \Rightarrow a_1 = a_0 = 1.1, \quad b_1 = x_0 = 1.15$$

Spočítáme chybu aproximace $\frac{b_0-a_0}{2} = 0.05 \not< \varepsilon = 10^{-2}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_1:

$$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{1.1+1.15}{2} = 1.125$$

Určíme interval $\langle a_2, b_2 \rangle$:

$$f(a_1) = -0.0088 \quad f(x_1) = 0.0273 \quad f(b_1) = 0.0628$$
$$f(a_1)\cdot f(x_1) < 0 \Rightarrow a_2 = a_1 = 1.1 \quad b_2 = x_1 = 1.125$$

Spočítáme chybu aproximace $\frac{b_1-a_1}{2} = 0.025 \not< \varepsilon = 10^{-2}$.
Spočítáme další aproximaci x_2:

$$x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{1.1+1.125}{2} = 1.1125$$

Určíme interval $\langle a_3, b_3 \rangle$:

$$f(a_2) = -0.0088 \quad f(x_2) = 0.0093 \quad f(b_2) = 0.0273$$
$$f(a_2)\cdot f(x_2) < 0 \Rightarrow a_3 = a_2 = 1.1, \quad b_3 = x_2 = 1.1125$$

Spočítáme chybu aproximace $\frac{b_2-a_2}{2} = 0.0125 \not< \varepsilon = 10^{-2}$.
Spočítáme další aproximaci x_3:

$$x_3 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{1.1+1.1125}{2} = 1.1063$$

Určíme interval $\langle a_4, b_4 \rangle$:

$$f(a_3) = -0.0088 \quad f(x_3) = 0.0003 \quad f(b_3) = 0.0093$$
$$f(a_3)\cdot f(x_3) < 0 \Rightarrow a_4 = a_3 = 1.1, \quad b_4 = x_3 = 1.1063$$

Spočítáme chybu aproximace $\frac{b_3-a_3}{2} = 0.0062 < \varepsilon = 10^{-2}$. Je dosaženo zadané přesnosti.
Vše si zapíšeme do tabulky:

i	a_i	$f(a_i)$	x_i	$f(x_i)$	b_i	$f(b_i)$	$\lvert b_i - a_i \rvert/2$
0	1.1	$-$	1.15	$+$	1.2	$+$	0.05
1	1.1	$-$	1.125	$+$	1.15	$+$	0.025
2	1.1	$-$	1.1125	$+$	1.125	$+$	0.0125
3	1.1	$-$	1.1063	$+$	1.1125	$+$	0.0062

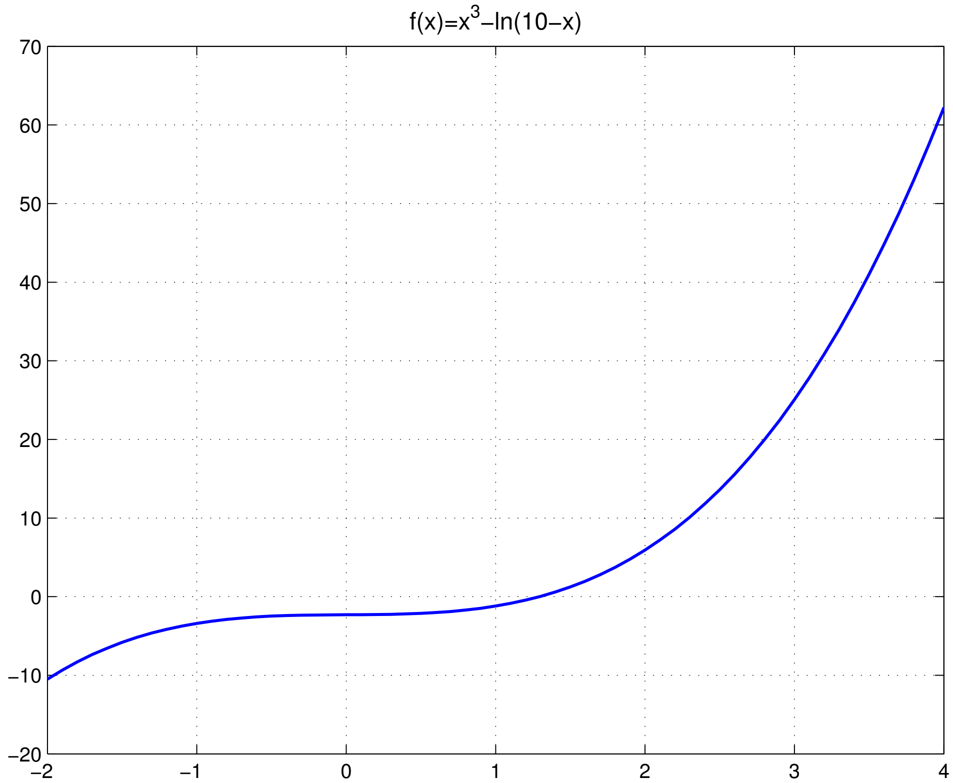
Kořen rovnice je:

$$x = 1.11 \pm 0.01.$$

Příklad 1.3: Newtonovou metodou určete všechny kořeny rovnice:

$$x^3 = \ln(10 - x)$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$.



Z grafu vidíme, že kořen (průsečík s osou x) leží v intervalu $\langle 1, 2\rangle$. Vytabelujeme si na tomto intervalu hodnotu funkce

$$f(x) = x^3 - \ln(10 - x)$$

a zjistíme, že znaménko funkčních hodnot se mění mezi 1.2 a 1.3. Funkce je spojitá na daném intervalu. Rovnice má jeden kořen na intervalu $\langle 1.2,\ 1.3\rangle$.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	-1.1972	-0.8551	-0.4468	0.0337	0.5922	1.2349	1.9678	2.7967	3.7279

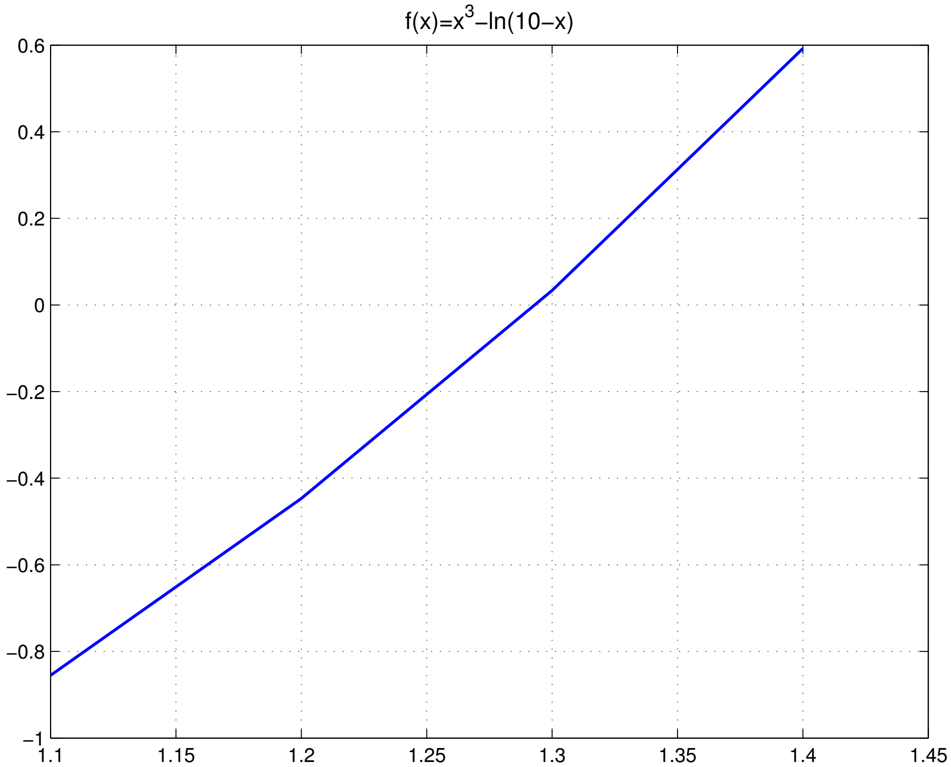
Spocítáme první a druhou derivaci:

$$f(x) = x^3 - \ln(10 - x), \quad f'(x) = 3 \cdot x^2 + \frac{1}{10 - x}, \quad f''(x) = 6 \cdot x + \frac{1}{(10 - x)^2},$$

Ověříme předpoklady metody:

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = \frac{-0.4468}{4.4336} = 0.1008 \not< 0.1 = b - a$$

a vidíme, že podmínka není splněna. Musíme zmenšit interval, na kterém hledáme kořen.



Z grafu vidíme, ze kořen leží v intervalu $\langle 1.25,\ 1.3\rangle$.
A opět začneme ověřovat předpoklady metody, tentokrát na intervalu $\langle 1.25,\ 1.3\rangle$:

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| = \left|\frac{-0.2159}{4.8018}\right| = 0.0450 < 0.05 = b-a$$

$$\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| = \left|\frac{0.0337}{5.1849}\right| = 0.0065 < 0.05 = b-a$$

x_i	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
1.25	4.8018	7.5131
1.26	4.8772	7.5731
1.27	4.9532	7.6331
1.28	5.0299	7.6932
1.29	5.1071	7.7532
1.3	5.1849	7.8132

Z tabelace první a druhé derivace na intervalu $\langle 1.25, 1.3\rangle$ můžeme usoudit, že:

$$f'(x) > 0 \text{ na } \langle 1.25, 1.3\rangle$$

$$f''(x) > 0 \text{ na } \langle 1.25, 1.3\rangle .$$

Jsou tedy splněny předpoklady Newtonovy metody.
Zvolíme počáteční aproximaci $x_0 = b = 1.3$.
Spočítáme další aproximaci x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.3 - \frac{0.03367697433946}{5.18494252873563} = 1.29350485098864$$

a chybu aproximace $|x_1 - x_0| = 0.00649514901136 \not< \varepsilon = 10^{-6}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.29350485098864 - \frac{0.00016453367995}{5.13432117883453} = 1.29347280513989$$

a chybu aproximace $|x_2 - x_1| = 0.00003204584875 \not< \varepsilon = 10^{-6}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_3:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.29347280513989 - \frac{0.00000000399178}{5.13407205040059} = 1.29347280436238$$

a chybu aproximace $|x_1 - x_0| = 0.00000000077751 = 7.7751 \cdot 10^{-10} < \varepsilon = 10^{-6}$. Je dosaženo zadané přesnosti.
Vše si zapíšeme do tabulky:

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$
0	1.3	—
1	1.29350485098864	0.00649514901136
2	1.29347280513989	0.00003204584875
3	1.29347280436238	0.00000000077751

Kořen rovnice je:

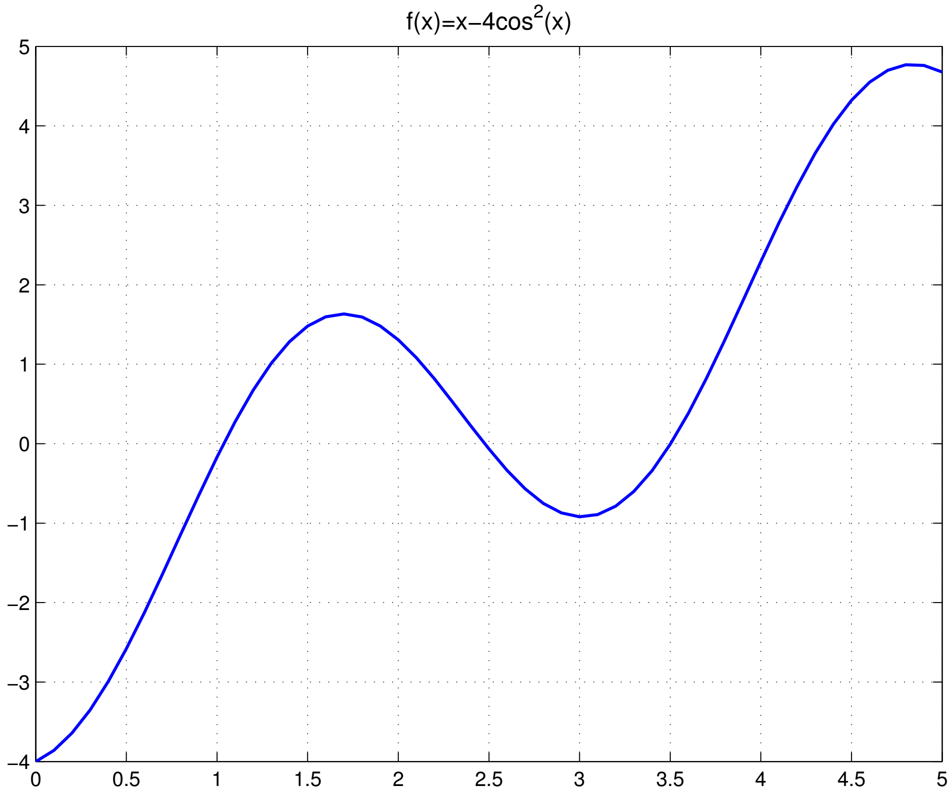
$$x = 1.293473 \pm 10^{-6}$$

Příklad 1.4: Newtonovou metodou určete všechny kořeny rovnice:

$$x - 4\cos^2(x) = 0$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-8}$.

Nejprve separujeme kořeny rovnice. K tomu si nakreslíme graf funkce na intervalu $\langle 0, 5\rangle$. Tento interval jsme zvolili proto, protože jsou na něm videt všechny kořeny rovnice.



Z grafu vidíme, že naše rovnice má tři kořeny $x_1 \in \langle 1, 2\rangle$, $x_2 \in \langle 2, 3\rangle$, $x_3 \in \langle 3, 4\rangle$. Všechny tři kořeny aproximujeme Newtonovou metodou tak, jak jsme to už učinili v příkladu 1.3. Nejdříve se tedy budeme zabývat prvním kořenem x_1. Nejdříve ho separujeme na menší interval o délce jední desetiny. Vytabelujeme si na intervalu $\langle 1, 2\rangle$ hodnoty funkce $f(x) = x - 4\cos^2(x)$ a zjistíme, že náš kořen x_1 leží v intervalu $\langle 1, 1.1\rangle$.
Spocítáme první a druhou derivaci:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 4\cos^2(x), \\ f'(x) &= 1 + 8\sin(x)\cos(x) = 1 + 4\sin(2x), \\ f''(x) &= 8\cos(2x) \end{aligned}$$

Ověříme předpoklady metody na intervalu $\langle 1, 1.1\rangle$:

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| = \left|\frac{1 - 4\cos^2(1)}{1 + 4\sin(2\cdot 1)}\right| = 0.04 < 0.1 = b - a$$

$$\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| = \left|\frac{1.1 - 4\cos^2(1.1)}{1 + 4\sin(2\cdot 1.1)}\right| = 0.07 < 0.1 = b - a$$

x_i	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
1.00	4.6371	-3.3291
1.01	4.6031	-3.4739
1.02	4.5677	-3.6174
1.03	4.5308	-3.7593
1.04	4.4925	-3.8998
1.05	4.4528	-4.0387
1.06	4.4117	-4.1760
1.07	4.36937	-4.3116
1.08	4.3255	-4.4455
1.09	4.2804	-4.5777
1.10	4.2339	-4.7080

Z tabelace první a druhé derivace na intervalu $\langle 1, 1.1\rangle$ můžeme usoudit, že:

$$f'(x) > 0 \text{ na } \langle 1, 1.1\rangle$$

$$f''(x) < 0 \text{ na } \langle 1, 1.1\rangle\,.$$

Jsou tedy splněny předpoklady Newtonovy metody, že první ani druhá derivace nemění na tomto intervalu znaménko.
Zvolíme počáteční aproximaci $x_0 = a = 1$.
Spočítáme další aproximaci x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1 - 4\cos^2(1)}{1 + 4\sin(2\cdot 1)} = 1.0361655092$$

a chybu aproximace $|x_1 - x_0| = 0.0361655092 \not< \varepsilon = 10^{-8}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.0361655092 - \frac{1.0361655092 - 4\cos^2(1.0361655092)}{1 + 4\sin(2\cdot 1.0361655092)} \\ &= 1.0366737657 \end{aligned}$$

a chybu aproximace $|x_2 - x_1| = 0.0005082565 \not< \varepsilon = 10^{-8}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_3:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.0366737657 - \frac{1.0366737657 - 4\cos^2(1.0366737657)}{1 + 4\sin(2\cdot 1.0366737657)} \\ &= 1.03667387601395 \end{aligned}$$

a chybu aproximace $|x_3 - x_2| = 0.0000001103 \not< \varepsilon = 10^{-8}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_4:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.0366738760 - \frac{1.0366738760 - 4\cos^2(1.0366738760)}{1 + 4\sin(2\cdot 1.0366738760)} \\ &= 1.0366738760 \end{aligned}$$

a chybu aproximace $|x_4 - x_3| = 0.00000000000001 < \varepsilon = 10^{-8}$. Je dosaženo žádané přesnosti.
Vše si zapíšeme do tabulky:

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$
0	1	—
1	1.03616550917501	0.03616550917501
2	1.03667376568303	0.00050825650802
3	1.03667387601395	0.00000011033092
4	1.03667387601396	0.00000000000001

Kořen rovnice je:

$$x_1 = 1.03667388 \pm 10^{-8}$$

Podobně to uděláme se zbývajícími kořeny. Tabelací funkce $f(x) = x - 4\cos^2(x)$ na intervalech $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$ zjistíme, že kořen $x_2 \in \langle 2.4, 2.5\rangle$ a kořen $x_3 \in \langle 3.5, 3.6\rangle$. Stejný postup jako výše provedeme nejdříve pro kořen x_2.
Ověříme předpoklady metody na intervalu $\langle 2.4, 2.5\rangle$:

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| = \left|\frac{2.4 - 4\cos^2(2.4)}{1 + 4\sin(2 \cdot 2.4)}\right| = 0.08 < 0.1 = b - a$$

$$\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| = \left|\frac{1 - 4\cos^2(1.1)}{1 + 4\sin(2 \cdot 1.1)}\right| = 0.02 < 0.1 = b - a$$

x_i	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
2.40	-2.9846	0.6999
2.41	-2.9768	0.8592
2.42	-2.9674	1.0181
2.43	-2.9565	1.1766
2.44	-2.9439	1.3346
2.45	-2.9298	1.4920
2.46	-2.9141	1.6489
2.47	-2.8968	1.8052
2.48	-2.8780	1.9607
2.49	-2.8576	2.1154
2.50	-2.8356	2.2692

Z tabelace první a druhé derivace na intervalu $\langle 1, 1.1\rangle$ můžeme usoudit, že:

$$f'(x) < 0 \text{ na } \langle 2.4, 2.5\rangle$$

$$f''(x) > 0 \text{ na } \langle 2.4, 2.5\rangle .$$

Jsou tedy splněny předpoklady Newtonovy metody, že první ani druhá derivace nemění na tomto intervalu znaménko.
Zvolíme počáteční aproximaci $x_0 = a = 2.4$.
Spočítáme další aproximaci x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.4 - \frac{2.4 - 4\cos^2(2.4)}{1 + 4\sin(2 \cdot 2.4)} = 2.47538619175203$$

a chybu aproximace $|x_1 - x_0| = 0.0753861918 \not< \varepsilon = 10^{-8}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.

Spočítáme další aproximaci x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.4753861918 - \frac{2.4753861918 - 4\cos^2(2.4753861918)}{1 + 4\sin(2\cdot 2.4753861918)} \\ &= 2.47646766323749 \end{aligned}$$

a chybu aproximace $|x_2 - x_1| = 0.0010814715 \not< \varepsilon = 10^{-8}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_3:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.4764676632 - \frac{2.4764676632 - 4\cos^2(2.4764676632)}{1 + 4\sin(2\cdot 2.4764676632)} \\ &= 2.4764680473 \end{aligned}$$

a chybu aproximace $|x_3 - x_2| = 0.0000003840 \not< \varepsilon = 10^{-8}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_4:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2.4764680473 - \frac{2.4764680473 - 4\cos^2(2.4764680473)}{1 + 4\sin(2\cdot 2.4764680473)} \\ &= 2.4764680473 \end{aligned}$$

a chybu aproximace $|x_4 - x_3| = 0.00000000000005 < \varepsilon = 10^{-8}$. Je dosaženo žádané přesnosti.
Vše si zapíšeme do tabulky:

i	x_i	$\|x_i - x_{i-1}\|$
0	2.4	—
1	2.47538619175203	0.07538619175203
2	2.47646766323749	0.00108147148546
3	2.47646804730806	0.00000038407057
4	2.47646804730811	0.00000000000005

Kořen rovnice je:

$$x_2 = 2.47646805 \pm 10^{-8}$$

Nyní ještě provedeme stejný postup pro kořen x_3.
Ověříme předpoklady metody na intervalu $\langle 3.5, 3.6\rangle$:

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| = \left|\frac{3.5 - 4\cos^2(3.5)}{1 + 4\sin(2\cdot 3.5)}\right| = 0.002 < 0.1 = b - a$$

$$\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| = \left|\frac{3.6 - 4\cos^2(3.6)}{1 + 4\sin(2\cdot 3.6)}\right| = 0.09 < 0.1 = b - a$$

x_i	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
3.50	3.6279	6.0312
3.51	3.6877	5.9249
3.52	3.7464	5.8162
3.53	3.8040	5.7052
3.54	3.8605	5.5919
3.55	3.9158	5.4763
3.56	3.9700	5.3586
3.57	4.0230	5.2387
3.58	4.0748	5.1168
3.59	4.1253	4.9928
3.60	4.1746	4.8668

Z tabelace první a druhé derivace na intervalu $\langle 1, 1.1\rangle$ můžeme usoudit, že:

$$f'(x) > 0 \text{ na } \langle 3.5, 3.6\rangle$$

$$f''(x) > 0 \text{ na } \langle 3.5, 3.6\rangle\,.$$

Jsou tedy splněny předpoklady Newtonovy metody, že první ani druhá derivace nemění na tomto intervalu znaménko.
Zvolíme počáteční aproximaci $x_0 = a = 3.6$.
Spočítáme další aproximaci x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.4 - \frac{3.6 - 4\cos^2(3.6)}{1 + 4\sin(2\cdot 3.6)} = 3.5081850213$$

a chybu aproximace $|x_1 - x_0| = 0.0918149787 \not< \varepsilon = 10^{-8}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3.5081850213 - \frac{3.5081850213 - 4\cos^2(3.5081850213)}{1 + 4\sin(2\cdot 3.5081850213)} \\ &= 3.5021769636 \end{aligned}$$

a chybu aproximace $|x_2 - x_1| = 0.0060080576 \not< \varepsilon = 10^{-8}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_3:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3.5021769636 - \frac{3.5021769636 - 4\cos^2(3.5021769636)}{1 + 4\sin(2\cdot 3.5021769636)} \\ &= 3.5021473919 \end{aligned}$$

a chybu aproximace $|x_3 - x_2| = 0.0000295717 \not< \varepsilon = 10^{-8}$. Ve výpočtu pokračujeme dál.
Spočítáme další aproximaci x_4:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 3.5021473919 - \frac{3.5021473919 - 4\cos^2(3.5021473919)}{1 + 4\sin(2\cdot 3.5021473919)} \\ &= 3.5021473912 \end{aligned}$$

a chybu aproximace $|x_4 - x_3| = 0.0000000007 < \varepsilon = 10^{-8}$. Je dosaženo žádané přesnosti.
Vše si zapíšeme do tabulky:

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	3.6	—
1	3.50818502125718	0.09181497874282
2	3.50217696363258	0.00600805762461
3	3.50214739193511	0.00002957169746
4	3.50214739121355	0.00000000072156

Kořen rovnice je:

$$x_3 = 3.50214739 \pm 10^{-8}$$

Kořeny rovnice jsou:

$$x_1 = 1.03667388 \pm 10^{-8} \qquad x_2 = 2.47646805 \pm 10^{-8} \qquad x_3 = 3.50214739 \pm 10^{-8}$$

KAPITOLA

2

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC: PŘÍMÉ METODY

Příklad 2.1: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -6 & -19 & 10 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte LU-rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ pomocí Gaussovy eliminační metody bez výběru hlavního prvku. Využijte nalezeného LU-rozkladu k určení řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} = (-9, -59, 28)^\top$, inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a determinantu $\det \mathbf{A}$.

Gaussovou eliminační metodou dostáváme:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -6 & -19 & 10 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-6) \;\; \cdot 3 \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 0 \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{U}$ je výsledkem Gaussovy eliminační metody, matici $\mathbf{L}$ sestavíme z multiplikátorů (s opačnými znaménky), které jsme použili během eliminace:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Při řešení $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nejprve spočteme $\mathbf{y}$ z $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ a potom z $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ vypočítáme $\mathbf{x}$:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} y_1 & & & = & -9 \\ 6y_1 & +y_2 & & = & -59 \\ -3y_1 & & +y_3 & = & 28 \end{array}\right\} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} -x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & -9 \\ & -x_2 & -2x_3 & = & -5 \\ & & x_3 & = & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici vypočítáme tak, že řešíme soustavy $\mathbf{A}\mathbf{a}^i = \mathbf{e}^i$, $i = 1, 2, 3$, kde $\mathbf{e}^i$ jsou sloupce jednotkové matice $\mathbf{I} = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$. Získané vektory $\mathbf{a}^i$ jsou sloupci inverzní matice, tj. $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$. Všechny tři soustavy budeme řešit současně, přičemž jejich řešení opět rozložíme do dvou kroků:

$$\left.\begin{array}{rrrrr|r|r} y_1 & & & = & 1 & 0 & 0 \\ 6y_1 & +y_2 & & = & 0 & 1 & 0 \\ -3y_1 & & +y_3 & = & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr|r|r} -x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 1 & 0 & 0 \\ & -x_2 & -2x_3 & = & -6 & 1 & 0 \\ & & x_3 & = & 3 & 0 & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinant $\det \mathbf{A}$ vypočítáme jako součin diagonálních prvků matic $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \det \mathbf{U} = (1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot ((-1) \cdot (-1) \cdot 1) = 1.$$

Příklad 2.2: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -6 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte LU-rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ pomocí Gaussovy eliminační metody bez výběru hlavního prvku. Využijte nalezeného LU-rozkladu k určení řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} = (19, 11, 42)^\top$, inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a determinantu $\det \mathbf{A}$.

Gaussovou eliminační metodou dostáváme:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -6 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{U}$ je výsledkem Gaussovy eliminační metody, matici $\mathbf{L}$ sestavíme z multiplikátorů (s opačnými znaménky), které jsme použili během eliminace:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Při řešení $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nejprve spočteme $\mathbf{y}$ z $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ a potom z $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ vypočítáme $\mathbf{x}$:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} y_1 & & & = & 19 \\ & y_2 & & = & 11 \\ 3y_1 & -2y_2 & +y_3 & = & 42 \end{array}\right\} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} -2x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 19 \\ & -3x_2 & +2x_3 & = & 11 \\ & & x_3 & = & 7 \end{array}\right\} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici vypočítáme tak, že řešíme soustavy $\mathbf{A}\mathbf{a}^i = \mathbf{e}^i$, $i = 1, 2, 3$, kde $\mathbf{e}^i$ jsou sloupce jednotkové matice $\mathbf{I} = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$. Získané vektory $\mathbf{a}^i$ jsou sloupci inverzní matice, tj. $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$. Všechny tři soustavy budeme řešit současně, přičemž jejich řešení opět rozložíme do dvou kroků:

$$\left.\begin{array}{rrrcr|r|r} y_1 & & & = & 1 & 0 & 0 \\ & y_2 & & = & 0 & 1 & 0 \\ 3y_1 & -2y_2 & +y_3 & = & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr|r|r} -2x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 1 & 0 & 0 \\ & -3x_2 & +2x_3 & = & 0 & 1 & 0 \\ & & x_3 & = & -3 & 2 & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & \frac{11}{6} \\ -2 & 1 & \frac{2}{3} \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinant $\det \mathbf{A}$ vypočítáme jako součin diagonálních prvků matic $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \det \mathbf{U} = (1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot ((-2) \cdot (-3) \cdot 1) = 6.$$

Příklad 2.3: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -18 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte LU-rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ pomocí Gaussovy eliminační metody bez výběru hlavního prvku. Využijte nalezeného LU-rozkladu k určení řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} = (0, 8, -8)^\top$, inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a determinantu $\det \mathbf{A}$.

Gaussovou eliminační metodou dostáváme:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -18 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3 \quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2} \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{U}$ je výsledkem Gaussovy eliminační metody, matici $\mathbf{L}$ sestavíme z multiplikátorů (s opačnými znaménky), které jsme použili během eliminace:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nezapomínejte, že při výpočtu matice L Gaussovou eliminační metodou nesmíte měnit pořadí řádků, ani násobit řádky konstantou. Není proto možné vyhnout se práci se zlomky. V dalších úlohách se seznámite s LU-rozkladem s permutační maticí, který můžete použít v případech, kdy je prohození řádků nutné.

Při řešení $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nejprve spočteme $\mathbf{y}$ z $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ a potom z $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ vypočítáme $\mathbf{x}$:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} y_1 & & & = & 0 \\ -3y_1 & +y_2 & & = & -8 \\ -\frac{2}{3}y_1 & -\frac{1}{2}y_2 & +y_3 & = & 8 \end{array}\right\} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 6x_1 & & +3x_3 & = & 0 \\ & +2x_2 & +4x_3 & = & -8 \\ & & -2x_3 & = & 4 \end{array}\right\} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici vypočítáme tak, že řešíme soustavy $\mathbf{Aa}^i = \mathbf{e}^i$, $i = 1, 2, 3$, kde $\mathbf{e}^i$ jsou sloupce jednotkové matice $\mathbf{I} = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$. Získané vektory $\mathbf{a}^i$ jsou sloupci inverzní matice, tj. $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$. Všechny tři soustavy budeme řešit současně, přičemž jejich řešení opět rozložíme do dvou kroků:

$$\left.\begin{array}{rrrcr|r|r} y_1 & & & = & 1 & 0 & 0 \\ -3y_1 & +y_2 & & = & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3}y_1 & -\frac{1}{2}y_2 & +y_3 & = & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \frac{13}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr|r|r} 6x_1 & & +3x_3 & = & 1 & 0 & 0 \\ & +2x_2 & +4x_3 & = & -6 & 1 & 0 \\ & & -2x_3 & = & 3 & 0 & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{11}{3} & 1 & 1 \\ -\frac{13}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Determinant $\det \mathbf{A}$ vypočítáme jako součin diagonálních prvků matic $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \det \mathbf{U} = (1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 2 \cdot (-2)) = -24.$$

Příklad 2.4: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte LU-rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ pomocí Gaussovy eliminační metody bez výběru hlavního prvku. Využijte nalezeného LU-rozkladu k určení řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} = (-4, -22, 29, 13)^\top$, inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a determinantu $\det \mathbf{A}$.

Práce s čtvercovou maticí se čtyřmi řádky je o něco náročnější než v případě matic s menšími rozměry, postup je nicméně totožný. Gaussovou eliminační metodou dostáváme:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{U}$ je výsledkem Gaussovy eliminační metody, matici $\mathbf{L}$ sestavíme z multiplikátorů (s opačnými znaménky), které jsme použili během eliminace:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Opět mějte stále na paměti, že tento algoritmus hledání LU-rozkladu zapovídá prohazování řádků a násobení řádků konstantou.
Při řešení $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nejprve spočteme $\mathbf{y}$ z $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ a potom z $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ vypočítáme $\mathbf{x}$:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} y_1 & & & & = & -4 \\ y_1 & +y_2 & & & = & -22 \\ & -\frac{1}{2}y_2 & +y_3 & & = & 29 \\ \frac{1}{2}y_1 & -y_2 & +\frac{3}{5}y_3 & +y_4 & = & 13 \end{array}\right\} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ -18 \\ 20 \\ -15 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & & = & -4 \\ & -2x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & -18 \\ & & +5x_3 & +5x_4 & = & 20 \\ & & & -3x_4 & = & -15 \end{array}\right\} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici vypočítáme tak, že řešíme soustavy $\mathbf{Aa}^i = \mathbf{e}^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, kde $\mathbf{e}^i$ jsou sloupce jednotkové matice $\mathbf{I} = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4)$. Získané vektory $\mathbf{a}^i$ jsou sloupci inverzní matice, tj. $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4)$. Všechny čtyři soustavy budeme řešit současně, přičemž jejich řešení opět rozložíme do dvou kroků:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr|r|r|r} y_1 & & & & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & +y_2 & & & = & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & -\frac{1}{2}y_2 & +y_3 & & = & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}y_1 & -y_2 & +\frac{3}{5}y_3 & +y_4 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{6}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrcr|r|r|r} -2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & -2x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & +5x_3 & +5x_4 & = & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ & & & -3x_4 & = & -\frac{6}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right\} \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{8}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Determinant $\det \mathbf{A}$ vypočítáme jako součin diagonálních prvků matic $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \det \mathbf{U} = (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot ((-2) \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-3)) = -60.$$

Příklad 2.5: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 3 \\ -8 & 5 & 0 & -4 \\ 12 & -7 & -1 & 8 \\ 8 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte LU-rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ pomocí Gaussovy eliminační metody bez výběru hlavního prvku. Využijte nalezeného LU-rozkladu k určení řešení soustavy lineárních rovnic

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} = (-16, 31, -52, -33)^\top$, inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a determinantu $\det \mathbf{A}$.

Gaussovou eliminační metodou dostáváme:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 3 \\ -8 & 5 & 0 & -4 \\ 12 & -7 & -1 & 8 \\ 8 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{U}$ je výsledkem Gaussovy eliminační metody, matici $\mathbf{L}$ sestavíme z multiplikátorů (s opačnými znaménky), které jsme použili během eliminace:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Při řešení $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nejprve spočteme $\mathbf{y}$ z $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ a potom z $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ vypočítáme $\mathbf{x}$:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} y_1 & & & & = & -16 \\ -2y_1 & +y_2 & & & = & 31 \\ 3y_1 & -2y_2 & +y_3 & & = & -52 \\ 2y_1 & -3y_2 & +y_3 & +y_4 & = & -33 \end{array}\right\} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -16 \\ -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} 4x_1 & -3x_2 & & +3x_4 & = & -16 \\ & -x_2 & & +2x_4 & = & -1 \\ & & -x_3 & +3x_4 & = & -6 \\ & & & -2x_4 & = & 2 \end{array}\right\} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici vypočítáme tak, že řešíme soustavy $\mathbf{A}\mathbf{a}^i = \mathbf{e}^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, kde $\mathbf{e}^i$ jsou sloupce jednotkové matice $\mathbf{I} = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4)$. Získané vektory $\mathbf{a}^i$ jsou sloupci inverzní matice, tj. $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4)$. Všechny čtyři soustavy budeme řešit současně, přičemž jejich řešení opět rozložíme do dvou kroků:

$$\left.\begin{array}{rrrrc|c|c|c|} y_1 & & & & = 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2y_1 & +y_2 & & & = 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3y_1 & -2y_2 & +y_3 & & = 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2y_1 & -3y_2 & +y_3 & +y_4 & = 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrc|c|c|c} 4x_1 & -3x_2 & & +3x_4 & = 1 & 0 & 0 & 0 \\ & -x_2 & & +2x_4 & = 2 & 1 & 0 & 0 \\ & & -x_3 & +3x_4 & = 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & -2x_4 & = 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -5 & -2 & 1 & -1 \\ -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Determinant $\det \mathbf{A}$ vypočítáme jako součin diagonálních prvků matic $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \det \mathbf{U} = (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot (4 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-2)) = -8.$$

Příklad 2.6: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & -3 \\ -12 & 10 & 4 & -11 \\ -12 & 11 & 6 & -16 \\ 8 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte LU-rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ pomocí Gaussovy eliminační metody bez výběru hlavního prvku. Využijte nalezeného LU-rozkladu k určení řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} = (5, 11, 1, -19)^\top$, inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a determinantu $\det \mathbf{A}$.

Gaussovou eliminační metodou dostáváme:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & -3 \\ -12 & 10 & 4 & -11 \\ -12 & 11 & 6 & -16 \\ 8 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{U}$ je výsledkem Gaussovy eliminační metody, matici $\mathbf{L}$ sestavíme z multiplikátorů (s opačnými znaménky), které jsme použili během eliminace:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Při řešení $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nejprve spočteme $\mathbf{y}$ z $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ a potom z $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ vypočítáme $\mathbf{x}$:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} y_1 & & & & = & 5 \\ 3y_1 & +y_2 & & & = & 11 \\ 3y_1 & +2y_2 & +y_3 & & = & 1 \\ -2y_1 & +3y_2 & -y_3 & +y_4 & = & -19 \end{array}\right\} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} -4x_1 & +3x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & 5 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & -4 \\ & & x_3 & -3x_4 & = & -6 \\ & & & -3x_4 & = & -3 \end{array}\right\} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici vypočítáme tak, že řešíme soustavy $\mathbf{Aa}^i = \mathbf{e}^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, kde $\mathbf{e}^i$ jsou sloupce jednotkové matice $\mathbf{I} = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4)$. Získané vektory $\mathbf{a}^i$ jsou sloupci inverzní matice, tj. $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4)$. Všechny čtyři soustavy budeme řešit současně, přičemž jejich řešení opět rozložíme do dvou kroků:

$$\left.\begin{array}{rrrrc|c|c|c|c} y_1 & & & & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3y_1 & +y_2 & & & = & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3y_1 & +2y_2 & +y_3 & & = & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2y_1 & +3y_2 & -y_3 & +y_4 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 14 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrcr|r|r|r}
-4x_1 & +3x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & 1 & 0 & 0 & 0\\
 & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & -3 & 1 & 0 & 0\\
 & & x_3 & -3x_4 & = & 3 & -2 & 1 & 0\\
 & & & -3x_4 & = & 14 & -5 & 1 & 1
\end{array}\right\} \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -11 & 3 & 0 & -1\\ -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Determinant $\det \mathbf{A}$ vypočítáme jako součin diagonálních prvků matic $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \det \mathbf{U} = (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot ((-4) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3)) = 12.$$

Příklad 2.7: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7\\ -2 & 2 & 8\\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte LU-rozklad s permutační maticí, tj. rozklad $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s výběrem hlavního prvku.

Při výpočtu LU-rozkladu s permutační maticí budeme postupovat takto:

- vytvoříme pomocné matice $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}$ a $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{I}$ (= jednotková matice);
- v matici $\tilde{\mathbf{U}}$ provádíme dopředný chod Gaussovy eliminační metody s výběrem hlavního prvku;
- v matici $\tilde{\mathbf{P}}$ přehazujeme řádky stejně jako v matici $\tilde{\mathbf{U}}$;
- do matice $\tilde{\mathbf{L}}$ zapíšeme v každé fázi multiplikátory (s opačnými znaménky) a při přehození řádků v $\tilde{\mathbf{U}}$ přehodíme v $\tilde{\mathbf{L}}$ řádky i sloupce;
- nakonec dostáváme $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$, $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}}$ a $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}}$.

Výpočet tedy zahájíme tím, že definujeme pomocné matice $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\mathbf{P}}$ a $\tilde{\mathbf{L}}$.

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7\\ -2 & 2 & 8\\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po výběru hlavního prvku v první fázi (tj. v absolutní hodnoty největšího prvku v prvním sloupci):

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 8\\ 1 & -1 & 7\\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po eliminaci v první fázi s multiplikátory $m_{21} = \frac{1}{2}$ a $m_{31} = -\frac{1}{2}$:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 8\\ 0 & 0 & 11\\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po výběru hlavního prvku ve druhé fázi (bez prohození druhého a třetího řádku bychom v eliminaci vůbec nemohli pokračovat!):

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Eliminace ve druhé fázi je multiplikátorem $m_{32} = 0$, čili veskrze symbolická:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Výsledkem jsou matice

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}, \quad \mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}}, \quad \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}}.$$

Můžete si vyzkoušet, že skutečně platí $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$.

Poznámka. Mohli byste považovat za nevýhodu, že získaný tvar ve skutečnosti není rozkladem matice $\mathbf{A}$. Ten byste dostali jeho vynásobením obou stran rovnosti zleva maticí $\mathbf{P}^{-1}$. Výpočet inverzní matice k permutační matici je naštěstí velice snadný, platí totiž $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\top}$. Matici $\mathbf{A}$ proto můžeme rozložit na součin takto: $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{LU} = \mathbf{P}^{\top}\mathbf{LU}$, neboli

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -2 & 2 & 8 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad .$$

Příklad 2.8: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 3 & -9 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Vypočtěte LU-rozklad s permutační maticí, tj. rozklad $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s výběrem hlavního prvku.

Při výpočtu LU-rozkladu s permutační maticí budeme postupovat takto:

- vytvoříme pomocné matice $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}$ a $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{I}$ (= jednotková matice);
- v matici $\tilde{\mathbf{U}}$ provádíme dopředný chod Gaussovy eliminační metody s výběrem hlavního prvku;
- v matici $\tilde{\mathbf{P}}$ přehazujeme řádky stejně jako v matici $\tilde{\mathbf{U}}$;
- do matice $\tilde{\mathbf{L}}$ zapíšeme v každé fázi multiplikátory (s opačnými znaménky) a při přehození řádků v $\tilde{\mathbf{U}}$ přehodíme v $\tilde{\mathbf{L}}$ řádky i sloupce;
- nakonec dostáváme $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$, $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}}$ a $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}}$.

Výpočet tedy zahájíme tím, že definujeme pomocné matice $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\mathbf{P}}$ a $\tilde{\mathbf{L}}$.

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 3 & -9 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po výběru hlavního prvku v první fázi (tj. v absolutní hodnoty největšího prvku v prvním sloupci):

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & -9 & 6 \\ 2 & -1 & -8 & -2 \\ 1 & -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad -\tfrac{1}{3}\ \ \tfrac{2}{3}\ \ \tfrac{1}{3}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po eliminaci v první fázi s multiplikátory $m_{21} = -\frac{1}{3}$, $m_{31} = \frac{2}{3}$ a $m_{41} = \frac{1}{3}$:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & \frac{10}{3} & -11 & 5 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{3} & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po výběru hlavního prvku ve druhé fázi (toho docílíme prohozením druhého a čtvrtého řádku):

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & -\frac{19}{3} & 5 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -4 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & -11 & 5 \end{pmatrix} \quad -\tfrac{5}{19}\ \ \tfrac{10}{19}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Při eliminaci ve druhé fázi jsme použili multiplikátory $m_{32} = -\frac{5}{19}$ a $m_{32} = \frac{10}{19}$:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & -\frac{19}{3} & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{101}{19} & -\frac{20}{19} \\ 0 & 0 & -\frac{159}{19} & \frac{135}{19} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{19} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{19} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po výběru hlavního prvku ve třetím kroku (prohozením třetího a čtvrtého řádku):

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & -\frac{19}{3} & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{159}{19} & \frac{135}{19} \\ 0 & 0 & -\frac{101}{19} & -\frac{20}{19} \end{pmatrix} \quad -\tfrac{101}{159}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{19} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{19} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec provedeme eliminaci koeficientem $m_{43} = -\frac{101}{159}$:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & -\frac{19}{3} & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{159}{19} & \frac{135}{19} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{259}{53} \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{19} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{19} & \frac{101}{159} & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Výsledkem jsou matice

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}, \quad \mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}}, \quad \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}}.$$

Můžete si vyzkoušet, že skutečně platí $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$.

KAPITOLA

3

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC: ITERAČNÍ METODY

Příklad 3.1: Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0, \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 9, \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 10, \end{array}$$

pomocí Jacobiho iterační metody s přesností $\epsilon = 10^{-2}$.

Než aplikujeme rekurentní vzorce pro Jacobiho metodu, musíme zajistit, aby posloupnost vektorů, kterou metoda vytváří, konvergovala ke správnému výsledku. Z teorie víme, že konvergence je zaručena, pokud je matice soustavy ostře diagonálně dominantní (v ostatních případech konvergovat může, ale také nemusí). Pro tento účel stačí přehodit první a třetí rovnici a následně přičíst první rovnici ke druhé rovnici. Dostaneme pak:

$$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 10, \\ 2x_1 & +3x_2 & & = & 19, \\ -x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0. \end{array}$$

Matice soustavy

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

je ostře diagonálně dominantní, neboť absolutní hodnoty prvků na diagonále jsou (ostře) větší než součty absolutních hodnot ostatních prvků na příslušných řádcích, tj. $3 > 1 + 1$, $3 > 2 + 0$ a $3 > 1 + 1$.

Upravenou soustavu převedeme na iterační tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}(10 - x_2 - x_3), \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}(19 - 2x_1), \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

a připsáním iteračních indexů dostaneme rekurentní vzorce pro Jacobiho metodu

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(10 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(19 - 2x_1^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}). \end{aligned}$$

Poznamenejme, že rekurentní vzorce můžeme zapsat také v maticovém tvaru, který je obzláště výhodný při řešení úlohy pomocí počítačového softwaru.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{19}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Protože výpočet konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^\top$, zvolíme pro jednoduchost

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\ 1,\ \ 1,\ \ 1\ )^\top.$$

Dosadíme do pravé strany rekurentních vzorců a vypočteme

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\ 2.6667,\ \ 5.6667,\ \ 0\ )^\top.$$

Jestliže takto pokražujeme dále, dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(2)} &= (\ 1.4444,\ \ 4.5556,\ \ -1\ )^\top, \\ \mathbf{x}^{(3)} &= (\ 2.1481,\ \ 5.3704,\ \ -1.0370\ )^\top, \text{ atd.} \end{aligned}$$

Současně přitom zjišťujeme, zda platí

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R \le 10^{-3},$$

takže postupně počítáme

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_R = \max\{|2.6667 - 1|, |5.6667 - 1|, |0 - 1|\} = 4.6667, \\ &\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_R = \max\{|1.4444 - 2.6667|, |4.5556 - 5.6667|, |-1 - 0|\} = 1.2222, \text{ atd.} \end{aligned}$$

Výpočet zapíšeme do tabulky:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R$
0	1	1	1	—
1	2.6667	5.6667	0	4.6667
2	1.4444	4.5556	−1.0000	1.2222
3	2.1481	5.3704	−1.0370	0.8148
4	1.8889	4.9012	−1.0741	0.4691
5	2.0576	5.0741	−1.0041	0.1728
6	1.9767	4.9616	−1.0055	0.1125
7	2.0146	5.0155	−0.9950	0.0540
8	1.9931	4.9902	−1.0003	0.0253
9	2.0034	5.0046	−0.9990	0.0143
10	1.9982	4.9978	−1.0004	0.0068

Ukončili jsem po jedenácté iteraci, protože $\|\mathbf{x}^{(10)} - \mathbf{x}^{(9)}\|_R = 0.0068 \leq 10^{-2}$. Požadovaná přesnost je $\varepsilon = 10^{-2}$, proto jednotlivé souřadnice výsledku zaokrouhlíme na 2 desetinná místa.

Výsledek zapíšeme jako $x_1 = 2.00 \pm 10^{-2}$, $x_2 = 5.00 \pm 10^{-2}$, $x_3 = -1.00 \pm 10^{-2}$.

Příklad 3.2: Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -6, \\ 5x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -18, \\ 7x_1 & +7x_2 & +7x_3 & = & -14, \end{array}$$

pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody s přesností $\varepsilon = 10^{-2}$.

Z teorie víme, že konvergence Gaussovy-Seidelovy metody je zaručena, pokud je matice soustavy ostře diagonálně dominantní (v ostatních případech konvergovat může, ale také nemusí). Pro dosažení takové matice můžeme například nejprve umístit druhou rovnici na první pozici, třetí rovnici na druhou pozici a první rovnici na třetí pozici:

$$\begin{array}{rrrcr} 5x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -18, \\ 7x_1 & +7x_2 & +7x_3 & = & -14, \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -6, \end{array}$$

Pak již jen stačí odečíst první a třetí rovnici od druhé rovnice:

$$\begin{array}{rrrcr} 5x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -18, \\ x_1 & +5x_2 & +x_3 & = & 10, \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -6. \end{array}$$

Matice soustavy

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

je ostře diagonálně dominantní, neboť absolutní hodnoty prvků na diagonále jsou (ostře) větší než součty absolutních hodnot ostatních prvků na příslušných řádcích, tj. $5 > 1 + 1$, $5 > 2 + 1$ a $5 > 1 + 1$.
Upravenou soustavu převedeme na iterační tvar

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{5}(-18 - x_2 - x_3), \\ x_2 & = & \frac{1}{5}(10 - x_1 - x_3), \\ x_3 & = & \frac{1}{5}(-6 - x_1 - x_2) \end{array}$$

a připsáním iteračních indexů dostaneme rekurentní vzorce pro Gaussovu-Seidelovu metodu

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \frac{1}{5}(-18 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{5}(10 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} & = & -\frac{1}{5}(-6 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}). \end{array}$$

Protože výpočet konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^\top$, zvolíme pro jednoduchost

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\ 1,\ \ 1,\ \ 1\ )^\top.$$

Dosadíme do pravé strany rekurentních vzorců a vypočteme

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\ -4,\ \ 2.6,\ \ -0.92\ )^\top.$$

Jestliže takto pokražujeme dále, dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(2)} &= (\ -3.936,\ \ 2.9712,\ \ -1.007\ )^\top, \\ \mathbf{x}^{(3)} &= (\ -3.9928,\ \ 3,\ \ -1.0014\ )^\top, \text{ atd.} \end{aligned}$$

Současně přitom zjišťujeme, zda platí

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R \le 10^{-2},$$

takže postupně počítáme

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_R = \max\{|-4-1|, |2.6-1|, |-0.92-1|\} = 5, \\ &\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_R = \max\{|-3.936+4|, |2.9712-2.6|, |-1.007+0.92|\} = 0.3712, \\ &\|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_R = 0.0568, \text{ atd.} \end{aligned}$$

Výpočet zapíšeme do tabulky:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R$
0	1	1	1	—
1	−4.0000	2.6000	−0.9200	5.0000
2	−3.9360	2.9712	−1.0070	0.3712
3	−3.9928	3.0000	−1.0014	0.0568
4	−3.9997	3.0002	−1.0001	0.0069

Ukončili jsem po jedenácté iteraci, protože $\|\mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(3)}\|_R = 0.0069 \le 10^{-2}$. Požadovaná přesnost je $\varepsilon = 10^{-2}$, proto jednotlivé souřadnice výsledku zaokrouhlíme na 2 desetinná místa.

Výsledek zapíšeme jako $x_1 = -4.00 \pm 10^{-2}$, $x_2 = 3.00 \pm 10^{-2}$, $x_3 = -1.00 \pm 10^{-2}$.

Příklad 3.3: Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 12, \\ 5x_1 & -x_2 & -4x_3 & = & -11, \\ -2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 2, \end{array}$$

jak pomocí Jacobiho, tak pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody s přesností $\varepsilon = 10^{-2}$. Všímejte si odlišností obou metod.

Aby metody konvergovaly, je třeba převést soustavu rovnic do ekvivalentního tvaru, jehož matice soustavy je ostře diagonálně dominantní. Zdůrazněme, že tato postačující podmínka konvergence je pro obě metody společná!
Všimněte si, že v matici soustavy nenajdeme na žádném řádku ostře dominantní prvek ve smyslu, že by byl v absolutní hodnotě (ostře) větší než součet absolutních hodnot prvků zbylých. Vhodné ekvivalentní úpravy se nám proto budou hledat obtížněji, protože však je matice soustavy regulární (má nenulový determinant - ověřte si!), takové úpravy nutně existují. Se soustavou budeme pracovat v maticovém tvaru, protože je to přehlednější. Po krátkém experimentování (ovšem s vědomím toho, co chceme získat) dostáváme následující úpravy:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 12 \\ 5 & -1 & -4 & -11 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 12 \\ 5 & -1 & -4 & -11 \\ 1 & 5 & 0 & 14 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 12 \\ 1 & 5 & 0 & 14 \\ 5 & -1 & -4 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 14 \\ 5 & -1 & -4 & -11 \end{array}\right) .
$$

V tuto chvíli jsme získali ostrou diagonální dominanci na prvním a druhém řádku. Na třetím řádku bychom měli rádi dominantní třetí prvek (tj. -4), přičemž nám vadí první prvek (tj. 5). Nabízí se odečíst od třetího řádku první (na první pozici pak bude místo 5 menší -3), jenže tím dominance nedosáhneme. Ukázalo se, že odečtení celého prvního řádku bylo příliš „hrubou“ operací. Zkusme tedy být jemnější a od třetího řádku odečíst $\frac{5}{8}$ prvního řádku. Po provedení závěrečné kosmetické úpravy dostaneme:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 14 \\ 5 & -1 & -4 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 14 \\ 0 & -1 & -\frac{11}{4} & -\frac{93}{8} \end{array}\right) \quad | \cdot -8
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 14 \\ 0 & 8 & 22 & 93 \end{array}\right) .
$$

Zapsáno opět v rovnicovém tvaru tedy:

$$
\begin{array}{rrrcl} 8x_1 & & -2x_3 & = & 1, \\ x_1 & +5x_2 & & = & 14, \\ & 8x_2 & +22x_3 & = & 93. \end{array}
$$

Matice soustavy

$$
\begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} .
$$

je samozřejmě ostře diagonálně dominantní, neboť absolutní hodnoty prvků na diagonále jsou (ostře) větší než součty absolutních hodnot ostatních prvků na příslušných řádcích, tj. $8 > 0 + 2$, $5 > 1 + 0$ a $22 > 0 + 8$.

Upravenou soustavu převedeme do iteračního tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{8}(1+2x_3), \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(14-x_1), \\ x_3 &= -\tfrac{1}{22}(93-8x_2). \end{aligned}$$

V tuto chvíli je třeba napsat rekurentní vzorce a ty jsou u Jacobiho i Gaussovy-Seidelovy metody odlišné.
Nejprve rekurentní vzorce pro Jacobiho metodu:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{8}(1+2x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(14-x_1^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} &= -\tfrac{1}{22}(93-8x_2^{(k)}). \end{aligned}$$

A dále rekurentní vzorce pro Gaussovu-Seidelovu metodu:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{8}(1+2x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(14-x_1^{(k+1)}), \\ x_3^{(k+1)} &= -\tfrac{1}{22}(93-8x_2^{(k+1)}). \end{aligned}$$

Výpočet konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^\top$, u obou metod tedy zvolíme pro například

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\ 1,\ \ 1,\ \ 1\ )^\top.$$

Dosadíme do pravé strany rekurentních vzorců a vypočteme první prvky. V případě Jacobiho metody dostaneme

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\ \tfrac{3}{8},\ \ \tfrac{13}{5},\ \ \tfrac{85}{22}\ )^\top.$$

Po prvním kroku je hodnota chyby

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_R = \max\{|\tfrac{3}{8}-1|, |\tfrac{13}{5}-1|, |\tfrac{85}{22}-1|\} = \tfrac{63}{22} > 10^{-2}.$$

V případě Gaussovy-Seidelovy metody to bude

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\ \tfrac{3}{8},\ \ \tfrac{109}{40},\ \ \tfrac{178}{55}\ )^\top$$

a chyba bude mít hodnotu

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_R = \max\{|\tfrac{3}{8}-1|, |\tfrac{109}{40}-1|, |\tfrac{178}{55}-1|\} = \tfrac{123}{55} > 10^{-2}.$$

Výpočet opakujeme, dokud není chyba menší nebo rovna 10^{-2}. Výpočty zapíšeme do tabulek. Jacobiho metoda:
Gaussova-Seidelova metoda:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R$
0	1	1	1	—
1	0.3750	2.7250	3.2364	2.2364
2	0.9341	2.6132	3.2770	0.5591
3	0.9443	2.6111	3.2778	0.0102
4	0.9444	2.6111	3.2778	0.0002

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R$
0	1	1	1	—
1	0.3750	2.6000	3.8636	2.8636
2	1.0909	2.7250	3.2818	0.7159
3	0.9455	2.5818	3.2364	0.1455
4	0.9341	2.6109	3.2884	0.0521
5	0.9471	2.6132	3.2779	0.0130
6	0.9445	2.6106	3.2770	0.0026

Jacobiho metodu jsme ukončili po šesté iteraci a Gaussovu-Seidelovu po čtvrté iteraci. Požadovaná přesnost je $\varepsilon = 10^{-2}$, proto jednotlivé souřadnice výsledku zaokrouhlíme na 2 desetinná místa.

Výsledky obou metod jsou totožné (všimněte si však, že na dalších desetinných místech se liší) a zapíšeme je jako $x_1 = 0.94 \pm 10^{-2}$, $x_2 = 2.61 \pm 10^{-2}$, $x_3 = 3.28 \pm 10^{-2}$.

Příklad 3.4: Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} -6x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -17, \\ 2x_1 & +5x_2 & & +x_4 & = & -9, \\ x_1 & +6x_2 & +5x_3 & & = & -21, \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +5x_4 & = & 12. \end{array}$$

pomocí Jacobiho iterační metody s přesností $\varepsilon = 10^{-2}$.

Než aplikujeme rekurentní vzorce pro Jacobiho metodu, musíme zajistit, aby posloupnost vektorů, kterou metoda vytváří, konvergovala ke správnému výsledku. Z teorie víme, že konvergence je zaručena, pokud je matice soustavy ostře diagonálně dominantní (v ostatních případech konvergovat může, ale také nemusí). Pro tento účel stačí od třetí rovnice odečíst rovnici druhou a dostaneme:

$$\begin{array}{rrrrcr} -6x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -17, \\ 2x_1 & +5x_2 & & +x_4 & = & -9, \\ -x_1 & +x_2 & +5x_3 & -x_4 & = & -12, \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +5x_4 & = & 12. \end{array}$$

Matice soustavy

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

je ostře diagonálně dominantní, neboť absolutní hodnoty prvků na diagonále jsou (ostře) větší než součty absolutních hodnot ostatních prvků na příslušných řádcích, tj. $6 > 2 + 1 + 1$, $5 > 2 + 0 + 1$, $5 > 1 + 1 + 1$ a $5 > 2 + 1 + 1$.

Upravenou soustavu převedeme na iterační tvar

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\tfrac{1}{6}(-17 - 2x_2 - x_3 - x_4),\\
x_2 &= \tfrac{1}{5}(-9 - 2x_1 - x_4),\\
x_3 &= \tfrac{1}{5}(-12 + x_1 - x_2 + x_4),\\
x_4 &= \tfrac{1}{5}(12 - 2x_1 - x_2 + x_3)
\end{aligned}$$

a připsáním iteračních indexů dostaneme rekurentní vzorce pro Jacobiho metodu

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{6}(17 + 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + x_4^{(k)}),\\
x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(-9 - 2x_1^{(k)} - x_4^{(k)}),\\
x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(-12 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + x_4^{(k)}),\\
x_4^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}).
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že rekurentní vzorce můžeme zapsat také v maticovém tvaru, který je obzláště výhodný při řešení úlohy pomocí počítačového softwaru.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17}{6} \\ -\frac{9}{5} \\ -\frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}.$$

Protože výpočet konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})^\top$, zvolíme pro jednoduchost

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0\ )^\top.$$

Dosadíme do pravé strany rekurentních vzorců a vypočteme

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\ \tfrac{17}{6},\ \ -\tfrac{9}{5},\ \ -\tfrac{12}{5},\ \ \tfrac{12}{5}\ )^\top.$$

Jestliže takto pokražujeme dále, dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(2)} &= (\ 2.2333,\ \ -3.4133,\ \ -0.9933,\ \ 1.1467\ )^\top,\\
\mathbf{x}^{(3)} &= (\ 1.7211,\ \ -2.9227,\ \ -1.0413,\ \ 1.9907\ )^\top, \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Současně přitom zjišťujeme, zda platí

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R \le 10^{-2},$$

takže postupně počítáme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_R &= \max\{|\tfrac{17}{6} - 2.2333|, |-\tfrac{9}{5} + 3.4133|, |-\tfrac{12}{5} + 0.9933|, |\tfrac{12}{5} - 1.1467|\}\\
&= 2.8333,\\
\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_R &= 1.6133,\\
\|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_R &= 0.8440, \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Výpočet zapíšeme do tabulky:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$\lVert\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\rVert_R$
0	0	0	0	0	—
1	2.8333	−1.8000	−2.4000	2.4000	2.8333
2	2.2333	−3.4133	−0.9933	1.1467	1.6133
3	1.7211	−2.9227	−1.0413	1.9907	0.8440
4	2.0173	−2.8866	−1.0731	2.0878	0.2962
5	2.0403	−3.0245	−1.0017	1.9558	0.1379
6	1.9842	−3.0073	−0.9959	1.9885	0.0561
7	1.9963	−2.9914	−1.0040	2.0086	0.0201
8	2.0036	−3.0003	−1.0007	1.9989	0.0097

Ukončili jsem po osmé iteraci, protože $\lVert\mathbf{x}^{(8)} - \mathbf{x}^{(7)}\rVert_R = 0.0097 \leq 10^{-2}$. Požadovaná přesnost je $\varepsilon = 10^{-2}$, proto jednotlivé souřadnice výsledku zaokrouhlíme na 2 desetinná místa.

Výsledek zapíšeme jako $x_1 = 2.00 \pm 10^{-2}$, $x_2 = -3.00 \pm 10^{-2}$, $x_3 = -1.00 \pm 10^{-2}$, $x_4 = 2.00 \pm 10^{-2}$.

Příklad 3.5: Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} -6x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 16, \\ x_1 & -5x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 3, \\ 2x_1 & -x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & 21, \\ 5x_1 & & -6x_3 & +7x_4 & = & 54. \end{array}$$

pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody s přesností $\varepsilon = 10^{-2}$.

Z teorie víme, že konvergence Gaussovy-Seidelovy metody je zaručena, pokud je matice soustavy ostře diagonálně dominantní (v ostatních případech konvergovat může, ale také nemusí). Pro dosažení takové matice soustavy stačí od čtvrté rovnice odečíst rovnici třetí a dostaneme:

$$\begin{array}{rrrrcr} -6x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 16, \\ x_1 & -5x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 3, \\ 2x_1 & -x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & 21, \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +6x_4 & = & 33. \end{array}$$

Matice soustavy

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

je ostře diagonálně dominantní, neboť absolutní hodnoty prvků na diagonále jsou (ostře) větší než součty absolutních hodnot ostatních prvků na příslušných řádcích, tj. $6 > 2 + 1 + 2$, $5 > 1 + 1 + 2$, $5 > 2 + 1 + 1$ a $6 > 3 + 1 + 1$.

Upravenou soustavu převedeme na iterační tvar

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{1}{6}(16 - 2x_2 - x_3 - 2x_4), \\ x_2 & = & -\frac{1}{5}(3 - x_1 + x_3 - 2x_4), \\ x_3 & = & -\frac{1}{5}(21 - 2x_1 + x_2 - x_4), \\ x_4 & = & \frac{1}{6}(33 - 3x_1 - x_2 + x_3) \end{array}$$

a připsáním iteračních indexů dostaneme rekurentní vzorce pro Gaussovu-Seidelovu metodu

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -\tfrac{1}{6}(16 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 2x_4^{(k)}),\\
x_2^{(k+1)} &= -\tfrac{1}{5}(3 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} - 2x_4^{(k)}),\\
x_3^{(k+1)} &= -\tfrac{1}{5}(21 - 2x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} - x_4^{(k)}),\\
x_4^{(k+1)} &= \tfrac{1}{6}(33 - 3x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)})
\end{aligned}$$

Protože výpočet konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})^\top$, zvolíme pro jednoduchost

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1\ )^\top.$$

Dosadíme do pravé strany rekurentních vzorců a vypočteme

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\ -1.8333,\ \ -0.7667,\ \ -4.58,\ \ 5.7811\ )^\top.$$

Jestliže takto pokražujeme dále, dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(2)} &= (\ -1.7585,\ \ 2.2767,\ \ -4.2025,\ \ 5.2994\ )^\top,\\
\mathbf{x}^{(3)} &= (\ -0.8417,\ \ 2.1919,\ \ -3.9152,\ \ 4.9030\ )^\top, \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Současně přitom zjišťujeme, zda platí

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R \leq 10^{-2},$$

takže postupně počítáme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_R &= \max\{|-1.8333-1|, |-0.7667-1|, |-4.58-1|, |5.7811-1|\}\\
&= 5.58,\\
\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_R &= 3.0434,\\
\|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_R &= 0.9168, \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Výpočet zapíšeme do tabulky:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R$
0	0	0	0	0	—
1	−1.8333	−0.7667	−4.5800	5.7811	5.5800
2	−1.7585	2.2767	−4.2025	5.2994	3.0434
3	−0.8417	2.1919	−3.9152	4.9030	0.9168
4	−0.9542	1.9534	−3.9918	4.9863	0.2385
5	−1.0187	1.9891	−4.0081	5.0098	0.0645
6	−1.0017	2.0052	−3.9998	5.0000	0.0171
7	−0.9982	2.0003	−3.9993	4.9992	0.0049

Ukončili jsem po sedmé iteraci, protože $\|\mathbf{x}^{(7)} - \mathbf{x}^{(6)}\|_R = 0.0049 \leq 10^{-2}$. Požadovaná přesnost je $\varepsilon = 10^{-2}$, proto jednotlivé souřadnice výsledku zaokrouhlíme na 2 desetinná místa.

Výsledek zapíšeme jako $x_1 = -1.00 \pm 10^{-2}$, $x_2 = 2.00 \pm 10^{-2}$, $x_3 = -4.00 \pm 10^{-2}$, $x_4 = 5.00 \pm 10^{-2}$.

KAPITOLA

4

INTERPOLACE A APROXIMACE FUNKCÍ

Příklad 4.1: Pro uzly x_i a funkční hodnoty y_i dané následující tabulkou

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
x_i	-3	-1	0	2	3
y_i	1	0	-1	0	-3

sestavte interpolační polynom v Lagrangeově tvaru.

Interpolační polynom v Lagrangeově tvaru je určen předpisem

$$p(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) + y_3\varphi_3(x) + y_4\varphi_4(x),$$

kde $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ jsou polynomy Lagrangeovy báze dané úlohy:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{(x+1)(x-0)(x-2)(x-3)}{(-3+1)(-3-0)(-3-2)(-3-3)} = \frac{1}{180}x(x+1)(x-2)(x-3),\\
\varphi_0(x) &= \frac{(x+3)(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1+3)(-1-0)(-1-2)(-1-3)} = -\frac{1}{24}x(x+3)(x-2)(x-3),\\
\varphi_0(x) &= \frac{(x+3)(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+3)(0+1)(0-2)(0-3)} = \frac{1}{18}(x+3)(x+1)(x-2)(x-3),\\
\varphi_0(x) &= \frac{(x+3)(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+3)(2+1)(2-0)(2-3)} = -\frac{1}{30}x(x+3)(x+1)(x-3),\\
\varphi_0(x) &= \frac{(x+3)(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+3)(3+1)(3-0)(3-2)} = \frac{1}{72}x(x+3)(x+1)(x-2),
\end{aligned}$$

Dohromady pak dostáváme

$$p(x) = \frac{1}{180}x(x+1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{18}(x+3)(x+1)(x-2)(x-3) - \\ - \frac{1}{24}x(x+3)(x+1)(x-2).$$

Příklad 4.2: Pro uzly x_i a funkční hodnoty y_i dané následující tabulkou

	i=1	i=2	i=3	i=4	
x_i	-3	-1	0	2	3
y_i	1	0	-1	0	-3

sestavte interpolační polynom v Newtonově tvaru.

Interpolační polynom v Newtonově tvaru je určen předpisem

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 + f[x_1,x_0](x-x_0) + f[x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1) + \\ &\quad + f[x_3,x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \\ &\quad + f[x_4,x_3,x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \end{aligned}$$

kde $f[x_1,x_0]$, $f[x_2,x_1,x_0]$, $f[x_3,x_2,x_1,x_0]$ a $f[x_4,x_3,x_2,x_1,x_0]$ jsou poměrné diference 1.,2.,3. a 4. řádu.

Poměrné diference prvního řádu.

Spočítáme všechny poměrného diference prvního řádu podle vzorce:

$$f[x_{i+1},x_i] = \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} \qquad \text{pro} \quad i = 0,1,\ldots,n-1$$

V tomto příkladě je počet uzlů $n = 5$, budou tedy čtyři poměrné diference prvního řádu:

$$\begin{aligned} &\text{pro} \quad i=0 \qquad f[x_1,x_0] = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} = \frac{0-1}{-1-(-3)} = \frac{-1}{2} \\ &\text{pro} \quad i=1 \qquad f[x_2,x_1] = \frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} = \frac{-1-0}{0-(-1)} = -1 \\ &\text{pro} \quad i=2 \qquad f[x_3,x_2] = \frac{f_3-f_2}{x_3-x_2} = \frac{0-(-1)}{2-0} = \frac{1}{2} \\ &\text{pro} \quad i=3 \qquad f[x_4,x_3] = \frac{f_4-f_3}{x_4-x_3} = \frac{-3-0}{3-2} = -3 \end{aligned}$$

Poměrné diference druhého řádu.

Spočítáme všechny poměrného diference druhého řádu podle vzorce:

$$f[x_{i+2},x_{i+1},x_i] = \frac{f[x_{i+2},x_{i+1}] - f[x_{i+1},x_i]}{x_{i+2}-x_i} \qquad \text{pro} \quad i = 0,1,\ldots,n-2$$

Poměrné diference druhého řádu budou tři:

$$\text{pro} \quad i=0 \qquad f[x_2,x_1,x_0] = \frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0} = \frac{-1-\frac{1}{2}}{0-(-3)} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{pro} \quad i=1 \qquad f[x_3,x_2,x_1] = \frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1} = \frac{\frac{1}{2}-(-1)}{2-(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{pro} \quad i=2 \qquad f[x_4,x_3,x_2] = \frac{f[x_4,x_3]-f[x_3,x_2]}{x_4-x_2} = \frac{-3-(-\frac{1}{2})}{3-(-1)} = -\frac{7}{6}$$

Poměrné diference třetího řádu.
Spočítáme všechny poměrného diference třetího řádu podle vzorce:

$$f[x_{i+3},x_{i+2},x_{i+1},x_i] = \frac{f[x_{i+3},x_{i+2},x_{i+1}]-f[x_{i+2},x_{i+1},x_i]}{x_{i+3}-x_i} \qquad \text{pro} \quad i=0,1,\ldots,n-3$$

Poměrné diference třetího řádu budou dvě:

$$\text{pro} \quad i=0 \qquad f[x_3,x_2,x_1,x_0] = \frac{f[x_3,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_0]}{x_3-x_0} = \frac{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{6})}{2-(-3)} = \frac{2}{15}$$

$$\text{pro} \quad i=1 \qquad f[x_4,x_3,x_2,x_1] = \frac{f[x_4,x_3,x_2]-f[x_3,x_2,x_1]}{x_4-x_1} = \frac{-\frac{7}{6}-\frac{1}{2}}{3-(-1)} = -\frac{5}{12}$$

Poměrné diference čtvrtého řádu.
Spočítáme poměrnou diference čtvrtého řádu podle vzorce:

$$f[x_{i+4},x_{i+3},x_{i+2},x_{i+1},x_i] = \frac{f[x_{i+4},x_{i+3},x_{i+2},x_{i+1}]-f[x_{i+3},x_{i+2},x_{i+1},x_i]}{x_{i+4}-x_i} \qquad \text{pro} \quad i=0,1,\ldots,n-4$$

Poměrná diference čtvrého řádu bude jedna:

$$\text{pro} \quad i=0 \qquad f[x_4,x_3,x_2,x_1,x_0] = \frac{f[x_4,x_3,x_2,x_1]-f[x_3,x_2,x_1,x_0]}{x_4-x_0} = \frac{-\frac{5}{12}-\frac{2}{15}}{3-(-3)} = -\frac{11}{120}$$

Poměrných diference lze zapsat do tabulky:

i	x_i	y_i	1.řád	2.řád	3.řád	4.řád
0	-3	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{11}{120}$
1	-1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{12}$	
2	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{6}$		
3	2	0	-3			
4	3	-3				

Interpolační polynom v Newtonově tvaru je určen předpisem:

$$\begin{aligned} p(x) &= f_0 + f[x_1,x_0](x-x_0) + f[x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1) + \\ &\quad + f[x_3,x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \\ &\quad + f[x_4,x_3,x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \end{aligned}$$

Pomocí hodnot vypočtených v prvním řádku tabulky sestavíme interpolační polynom:

$$p(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+3) - \frac{1}{6}(x+1)(x+3) + \frac{2}{15}x(x+1)(x+3) - \frac{11}{120}x(x-2)(x+1)(x+3).$$

Příklad 4.3: Pro uzly x_i a funkční hodnoty y_i dané následující tabulkou

	i=1	i=2	i=3
x_i	-3	-1	1
y_i	1	-1	2

sestavte interpolační polynom:
a) v základním tvaru,
b) v Lagrangeově tvaru,
c) v Newtonově tvaru.

a) Interpolační polynom hledáme ve tvaru $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dosazením do interpolačních požadavků $p(x_i) = y_i$, $i = 0,1,2$ dostaneme

$$\begin{aligned} p(-3) = 1 &\implies & a_0 - 3a_1 + 9a_2 &= 1, \\ p(-1) = -1 &\implies & a_0 - a_1 + a_2 &= -1, \\ p(1) = 2 &\implies & a_0 + a_1 + a_2 &= 2. \end{aligned}$$

Tyto rovnosti představují soustavu lineárních rovnic, kterou je možno zapsat také ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vyřešením dostaneme $a_0 = -\frac{1}{8}$, $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{8}$, takže hledaným interpolační polynom má tvar

$$p(x) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}x^2.$$

b) Interpolační polynom v Lagrangeově tvaru je určen předpisem

$$p(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x),$$

kde $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ jsou polynomy Lagrangeovy báze dané úlohy:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{(x+1)(x-1)}{(-3+1)(-3-1)} = \frac{1}{8}(x+1)(x-1), \\ \varphi_1(x) &= \frac{(x+3)(x-1)}{(-1+3)(-1-1)} = -\frac{1}{4}(x+3)(x-1), \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x+3)(x+1)}{(1+3)(1+1)} = \frac{1}{8}(x+3)(x+1). \end{aligned}$$

Dohromady pak dostáváme

$$p(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-1) + \frac{1}{4}(x+3)(x-1) + \frac{1}{4}(x+3)(x+1).$$

c) Interpolační polynom v Newtonově tvaru je určen předpisem

$$p(x) = y_0 + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1),$$

kde $f[x_1, x_0]$ a $f[x_2, x_1, x_0]$ jsou poměrné diference 1. a 2. řádu. Výpočet poměrných diferencí je proveden v následující tabulce:

i	x_i	y_i	1.řád	2.řád
0	-3	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$
1	-1	-1	$\frac{3}{2}$	
2	1	2		

Pomocí hodnot vypočtených v prvním řádku tabulky sestavíme interpolační polynom:

$$p(x) = 1 - (x+3) + \frac{5}{8}(x+3)(x+1).$$

$$p(x) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}x^2$$
$$p(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-1) + \frac{1}{4}(x+3)(x-1) + \frac{1}{4}(x+3)(x+1)$$
$$p(x) = 1 - (x+3) + \frac{5}{8}(x+3)(x+1)$$

Příklad 4.4: Aproximujte následující data

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
x_i	1	2.5	3	5	7
y_i	0	1	6.5	6	15

přímkou $\varphi(x) = c_1 x + c_2$ metodou nejmenších čtverců.

Pro nalezení nejlepší aproximace ve smyslu nejmenších čtverců je třeba nejprve sestavit normální rovnice. Pokud hledáme aproximaci ve tvaru $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné koeficienty, a v bodech x_i máme předepsané hodnoty y_i, přičemž $i = 1, \ldots, n$, pak mají normální rovnice tvar

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_1(x_i))^2 + c_2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_1(x_i) \\ c_1 \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_2(x_i))^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_2(x_i) \end{aligned}$$

V našem případě je $\varphi_1(x) = x$ a $\varphi_2(x) = 1$ (jedná se o konstantní funkci, která má v každém bodě hodnotu 1). Nyní již soustavu normálních rovnic pro neznámé koeficienty c_1, c_2 snadno zapíšeme.

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^{5} x_i &= \sum_{i=1}^{5} y_i \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=1}^{5} x_i + c_2 \sum_{i=1}^{5} 1 &= \sum_{i=1}^{5} y_i \end{aligned}$$

Vypočítáme jednotlivé součty:

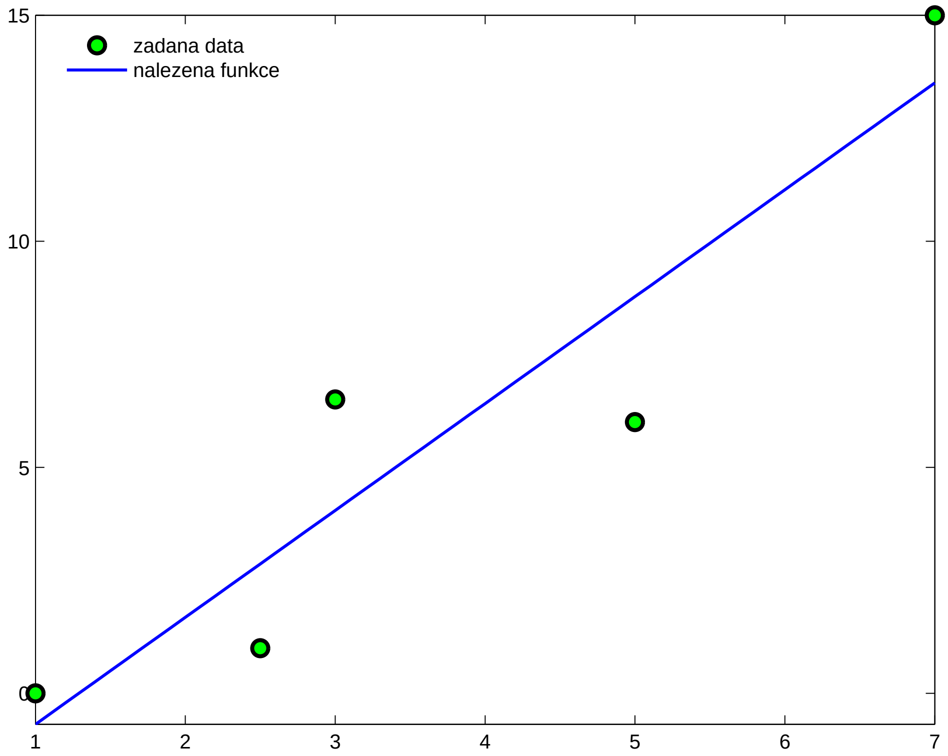
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 &= 1^2 + 2.5^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = \underline{90.25} \\ \sum_{i=1}^{5} x_i &= 1 + 2.5 + 3 + 5 + 7 = \underline{18.5} \\ \sum_{i=1}^{5} y_i \cdot x_i &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2.5 + 6.5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 15 \cdot 7 = \underline{157} \\ \sum_{i=1}^{5} y_i &= 0 + 1 + 6.5 + 6 + 15 = \underline{28.5} \end{aligned}$$

A dosadíme do soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 90.25c_1 + 18.5c_2 &= 157 \\ 18.5c_1 + 5c_2 &= 28.5 \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme a dostaneme koeficienty $c_1 = 2.3647,\ c_2 = -3.0493$.

Nalezená funkce má rovnici $\varphi(x) = 2.3647x - 3.0493$.



Příklad 4.5: Aproximujte následující data

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
x_i	0.2	0.8	4.6	6.2	6.6	11.5	11.8	13.1	14.6	14.9
y_i	29	11	-42	-36	-35	-59	-55	-46	-47	-46

funkcí $\varphi(x) = c_1 \sin x + c_2 \ln x$ metodou nejmenších čtverců.

Pro nalezení nejlepší aproximace ve smyslu nejmenších čtverců je třeba nejprve sestavit normální rovnice. Pokud hledáme aproximaci ve tvaru $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné koeficienty, a v bodech x_i máme předepsané hodnoty y_i, přičemž $i = 1, \ldots, n$, pak mají normální rovnice tvar

$$
\begin{aligned}
c_1 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_1(x_i))^2 + c_2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_1(x_i) \\
c_1 \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_2(x_i))^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_2(x_i)
\end{aligned}
$$

V našem případě je $\varphi_1(x) = \sin x$ a $\varphi_2(x) = \ln x$. Nyní již soustavu normálních rovnic pro neznámé koeficienty c_1, c_2 snadno zapíšeme.

$$
\begin{aligned}
c_1 \sum_{i=1}^{10} \sin^2 x_i + c_2 \sum_{i=1}^{10} \sin x_i \ln x_i &= \sum_{i=1}^{10} y_i \cdot \sin x_i \\
c_1 \sum_{i=1}^{10} \ln x_i \sin x_i + c_2 \sum_{i=1}^{10} \ln^2 x_i &= \sum_{i=1}^{10} y_i \cdot \ln x_i
\end{aligned}
$$

Vypočítáme jednotlivé součty:

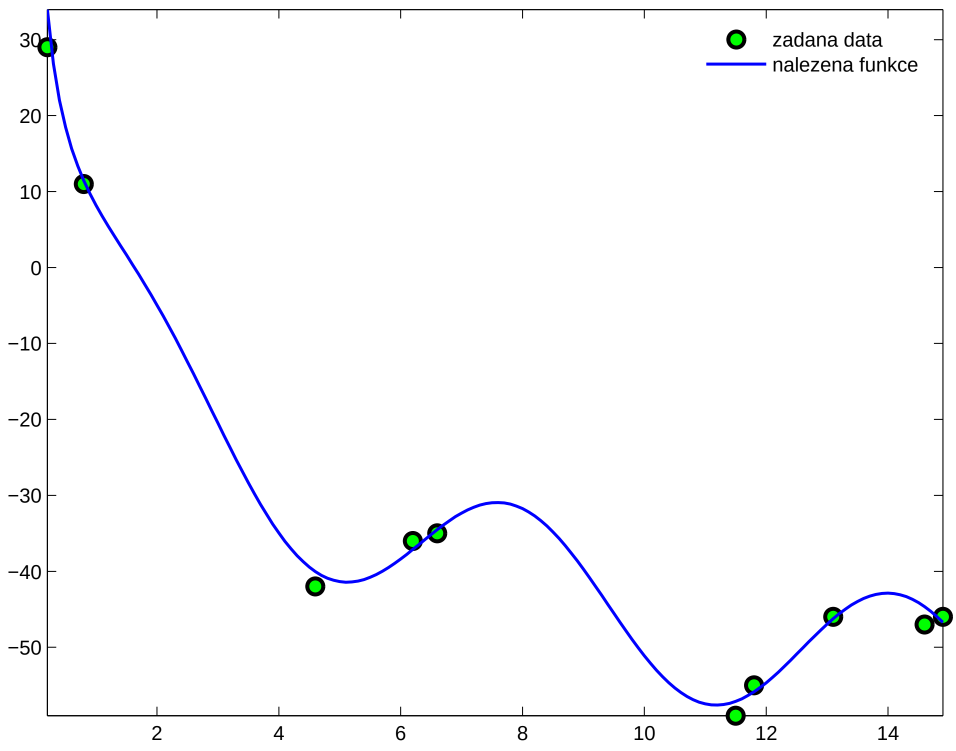
$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} \sin^2 x_i &= \sin^2(0.2) + \sin^2(0.8) + \sin^2(4.6) + \sin^2(6.2) + \sin^2(6.6) + \sin^2(11.5) + \\
&\quad + \sin^2(11.8) + \sin^2(13.1) + \sin^2(14.6) + \sin^2(14.9) = \underline{4.4748} \\
\sum_{i=1}^{10} \sin x_i \ln x_i &= \sin(0.2)\cdot\ln(0.2) + \sin(0.8)\cdot\ln(0.8) + \sin(4.6)\cdot\ln(4.6) + \\
&\quad + \sin(6.2)\cdot\ln(6.2) + \sin(6.6)\cdot\ln(6.6) + \sin(11.5)\cdot\ln(11.5) + \\
&\quad + \sin(11.8)\cdot\ln(11.8) + \sin(13.1)\cdot\ln(13.1) + \sin(14.6)\cdot\ln(14.6) + \\
&\quad + \sin(14.9)\cdot\ln(14.9) = \underline{0.2505} \\
\sum_{i=1}^{10} \ln^2 x_i &= \ln^2(0.2) + \ln^2(0.8) + \ln^2(4.6) + \ln^2(6.2) + \ln^2(6.6) + \ln^2(11.5) + \\
&\quad + \ln^2(11.8) + \ln^2(13.1) + \ln^2(14.6) + \ln^2(14.9) = \underline{45.0191} \\
\sum_{i=1}^{10} y_i \sin x_i &= 29\cdot\sin(0.2) + 11\cdot\sin(0.8) - 42\cdot\sin(4.6) - 36\cdot\sin(6.2) - \\
&\quad - 35\cdot\sin(6.6) - 59\cdot\sin(11.5) - 55\cdot\sin(11.8) - 46\cdot\sin(13.1) - \\
&\quad - 47\cdot\sin(14.6) - 46\cdot\sin(14.9) = \underline{38.564} \\
\sum_{i=1}^{10} y_i \ln x_i &= 29\cdot\ln(0.2) + 11\cdot\ln(0.8) - 42\cdot\ln(4.6) - 36\cdot\ln(6.2) - 35\cdot\ln(6.6) - \\
&\quad - 59\cdot\ln(11.5) - 55\cdot\ln(11.8) - 46\cdot\ln(13.1) - 47\cdot\ln(14.6) \\
&\quad - 46\cdot\ln(14.9) = \underline{-893.4086}
\end{aligned}
$$

A dosadíme do soustavy lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
4.4748c_1 + 0.2505c_2 &= 38.564 \\
0.2505c_1 + 45.0191c_2 &= -893.4086
\end{aligned}
$$

Soustavu vyřešíme a dostaneme koeficienty $c_1 = 9.7321,\ c_2 = -19.8993$.

Nalezená funkce má rovnici $\varphi(x) = 9.7321 \sin x - 19.8993 \ln x$.



Příklad 4.6: Aproximujte následující data

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
x_i	-3	-1	3	4	8
y_i	2	1	5.5	4.4	0.5

pomocí metody nejmenších čtverců nejprve přímkou $\varphi(x) = c_1 x + c_2$ a posléze funkcí $\psi(x) = d_1 \sin x + d_2 \cos x$. Určete, která ze získaných funkcí aproximuje zadaná data lépe.

Nejprve je třeba sestavit normální rovnice. V obou případech jde o aproximaci tvaru $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné koeficienty. Pokud máme v bodech x_i předepsané hodnoty y_i, přičemž $i = 1, \ldots, n$, pak mají normální rovnice tvar

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_1(x_i))^2 + c_2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_1(x_i) \\ c_1 \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_2(x_i))^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_2(x_i) \end{aligned}$$

Po zkušenostech získaných v předchozích úlohách jsme s normálními rovnicemi obeznámeni natolik, že se můžeme podívat, jak vypadá přepis do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} (\varphi_1(x_i))^2 & \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) & \sum_{i=1}^{n} (\varphi_2(x_i))^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_1(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_2(x_i) \end{pmatrix}$$

V prvním případě je $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1$ a ve druhém $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$. Nyní již obě soustavy normálních rovnic snadno zapíšeme.
Aproximace funkcí tvaru $\varphi(x) = c_1 x + c_2$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

Po dosazení hodnot ze zadání dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{pmatrix} 99 & 11 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.1 \\ 13.4 \end{pmatrix}$$

Soustavu vyřešíme a dostaneme koeficienty (zaokrouhleno na 2 desetinná místa) $c_1 = 0.02$, $c_2 = 2.63$.

Nalezená funkce má rovnici $\varphi(x) = 0.02\,x + 2.63$.

Aproximace funkcí tvaru $\psi(x) = d_1 \sin x + d_2 \cos x$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} \sin^2 x_i & \sum_{i=1}^{5} \sin x_i \cos x_i \\ \sum_{i=1}^{5} \cos x_i \sin x_i & \sum_{i=1}^{5} \cos^2 x_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \sin x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \cos x_i \end{pmatrix}$$

Po dosazení hodnot ze zadání dostaneme soustavu rovnic (zaokrouhleno na 2 desetinná místa):

$$\begin{pmatrix} 2.24 & -0.23 \\ -0.23 & 2.76 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.87 \\ -7.63 \end{pmatrix}$$

Soustavu vyřešíme a dostaneme koeficienty (zaokrouhleno na 2 desetinná místa) $c_1 = -1.55$, $c_2 = -3.7$.

Nalezená funkce má rovnici $\psi(x) = -1.55 \sin x - 3.7 \cos x$.

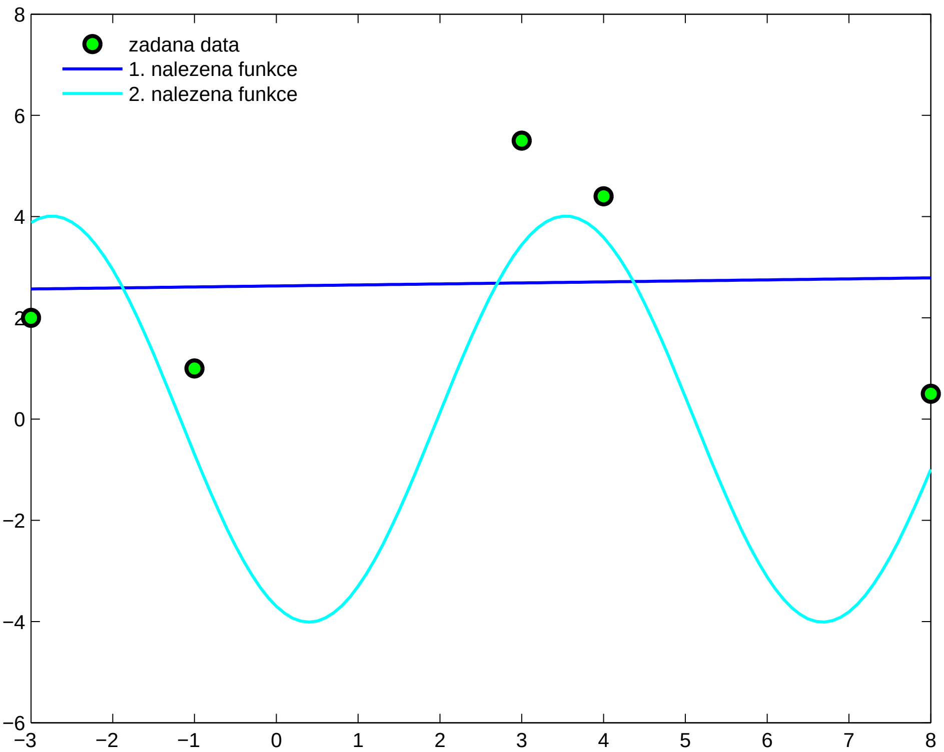
Jak určit, která z aproximací je lepší? Někdy se to zdá být zjevné z obrázku, ale rádi bychom uměli „dobrost“ aproximace měřit exaktně. Principem metody nejmenších čtverců je nalézt takovou funkci určitého tvaru, jejíž součet druhých mocnin (tj. čtverců) rozdílů funkčních hodnot a zadaných hodnot v předepsaných bodech je co nejmenší. Pro měření „dobrosti“ aproximace proto využijeme právě těchto součtů. Čím menší součet dostaneme, tím lepší je aproximace. V případě, že dostaneme soušet nulový, je aproximace ideální a předepsaných bodech nabývá předepsaných hodnot.
Pro aproximaci $\varphi(x)$ dat x_i, y_i, kde $i = 1, \dots, n$, definujeme chybu jako $\sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - y_i)^2$.
Chyba aproximace $\varphi(x) = 0.02x + 2.63$ je proto

$$\sum_{i=1}^{5} (0.02x_i + 2.63 - y_i)^2 = 18.91$$

Chyba aproximace $\psi(x) = -1.55 \sin x - 3.7 \cos x$ je proto

$$\sum_{i=1}^{5} (-1.55 \sin x_i - 3.7 \cos x_i - y_i)^2 = 13.53$$

Protože $13.53 < 18.91$, je lepší aproximací dat funkce $\psi(x)$.



Příklad 4.7: Aproximujte následující data

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7
x_i	0.2	2	2.7	4.5	4.7	7.5	9.3
y_i	0	3.4	3.8	5.8	6.4	6.6	7.1

funkcí $\varphi(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$ metodou nejmenších čtverců.

Pro nalezení nejlepší aproximace ve smyslu nejmenších čtverců je třeba nejprve sestavit normální rovnice. Pokud hledáme aproximaci ve tvaru $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)$, kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné koeficienty, a v bodech x_i máme předepsané hodnoty y_i, přičemž $i = 1, \ldots, n$, pak mají normální rovnice tvar

$$\begin{aligned}
c_1 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_1(x_i))^2 + c_2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) + c_3 \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_3(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_1(x_i) \\
c_1 \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_2(x_i))^2 + c_3 \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_3(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_2(x_i) \\
c_1 \sum_{i=1}^{n} \varphi_3(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_3(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) + c_3 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_3(x_i))^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_3(x_i)
\end{aligned}$$

V našem případě je $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$ a $\varphi_3(x) = 1$ (tj. funkce, která má v každém bodě hodnotu 1). Nyní již soustavu normálních rovnic pro neznámé koeficienty c_1, c_2, c_3 snadno zapíšeme.

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{i=1}^{7} x_i^4 + c_2 \sum_{i=1}^{7} x_i^3 + c_3 \sum_{i=1}^{7} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{7} y_i \cdot x_i^2 \\ c_1 \sum_{i=1}^{7} x_i^3 + c_2 \sum_{i=1}^{7} x_i^2 + c_3 \sum_{i=1}^{7} x_i &= \sum_{i=1}^{7} y_i \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=1}^{7} x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^{7} x_i + c_3 \sum_{i=1}^{7} 1 &= \sum_{i=1}^{7} y_i \end{aligned}$$

Vypočítáme jednotlivé součty:

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^4 = 0.2^4 + 2^4 + 2.7^4 + 4.5^4 + 4.7^4 + 7.5^4 + 9.3^4 = \underline{11611.7589}$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^3 = 0.2^3 + 2^3 + 2.7^3 + 4.5^3 + 4.7^3 + 7.5^3 + 9.3^3 = \underline{1448.71}$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 0.2^2 + 2^2 + 2.7^2 + 4.5^2 + 4.7^2 + 7.5^2 + 9.3^2 = \underline{196.41}$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 0.2 + 2 + 2.7 + 4.5 + 4.7 + 7.5 + 9.3 = \underline{30.9}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{7} y_i \cdot x_i^2 &= 0 \cdot 0.2^2 + 3.4 \cdot 2^2 + 3.8 \cdot 2.7^2 + 5.5 \cdot 4.5^2 + 6.4 \cdot 4.7^2 + 6.6 \cdot 7.5^4 + \\ &+ 7.1 \cdot 9.3^4 = \underline{1285.457} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{7} y_i \cdot x_i &= 0 \cdot 0.2 + 3.4 \cdot 2 + 3.8 \cdot 2.7 + 5.5 \cdot 4.5 + 6.4 \cdot 4.7 + 6.6 \cdot 7.5 + \\ &+ 7.1 \cdot 9.3 = \underline{188.77} \end{aligned}$$

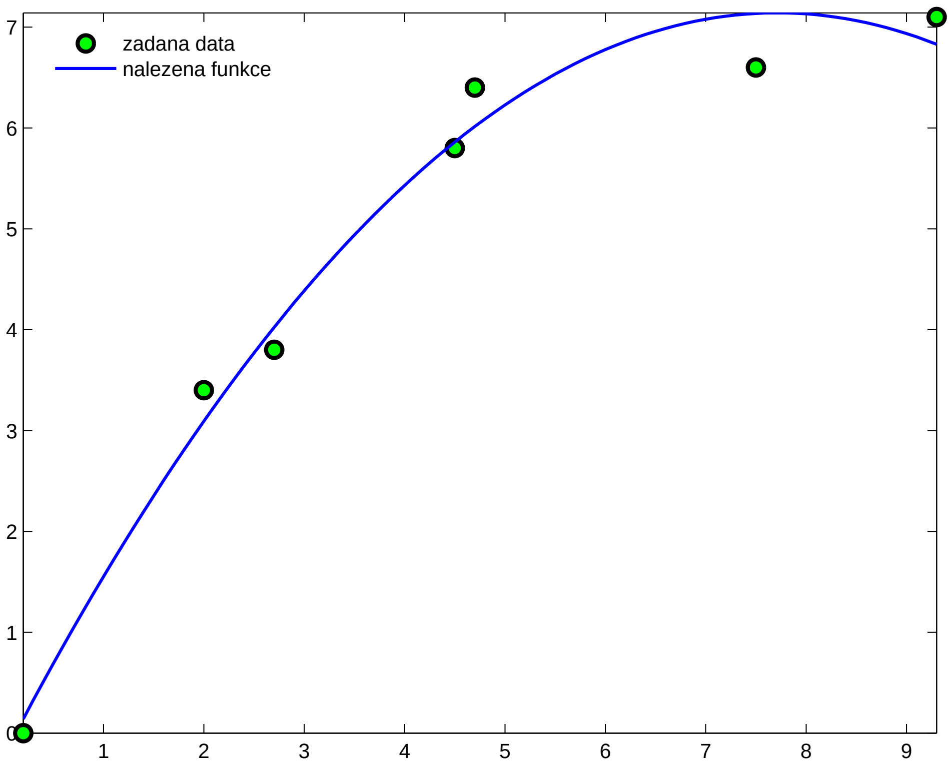
$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 0 + 3.4 + 3.8 + 5.8 + 6.4 + 6.6 + 7.1 = \underline{33.1}$$

A dosadíme do soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 11611.7589c_1 + 1448.71c_2 + 196.41c_3 &= 1285.457 \\ 1448.71c_1 + 196.41c_2 + 30.9c_3 &= 188.77 \\ 196.41c_1 + 30.9c_2 + 7c_3 &= 33.1 \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme a dostaneme koeficienty $c_1 = -0.124$, $c_2 = 1.9131$, $c_3 = -0.2375$.

Nalezená funkce má tvar: $\varphi(x) = -0.124x^2 + 1.9131x - 0.2375$.



Příklad 4.8: Aproximujte následující data

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9
x_i	-2.1	-1.6	-0.3	0.2	0.9	1.4	1.9	2.5	3.1
y_i	4.4	4	3.2	3.3	3.6	3.8	4.7	6	7.9

funkcí $\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 x^2 + c_3$ metodou nejmenších čtverců.

Pro nalezení nejlepší aproximace ve smyslu nejmenších čtverců je třeba nejprve sestavit normální rovnice. Pokud hledáme aproximaci ve tvaru $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)$, kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné koeficienty, a v bodech x_i máme předepsané hodnoty y_i, přičemž $i = 1, \ldots, n$, pak mají normální rovnice tvar

$$\begin{aligned}
c_1 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_1(x_i))^2 + c_2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i)\cdot\varphi_2(x_i) + c_3 \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i)\cdot\varphi_3(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_1(x_i) \\
c_1 \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i)\cdot\varphi_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_2(x_i))^2 + c_3 \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i)\cdot\varphi_3(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_2(x_i) \\
c_1 \sum_{i=1}^{n} \varphi_3(x_i)\cdot\varphi_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_3(x_i)\cdot\varphi_2(x_i) + c_3 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_3(x_i))^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_3(x_i)
\end{aligned}$$

V našem případě je $\varphi_1(x) = e^x$, $\varphi_2(x) = x^2$ a $\varphi_3(x) = 1$ (tj. funkce, která má v každém bodě hodnotu 1). Nyní již soustavu normálních rovnic pro neznámé koeficienty c_1, c_2, c_3 snadno zapíšeme.

$$\begin{aligned}
c_1 \sum_{i=1}^{9} e^{2x_i} + c_2 \sum_{i=1}^{9} x_i^2 e^{x_i} + c_3 \sum_{i=1}^{9} e^{x_i} &= \sum_{i=1}^{9} y_i \cdot e^{x_i} \\
c_1 \sum_{i=1}^{9} e^{x_i} x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^{9} x_i^4 + c_3 \sum_{i=1}^{9} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{9} y_i \cdot x_i^2 \\
c_1 \sum_{i=1}^{9} e^{x_i} + c_2 \sum_{i=1}^{9} x_i^2 + c_3 \sum_{i=1}^{9} 1 &= \sum_{i=1}^{9} y_i
\end{aligned}$$

Vypočítáme jednotlivé součty:

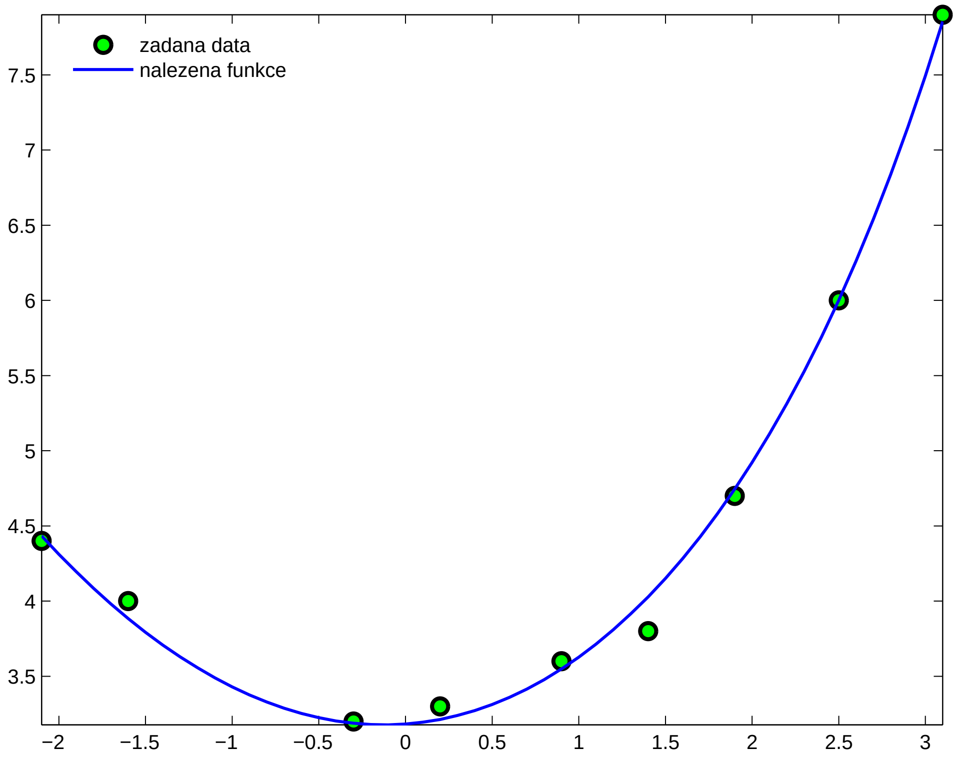
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{9} e^{2x_i} &= e^{-4.2} + e^{-3.2} + e^{-0.6} + e^{0.4} + e^{1.8} + e^{2.8} + e^{3.8} + e^{5} + e^{6.2} = \underline{710.4541} \\
\sum_{i=1}^{9} x_i^2 e^{x_i} &= -2.1 \cdot e^{-2.1} - 1.6 \cdot e^{-1.6} - 0.3 \cdot e^{-0.3} + 0.2 \cdot e^{0.2} + 0.9 \cdot e^{0.9} + \\
&\quad +1.4 \cdot e^{1.4} + 1.9 \cdot e^{1.9} + 2.5 \cdot e^{2.5} + 3.1 \cdot e^{3.1} = \underline{324.7119} \\
\sum_{i=1}^{9} e^{x_i} &= e^{-2.1} + e^{-1.6} + e^{-0.3} + e^{0.2} + e^{0.9} + e^{1.4} + e^{1.9} + e^{2.5} + e^{3.1} = \underline{49.8677} \\
\sum_{i=1}^{9} x_i^4 &= (-2.1)^4 + (-1.6)^4 + (-0.3)^4 + 0.2^4 + 0.9^4 + 1.4^4 + 1.9^4 + 2.5^4 + \\
&\quad +3.1^4 = \underline{174.9558} \\
\sum_{i=1}^{9} x_i^2 &= (-2.1)^2 + (-1.6)^2 + (-0.3)^2 + 0.2^2 + 0.9^2 + 1.4^2 + 1.9^2 + \\
&\quad +2.5^2 + 3.1^2 = \underline{29.34} \\
\sum_{i=1}^{9} y_i \cdot e^{x_i} &= 4.4 \cdot e^{-2.1} + 4 \cdot e^{-1.6} + 3.2 \cdot e^{-0.3} + 3.3 \cdot e^{0.2} + 3.6 \cdot e^{0.9} + 3.8 \cdot e^{1.4} + \\
&\quad +4.7 \cdot e^{1.9} + 6 \cdot e^{2.5} + 7.9 \cdot e^{3.1} = \underline{311.8945} \\
\sum_{i=1}^{9} y_i \cdot x_i^2 &= 4.4 \cdot (-2.1)^2 + 4 \cdot (-1.6)^2 + 3.2 \cdot (-0.3)^2 + 3.3 \cdot 0.2^2 + 3.6 \cdot 0.9^2 + \\
&\quad +3.8 \cdot 1.4^2 + 4.7 \cdot 1.9^2 + 6 \cdot 2.5^2 + 7.9 \cdot 3.1^2 = \underline{170.814} \\
\sum_{i=1}^{9} y_i &= 4.4 + 4 + 3.2 + 3.3 + 3.6 + 3.8 + 4.7 + 6 + 7.9 = \underline{40.9}
\end{aligned}$$

A dosadíme do soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
710.4541c_1 + 324.7119c_2 + 49.8677c_3 &= 311.8945 \\
324.7119c_1 + 174.9558c_2 + 29.34c_3 &= 170.814 \\
49.8677c_1 + 29.34c_2 + 9c_3 &= 40.9
\end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme a dostaneme koeficienty $c_1 = 0.0842$ $c_2 = 0.3004$ $c_3 = 3.0985$.

Nalezená funkce má tvar $\varphi(x) = 0.0842e^x + 0.3004x^2 + 3.0985$.



Příklad 4.9: Aproximujte následující data

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
x_i	-5.2	-4.1	0.7	1.5	1.7	3.6
y_i	-12.3	1.2	-5.6	3.7	3.2	7.8

funkcí $\varphi(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ metodou nejmenších čtverců.

Pro nalezení nejlepší aproximace ve smyslu nejmenších čtverců je třeba nejprve sestavit normální rovnice. Ty bychom mohli v případě aproximace tvaru $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) + c_4\varphi_4(x)$, kde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné koeficienty, sestavit analogickým způsobem, jako v předchozích úlohách. Pokud je koeficientů větší počet, je výhodné uchýlit se k „triku“, který zde popíšeme. Soustavu normálních rovnic totiž můžeme elegantně zapsat v maticovém tvaru. Předpokládejme, že v bodech x_i máme předepsané hodnoty y_i, přičemž $i = 1, \ldots, n$. Definujme následující objekty:

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$$
$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)^\top$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_2^3 & \ldots & x_n^3 \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Pak můžeme soustavu normálních rovnic zapsat jako (není to samozřejmé, ale pravdivost tohoto tvrzení snadno ověříte roznásobením matic)

$$XX^\top \mathbf{c} = X\mathbf{y}$$

Naším cílem je nalézt vektor **c**, čehož dosáhneme vynásobením rovnice zleva inverzní maticí k $XX^\top$, tj.

$$\begin{aligned}(XX^\top)^{-1}XX^\top \mathbf{c} &= (XX^\top)^{-1}X\mathbf{y}\\ \mathbf{c} &= (XX^\top)^{-1}X\mathbf{y}\end{aligned}$$

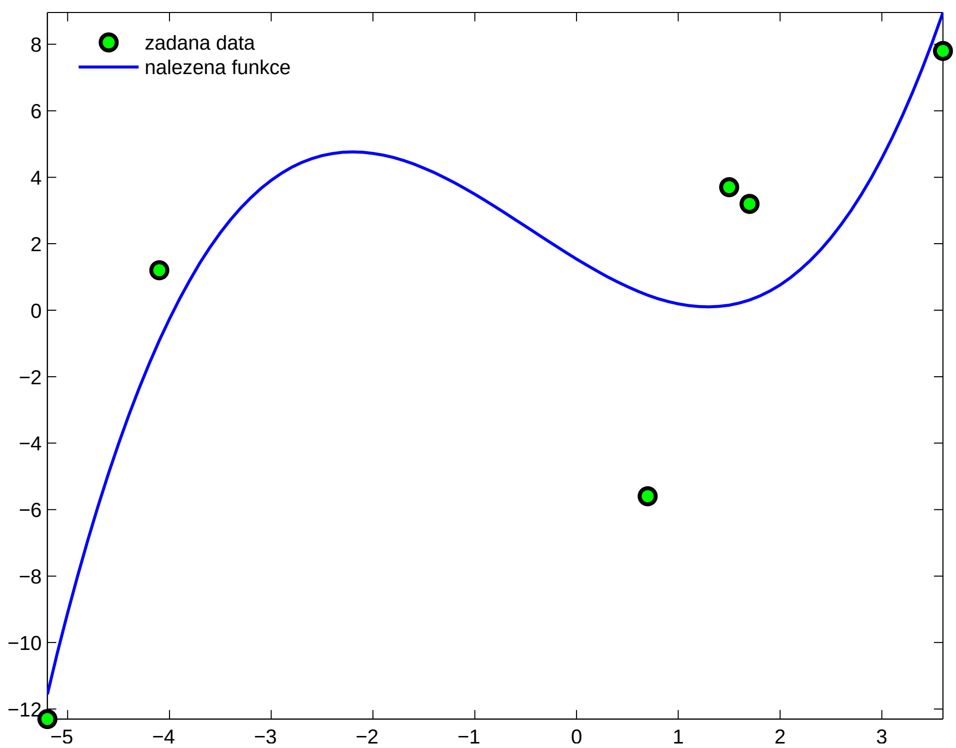
Zbývá nám tedy v zásadě vytvořit matici X a dosadit do předchozího vzorce. Matice X vypadá následovně (její hodnoty jsou zaokrouhleny na 2 desetinná místa)

$$X = \begin{pmatrix} -140.61 & -68.92 & 0.34 & 3.38 & 4.91 & 46.66\\ 27.04 & 16.81 & 0.49 & 2.25 & 2.89 & 12.96\\ -5.20 & -4.10 & 0.70 & 1.50 & 1.70 & 3.60\\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Dosazením do vzorce získáme vektor $\mathbf{c} = (0.22, 0.30, -1.87, 1.54)^\top$ (opět zaokrouhlujeme na 2 desetinná místa).

Hledaná funkce je proto $\varphi(x) = 0.22x^3 + 0.30x^2 - 1.87x + 1.54$.

Na závěr ještě poznamenejme, že uvedený postup lze s drobnou obměnou (matice X mění rozměry) použít pro aproximaci polynomy libovolných řádů.



Příklad 4.10: Aproximujte následující data

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8
x_i	0.3	1.2	2.1	3.3	4.1	5.2	6.3	6.8
y_i	21	7	3	6	13	40	55	61

funkcí $\varphi(x) = ae^{bx}$ metodou nejmenších čtverců.

Zadaná funkce $\varphi(x)$ není ve tvaru $a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x)$, jak jsme byli zvyklí z předchozích úloh. Rozdíl spočívá v tom, že funkce není v proměnných a, b *lineární*. Naším cílem stále zůstává nalézt hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$ takové, aby s co možná nejmenší odchylkou platilo

$$ae^{bx_i} = y_i, \text{ pro } i = 1, \dots, 8.$$

Dohodli jsme se, že minimální odchylkou budeme rozumět takovou, při níž je minimální součet čtverců, tj. veličina

$$\sum_{i=1}^{8} \left(ae^{bx_i} - y_i\right)^2.$$

Pokud bychom se pokusili obvyklým způsobem odvodit normální rovnice, nedostali bychom soustavu lineárních rovnic (zkuste si samostatně!), ale soustavu velmi obtížně řešitelnou. Pomůžeme si proto určitým trikem. Rovnosti, kterých bychom rádi dosáhli, zlogaritmujeme:

$$\begin{aligned} \ln(ae^{bx_i}) &= \ln y_i, \\ \ln e^{bx_i} + \ln a &= \ln y_i, \\ bx_i + \ln a &= \ln y_i. \end{aligned}$$

Tím jsme dostali ekvivalentní soubor podmínek. Pokud zavedeme nové proměnné $c_1 = b$, $c_2 = \ln a$ a $z_i = \ln y_i$ pro $i = 1, \dots, 8$, vypadají podmínky takto

$$c_1 x_i + c_2 = z_i, \text{ kde } i = 1, \dots, 8.$$

Tato nová úloha je ovšem již lineární! Jde v ní o to aproximovat data $[x_i, z_i]$, $i = 1, \dots, 8$, funkcí tvaru $\psi(x) = c_1 x + c_2$, přičemž $c_1 c_2 \in \mathbb{R}$. Toho můžeme docílit metodou nejmenších čtverců, jak jsme ji procvičovali v předchozích úlohách.
Nyní již snadno zapíšeme příslušné normální rovnice:

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^{8} x_i &= \sum_{i=1}^{8} z_i \cdot x_i, \\ c_1 \sum_{i=1}^{8} x_i + c_2 \sum_{i=1}^{8} 1 &= \sum_{i=1}^{8} z_i. \end{aligned}$$

Po vyčíslení jednotlivých součtů dostaneme (zaokrouhlujeme na 2 desetinná místa)

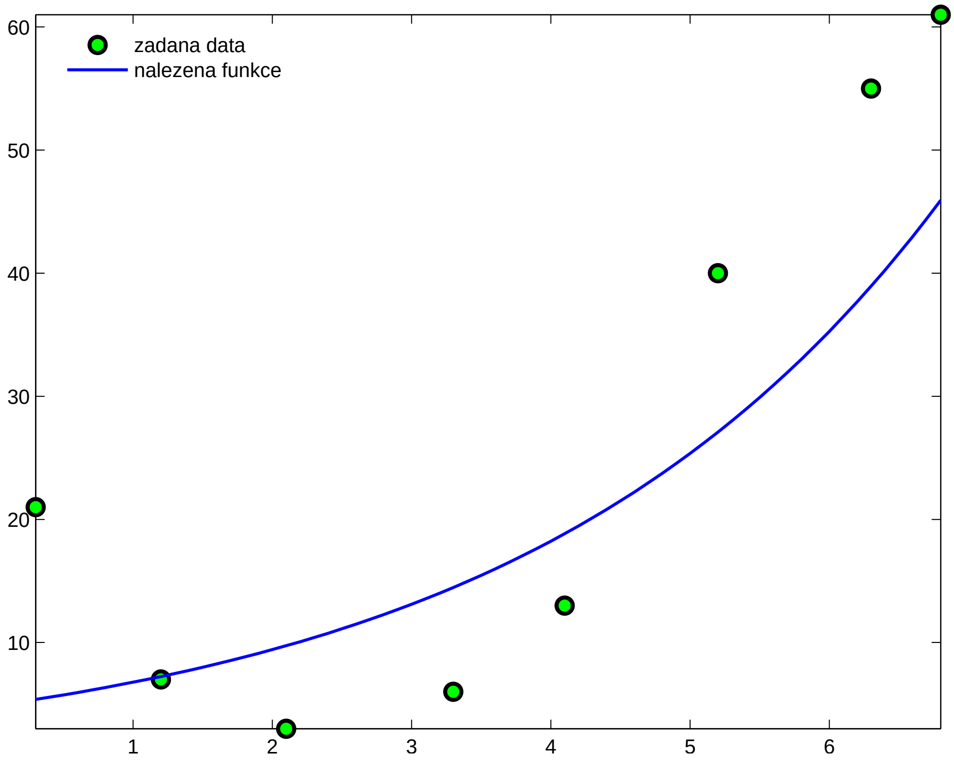
$$\begin{aligned} 146.61c_1 + 29.30c_2 &= 94.37, \\ 29.30c_1 + 8.00c_2 &= 22.25. \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme a dostaneme koeficienty $c_1 = 0.33$, $c_2 = 1.58$. Řešením pomocné úlohy je tedy funkce $\chi(x) = 0.33x + 1.58$.
Pro nalezení řešení původní úlohy se vrátíme zpět k původním neznámým a, b, které zpětným dosazením snadno spočteme

$$\begin{aligned} c_1 &= b \Rightarrow b = c_1 = 0.33, \\ c_2 &= \ln a \Rightarrow a = e^{c_2} = e^{1.58} = 4.87. \end{aligned}$$

Výsledná funkce má tvar $\varphi(x) = 4.87e^{0.33\,x}$.

Poznámka: Výsledný postup je trikem i v tom smyslu, že nám obecně *nedává* nejlepší aproximaci původní úlohy ve smyslu nejmenších čtverců. Tu spočíst by bylo velmi obtížné. Nalezená funkce je však rozumným a dostupným odhadem takové aproximace.



KAPITOLA

5

NUMERICKÉ INTEGROVÁNÍ A DERIVOVÁNÍ

Příklad 5.1: Vypočtěte integrál

$$\int_{-1}^{3} e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

složenou lichoběžníkovou formulí pro $n = 8$.

Spočítáme si h, tj. velikost dílku při dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ na 8 částí

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-(-1)}{8} = 0.5\,.$$

Do tabulky si zapíšeme body dělení $x_0, \ldots, x_8$ a hodnotu integrované funkce v těchto bodech.

i	x_i	$y_i = e^{{x_i}^2}$
0	-1	2.7183
1	-0.5	1.284
2	0	1
3	0.5	1.284
4	1	2.7183
5	1.5	9.4877
6	2	54.5982
7	2.5	518.0128
8	3	8103.0839

Nakonec spočítáme přibližnou hodnotu integrálu:

$$
\begin{aligned}
I_{0.5} &= h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 0.5\left(\frac{y_0+y_8}{2}+\sum_{i=1}^{7} y_i\right) = \\
&= 0.5\left(\frac{2.7183+8103.0839}{2}+1.284+1+1.284+2.7183+9.4877+\right. \\
&\quad \left.+54.5982+518.0128\right) = 0.5\left(\frac{8105.8022}{2}+588.385\right) = 2320.64305.
\end{aligned}
$$

Výsledek je $I_{0.5} = 2320.64305$.

Příklad 5.2:
Vypočtěte integrál

$$\int_{-1}^{3} e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

složenou lichoběžníkovou formulí se zadanou přesností $\varepsilon = 10^{-3}$.

Počítáme integrál složenou lichoběžníkovou formulí pro $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ (tj. násobky čísla 2), dokud je chyba větší než zadaná přesnost, tj. $|I_h - I_{2h}| > \varepsilon$.

n	h	I_h	$\lvert I_h - I_{2h}\rvert$	$\varepsilon = 10^{-3} = 0.001$
2	2	8111.2388	—	
4	1	4111.2176	4000.0212	> 0.001
8	$\frac{1}{2}$	2320.6431	1790.5745	> 0.001
16	$\frac{1}{4}$	1688.9283	631.7148	> 0.001
32	$\frac{1}{8}$	1508.6402	180.2881	> 0.001
64	$\frac{1}{16}$	1461.7928	46.8474	> 0.001
128	$\frac{1}{32}$	1449.9621	11.8307	> 0.001
256	$\frac{1}{64}$	1446.9969	2.9652	> 0.001
512	$\frac{1}{128}$	1446.2551	0.7418	> 0.001
1024	$\frac{1}{256}$	1446.0696	0.1855	> 0.001
2048	$\frac{1}{512}$	1446.0232	0.0464	> 0.001
4096	$\frac{1}{1024}$	1446.0116	0.0116	> 0.001
8192	$\frac{1}{2048}$	1446.0087	0.0029	> 0.001
16384	$\frac{1}{4096}$	1446.0080	0.0007	≤ 0.001

Výsledek:

$$\int_{-1}^{3} e^{x^2}\,\mathrm{d}x = 1446.008 \pm 0.001.$$

Příklad 5.3: Vypočtěte integrál

$$\int_0^2 \operatorname{arctg}^2(x) + x + 1 \, \mathrm{d}x$$

složenou Simpsonovou formulí pro $n = 16$.

Spočítáme si h velikost dílků dělení intervalu $\langle a, b \rangle$,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{16} = 0.125\,.$$

Do tabulky si zapíšeme body dělení $x_0, \ldots, x_{16}$ a hodnotu integrované funkce v těchto bodech.

i	x_i	$y_i = \operatorname{arctg}^2(x_i) + x_i + 1$
0	0	1
1	0.1250	1.1405
2	0.2500	1.3100
3	0.3750	1.5037
4	0.5000	1.7150
5	0.6250	1.9370
6	0.7500	2.1641
7	0.8750	2.3917
8	1	2.6169

i	x_i	$y_i = \operatorname{arctg}^2(x_i) + x_i + 1$
9	1.1250	2.8376
10	1.2500	3.0529
11	1.3750	3.2624
12	1.5000	3.4659
13	1.6250	3.6636
14	1.7500	3.8560
15	1.8750	4.0432
16	2	4.2258

Nakonec spočítáme přibližnou hodnotu integrálu:

$$\begin{aligned} I_{0.125} &= \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4 \cdot S_L + 2 \cdot S_S) = \frac{0.125}{3}\,(y_0 + y_{16} + 4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + \\ &\quad +y_7 + y_9 + y_{11} + y_{13} + y_{15}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{12} + y_{14}) = \\ &\quad = 0.0417 \cdot (5.2258 + 4 \cdot 20.7797 + 2 \cdot 18.1808) = 5.2002. \end{aligned}$$

Výsledek: $I_{0.125} = 5.2002$.

Příklad 5.4:
Vypočtěte integrál

$$\int_0^5 \operatorname{arctg}^2(x) - 2x \, \mathrm{d}x$$

složenou Simpsonovou formulí se zadanou přesností $\varepsilon = 10^{-8}$.

Počítáme integrál složenou Simpsonovou formulí pro $n = 2, 4, 8, 16, \dots$, dokud je chyba větší než zadaná přesnost, tj. $|I_h - I_{2h}| > \varepsilon$.

n	h	I_h	$\|I_h - I_{2h}\|$	$\varepsilon = 10^{-3} = 0.001$
2	2.5	-18.7055080634	—	
4	1.25	-18.8342068359	0.1286987725	$> 10^{-8}$
8	0.625	-18.8981149073	0.0639080714	$> 10^{-8}$
16	0.3125	-18.9021335763	0.0040186690	$> 10^{-8}$
32	0.15625	-18.9021508072	0.0000172309	$> 10^{-8}$
64	0.078125	-18.9021508687	0.0000000615	$> 10^{-8}$
128	0.0390625	-18.9021508726	0.0000000039	$\leq 10^{-8}$

Výsledek:

$$\int_0^5 \operatorname{arctg}^2(x) - 2x \, \mathrm{d}x = -18.90215087 \pm 10^{-8}.$$

Příklad 5.5: Pomocí dvojného přepočtu s extrapolací vypočtěte přibližnou hodnotu integrálu

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos(x)} \, \mathrm{d}x$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$. Použijte složenou lichoběžníkovou formuli.

Označme přibližnou hodnotu integrálu spočtenou pomocí složené lichoběžníkové formule při délce kroku h jako $I(h)$. Metoda dvojného přepočtu s extrapolací nám pro případ složeného lichoběžníkového pravidla dává následující vzorce pro odhad integrálu a odhad chyby při délce kroku h:

$$I_1(h) = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{3} \text{ a } E(h) = \frac{I(h) - I(2h)}{3}.$$

Pro $n = 2, 4, 8, 16, \dots$ postupně počítáme pro jednotlivé kroky hodnoty I, pomocí nich dále určíme hodnoty E. Ve výpočtu pokračujeme, dokud je odhady chyby větší než zadaná přesnost, tj. $|E(h)| > \varepsilon$. Nakonec spočteme hodnotu I_1, kterou prohlásíme za odhad integrálu. Poznamenejme, že výhodou metody dvojného přepočtu s extrapolací oproti standardnímu postupu je její rychlost.

n	h	$I(h)$	$\lvert E(h)\rvert$	$\varepsilon = 10^{-6} = 0.000001$
2	0.5	1.01079488	—	
4	0.25	0.96728553	0.01450312	> 0.000001
8	0.125	0.95599330	0.00376408	> 0.000001
16	0.0625	0.95314108	0.00095074	> 0.000001
32	0.03125	0.95242615	0.00023831	> 0.000001
64	0.015625	0.95224729	0.00005962	> 0.000001
128	0.0078125	0.95220257	0.00001491	> 0.000001
256	0.00390625	0.95219139	0.00000373	> 0.000001
512	0.001953125	0.95218860	0.00000093	≤ 0.000001

Nyní spočteme závěrečnou zpřesněnou aproximaci:

$$I_1(h) = 0.95218860 + \frac{0.95218860 - 0.95219139}{3} = 0.95218767.$$

Výsledek:

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\, \mathrm{d}x = 0.952188 \pm 10^{-6}.$$

Příklad 5.6: Pomocí dvojného přepočtu s extrapolací vypočtěte přibližnou hodnotu integrálu

$$\int_{-1}^{0.8} \frac{x^3 + x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-7}$. Použijte složenou Simpsonovu formuli.

Označme přibližnou hodnotu integrálu spočtenou pomocí složené Simpsonovy formule při délce kroku h jako $I(h)$. Metoda dvojného přepočtu s extrapolací nám pro případ složeného lichoběžníkového pravidla dává následující extrapolační vzorce pro odhad integrálu a odhad chyby při délce kroku h:

$$I_1(h) = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{15} \text{ a } E(h) = \frac{I(h) - I(2h)}{15}.$$

Pro $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ postupně počítáme pro jednotlivé kroky hodnoty I, pomocí nich dále určíme hodnoty E. Ve výpočtu pokračujeme, dokud je odhady chyby větší než zadaná přesnost, tj. $|E(h)| > \varepsilon$. Nakonec spočteme hodnotu I_1, kterou prohlásíme za odhad integrálu. Poznamenejme, že výhodou metody dvojného přepočtu s extrapolací oproti standardnímu postupu je její rychlost.
Je užitečné uvědomit si, že algoritmus nemusíme začít u $n = 2$, ale libovolné vyšší mocniny 2. To má za následek nižší počet kroků vedoucí k dosažení potřebné přesnosti. Začněme tedy například s $n = 8$.

n	h	$I(h)$	$\lvert E(h)\rvert$	$\varepsilon = 10^{-7} = 0.0000001$
8	0.2250	-0.89202663	—	
16	0.1125	-0.88094879	0.00073852	$> 10^{-7}$
32	0.0563	-0.87998697	0.00006412	$> 10^{-7}$
64	0.0281	-0.87991974	0.00000448	$> 10^{-7}$
128	0.0140	-0.87991541	0.00000029	$> 10^{-7}$
256	0.0070	-0.87991513	0.00000002	$\leq 10^{-7}$

Nyní spočteme závěrečnou zpřesněnou aproximaci:

$$I_1(h) = -0.87991513 + \frac{-0.87991513 - (-0.87991541)}{15} = -0.87991511.$$

Výsledek:

$$\int_{-1}^{0.8} \frac{x^3 + x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -0.8799151 \pm 10^{-7}.$$

Poznámka: Protože je integrand $f(x) = \frac{x^3+x}{\cos^2 x}$ lichou funkcí, jsou integrály typu $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ nulové pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Před samotným numerickým výpočtem jsme mohli využít této vlastnosti (společně s aditivitou integrálu vůči integračním mezím):

$$\int_{-1}^{0.8} \frac{x^3+x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-0.8} \frac{x^3+x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{-0.8}^{0.8} \frac{x^3+x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0.8} \frac{x^3+x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + 0 = \int_{-1}^{0.8} \frac{x^3+x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

a integrovat funkci na menším intervalu. Požadované přesnosti bychom pak dosáhli o několik kroků dříve.

Příklad 5.7: Pro funkci

$$f(x) = x^3 - 5x$$

vypočtěte přibližně její první derivaci na intervalu $\langle 1, 2\rangle$ pomocí vzorce

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

s krokem $h = 0.2$.

Pro přibližný výpočet derivace s krokem $h = 0.25$ nejdříve určíme uzly $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, 8$ a v nich vypočítáme funkční hodnoty $f_i = f(x_i)$, viz prní tři sloupce tabulky:
Vzorec pro přibližný výpočet derivace můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = f[x_{i+1}, x_{i-1}],$$

který nám umožní spočítat přibližné hodnoty derivace ve všech vnitřních uzlech.

$$f'(1.2) \approx \frac{1.4^3 - 5\cdot 1.4 - (1^3 - 5\cdot 1)}{2\cdot 0.2} = -0.64,$$
$$f'(1.4) \approx \frac{1.6^3 - 5\cdot 1.6 - (1.2^3 - 5\cdot 1.2)}{2\cdot 0.2} = 0.92,$$
$$f'(1.6) \approx \frac{1.8^3 - 5\cdot 1.8 - (1.4^3 - 5\cdot 1.4)}{2\cdot 0.2} = 2.72,$$
$$f'(1.8) \approx \frac{2^3 - 5\cdot 2 - (1.6^3 - 5\cdot 1.6)}{2\cdot 0.2} = 4.76.$$

Přibližné hodnoty derivace zapíšeme do tabulky.

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f'(x_i)$	–	-0.64	0.92	2.72	4.76	–

Příklad 5.8: Pro funkci
$$f(x) = \sin x^2 + \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4}$$
vypočtěte přibližně její první derivaci na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ pomocí vzorce
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$
s krokem $h = 0.25$ a $h = 0.1$. Výsledky porovnejte s hodnotami přesně vypočítané derivace.

Přesná derivace je určena vzorcem
$$f'(x) = 2x\cos x^2 + \frac{\frac{1+x^4}{1+x^2} - 4x^3 \operatorname{arctg} x}{(1+x^4)^2}.$$

Pro přibližný výpočet derivace s krokem $h = 0.25$ nejdříve určíme uzly $x_i = ih, i = 0, \ldots, 8$ a v nich vypočítáme funkční hodnoty $f_i = f(x_i)$, viz prní tři sloupce tabulky:

	x_i	f_i	$f[x_{i+1}, x_{i-1}]$	$f'(x_i)$	e_i
i=0	0.00	0.0000	-	1.0000	-
i=1	0.25	0.3065	1.3676	1.4213	0.0538
i=2	0.50	0.6838	1.4313	1.5165	0.0852
i=3	0.75	1.0221	1.1008	1.1284	0.0276
i=4	1.00	1.2342	0.4764	0.5452	0.0688
i=5	1.25	1.2603	−0.5880	−0.4570	0.1310
i=6	1.50	0.9402	−2.1600	−2.1948	0.0347
i=7	1.75	0.1803	−3.2637	−3.6746	0.4109
i=8	2.00	−0.6917	-	−2.7254	-

Vzorec pro přibližný výpočet derivace můžeme zapsat ve tvaru
$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = f[x_{i+1}, x_{i-1}],$$

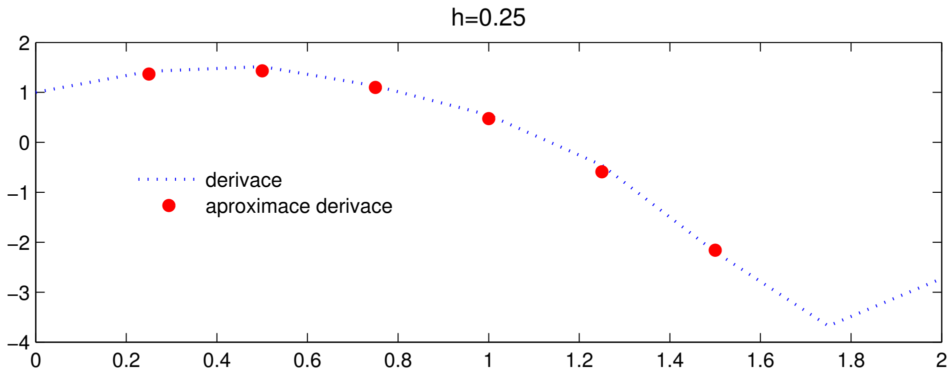
který nám umožní spočítat přibližné hodnoty derivace ve všech vnitřních uzlech, např.

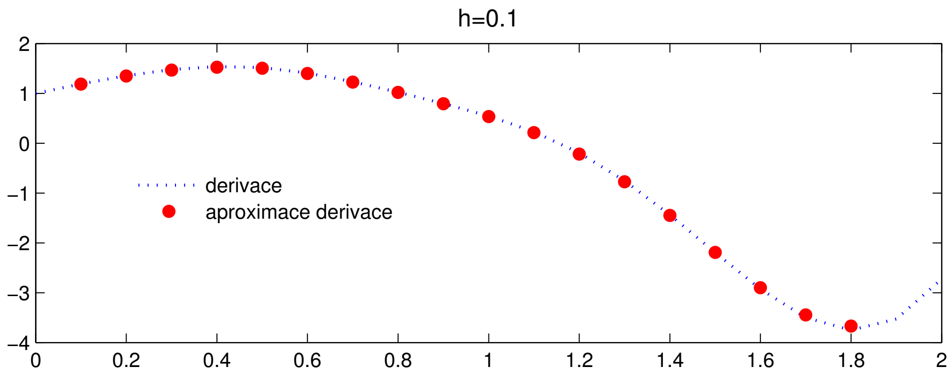
$$f'(0.75) \approx \frac{1.2342 - 0.6838}{2 \cdot 0.25} = 1.1008,$$

viz čtvrtý sloupec tabulky. Pátý sloupec obsahuje přesné hodnoty derivace, které jsou v posledním sloupci porovnány s hodnotami přibližnými

$$e_i = |f[x_{i+1}, x_{i-1}] - f'(x_i)|.$$

Pro $h = 0.1$ je celý postup analogický, dostaneme však přesnější hodnoty, jak ukazují následující obrázky.





Příklad 5.9: Pro funkci

$$f(x) = \sin x^2 + \operatorname{arctg} x$$

vypočtěte přibližně její druhou derivaci na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ pomocí vzorce

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

s krokem $h = 0.25$ a $h = 0.1$. Výsledky porovnejte s přesnými hodnotami.

Přesná druhá derivace je určena vzorcem

$$f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2 - \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Pro přibližný výpočet s krokem $h = 0.25$ nejdříve určíme uzly $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, 8$ a v nich vypočítáme funkční hodnoty $f_i = f(x_i)$, viz prní tři sloupce tabulky:

	x_i	f_i	$2f[x_{i+1}, x_i, x_{i-1}]$	$f''(x_i)$	e_i
i=0	0.00	0.0000	-	2.0000	-
i=1	0.25	0.3074	1.5388	1.5376	0.0012
i=2	0.50	0.7111	0.9942	1.0504	0.0562
i=3	0.75	1.1768	−0.2510	−0.1225	0.1285
i=4	1.00	1.6269	−2.8946	−2.7853	0.1093
i=5	1.25	1.8960	−6.4689	−6.6139	0.1450
i=6	1.50	1.7609	−7.9208	−8.5430	0.6222
i=7	1.75	1.1307	−2.4017	−3.1737	0.7720
i=8	2.00	0.3503	-	10.6416	-

Vzorec pro přibližný výpočet druhé derivace můžeme zapsat ve tvaru

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} = 2f[x_{i+1}, x_i, x_{i-1}],$$

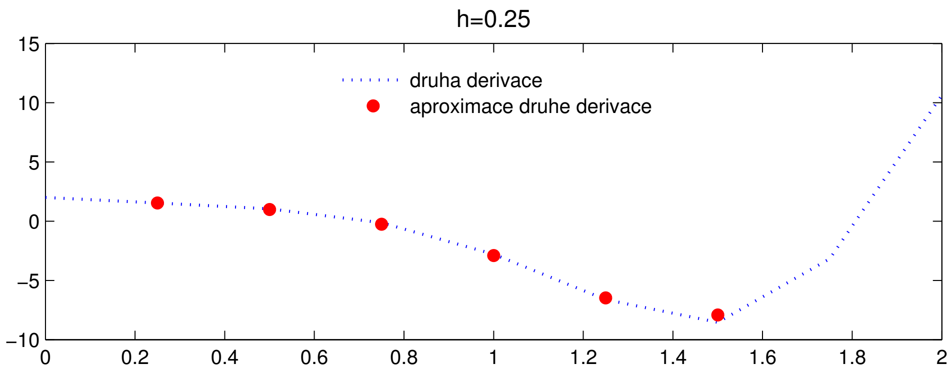
který nám umožní spočítat přibližné hodnoty derivace ve všech vnitřních uzlech, např.

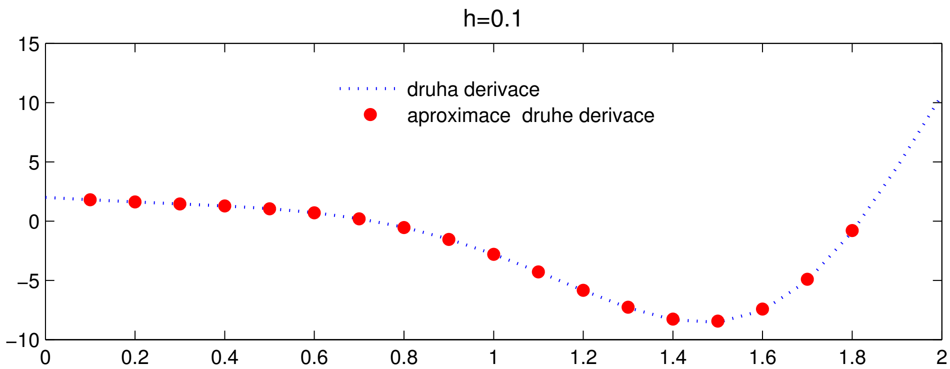
$$f''(0.75) \approx \frac{1.626869 - 2 \cdot 1.176804 + 0.711052}{0.25^2} = -0.2510,$$

viz čtvrtý sloupec tabulky. Pátý sloupec obsahuje přesné hodnoty druhé derivace, které jsou v posledním sloupci porovnány s hodnotami přibližnými

$$e_i = |2f[x_{i+1}, x_i, x_{i-1}] - f''(x_i)|.$$

Pro $h = 0.1$ je celý postup analogický, dostaneme však přesnější hodnoty, jak ukazují následující obrázky.





KAPITOLA

6

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE: POČÁTEČNÍ ÚLOHY

Příklad 6.1: Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y' = (x+y)^2, \qquad y(0) = 0,$$

Eulerovou metodou na intervalu $\langle 0, 1.5 \rangle$ s předepsaným krokem $h = 0.25$.

Nejprve si spočítáme počet dílků dělení intervalu $\langle a, b \rangle$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1.5-0}{0.25} = 6\,.$$

Z počáteční podmínky víme, že $x_0 = 0, , y_0 = 0$.

Spočítáme x_1, y_1 Eulerovou metodou

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25, \\ y_1 &= y_0 + h(x_0 + y_0)^2 = 0 + 0.25(0+0)^2 = 0. \end{aligned}$$

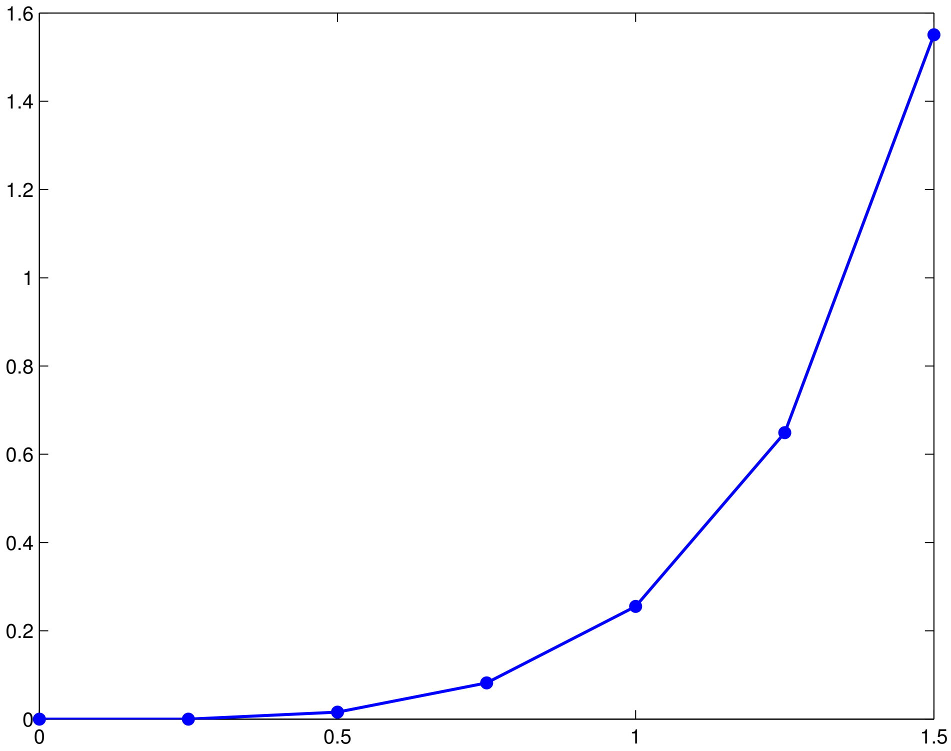
Dále spočítáme x_2, y_2, x_3, y_3

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.5, \\ y_2 &= y_1 + h(x_1 + y_1)^2 = 0 + 0.25(0.25+0)^2 = 0.0156, \\ x_3 &= x_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75, \\ y_3 &= y_2 + h(x_2 + y_2)^2 = 0.0156 + 0.25(0.5 + 0.0156)^2 = 0.0821. \end{aligned}$$

Další přibližné hodnoty řešení $x_4, y_4, \ldots, x_6, y_6$ počítáme obdobně.

Nalezli jsme přibližné hodnoty řešení:

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5
y_i	0	0	0.0156	0.0821	0.2552	0.6491	1.5507



Příklad 6.2: Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y' = \frac{1}{x^2+1} - 0.1\,y, \qquad y(-2) = -1,$$

Eulerovou metodou na intervalu $\langle -2, 3\rangle$ s předepsaným krokem $h = 0.5$.

Nejprve si spočítáme počet dílků dělení intervalu $\langle a, b\rangle$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{3-(-2)}{0.5} = 10\,.$$

Z počáteční podmínky víme, že $x_0 = -2, , y_0 = -1$.

Spočítáme x_1, y_1 Eulerovou metodou:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h = -2 + 0.5 = -1.5, \\ y_1 &= y_0 + h\left(\frac{1}{x_0^2+1} - 0.1\,y_0\right) = -1 + 0.5\left(\frac{1}{(-2)^2+1} - 0.1\,(-1)\right) = -0.85. \end{aligned}$$

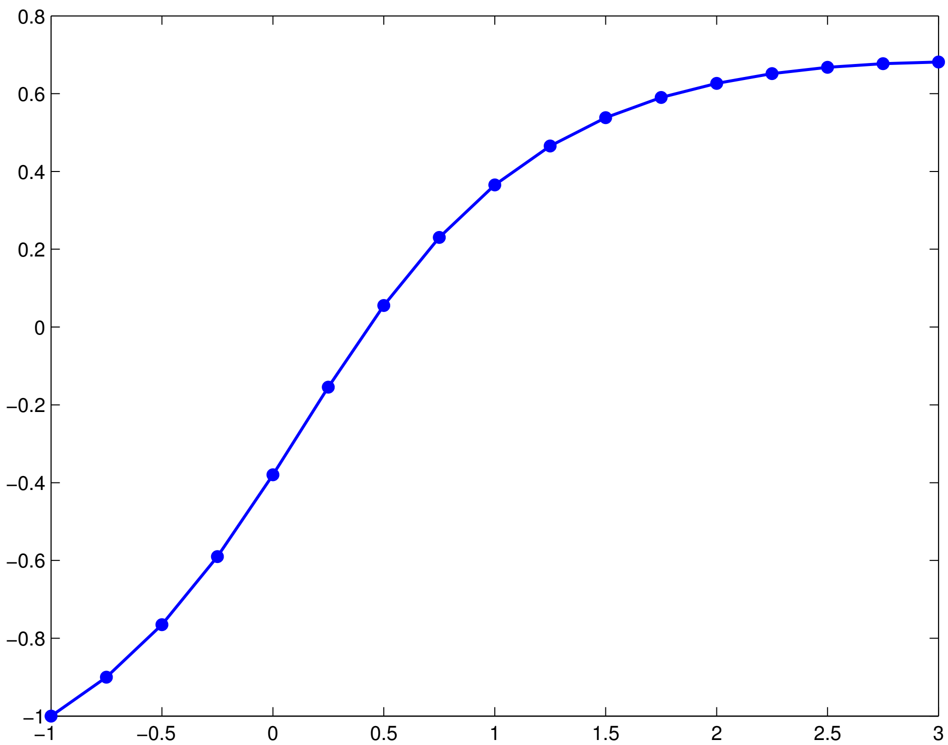
Dále spočítáme x_2, y_2, x_3, y_3

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + h = -1.5 + 0.5 = -1, \\
y_2 &= y_1 + h\left(\frac{1}{x_1^2+1} - 0.1\,y_1\right) = -0.85 + 0.5\left(\frac{1}{(-1.5)^2+1} - 0.1\,(-0.85)\right) = \\
&= -0.6537, \\
x_3 &= x_2 + h = -1 + 0.5 = -0.5, \\
y_3 &= y_1 + h\left(\frac{1}{x_2^2+1} - 0.1\,y_2\right) = -0.6537 + 0.5\left(\frac{1}{(-1)^2+1} - 0.1\,(-0.6537)\right) = \\
&= -0.371.
\end{aligned}
$$

Další přibližné hodnoty řešení $x_4, y_4, \ldots, x_{10}, y_{10}$ počítáme obdobně.

Nalezli jsme přibližné hodnoty řešení:

x_i	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y_i	-1	-0.85	-0.6537	-0.371	0.0476	0.5452	0.9179	1.122	1.2198	1.2588	1.2648



Příklad 6.3: Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y' = (x+y)^2, \qquad y(0) = 0,$$

metodou Runge–Kutta 4. řádu na intervalu $\langle 0, 1.5\rangle$ s předepsaným krokem $h = 0.25$.

Nejprve si spočítáme počet dílků dělení intervalu $\langle a, b\rangle$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1.5-0}{0.25} = 6\,.$$

Z počáteční podmínky víme, že $x_0 = 0, , y_0 = 0$.

Spočítáme x_1, y_1 Runge–Kutta 4. řádu

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) = h \cdot (x_0 + y_0)^2 = 0.25 \cdot (0+0)^2 = 0,\\
k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = h \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_1}{2}\right)^2 =\\
&= 0.25 \cdot \left(0 + \frac{0.25}{2} + 0 + \frac{0}{2}\right)^2 = 0.0039,\\
k_3 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = h \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_2}{2}\right)^2 =\\
&= 0.25 \cdot \left(0 + \frac{0.25}{2} + 0 + \frac{0.0039}{2}\right)^2 = 0.0040,\\
k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = h \cdot (x_0 + h + y_0 + k_3)^2 =\\
&= 0.25 \cdot (0 + 0.25 + 0 + 0.0040)^2 = 0.0161,\\
x_1 &= x_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25\\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) =\\
&= 0 + \frac{1}{6} \cdot (0 + 2 \cdot 0.0039 + 2 \cdot 0.0040 + 0.0161) = 0.0053.
\end{aligned}$$

Dále spočítáme x_2, y_2

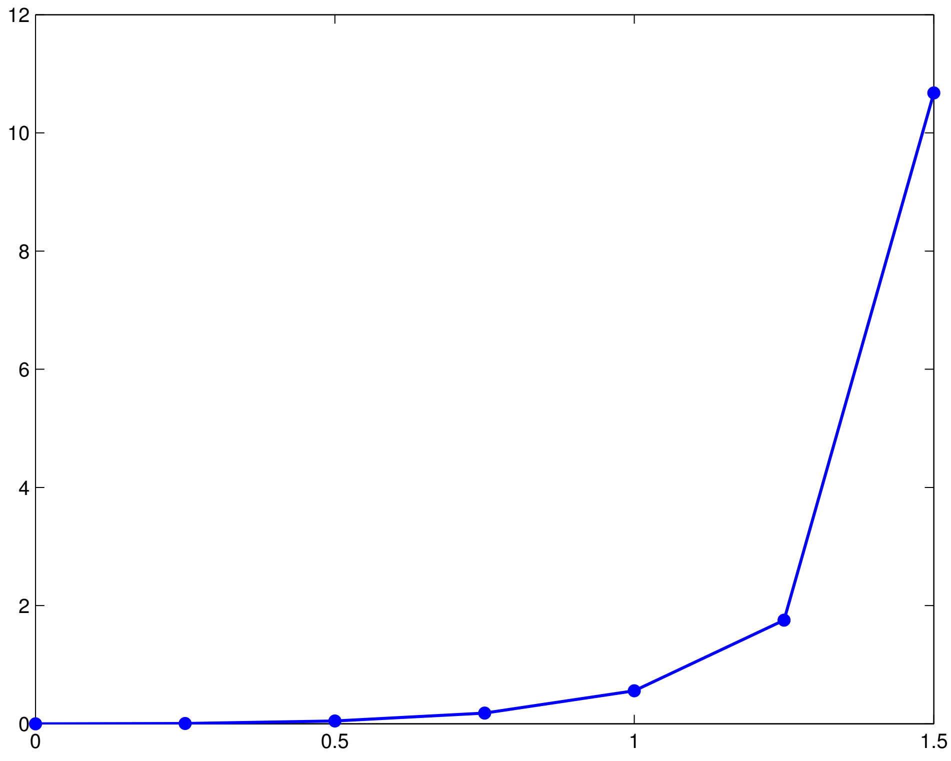
$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_1, y_1) = h \cdot (x_1 + y_1)^2 = 0.25 \cdot (0.25 + 0.0053)^2 = 0.0163,\\
k_2 &= h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = h \cdot \left(x_1 + \frac{h}{2} + y_1 + \frac{k_1}{2}\right)^2 =\\
&= 0.25 \cdot \left(0.25 + \frac{0.25}{2} + 00053 + \frac{0.0163}{2}\right)^2 = 0.0377,\\
k_3 &= h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = h \cdot \left(x_1 + \frac{h}{2} + y_1 + \frac{k_2}{2}\right)^2 =\\
&= 0.25 \cdot \left(0.25 + \frac{0.25}{2} + 0.0053 + \frac{0.0377}{2}\right)^2 = 0.0398,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= h \cdot f\left(x_1 + h, y_1 + k_3\right) = h \cdot \left(x_1 + h + y_1 + k_3\right)^2 = \\
&= 0.25 \cdot (0.25 + 0.25 + 0.0053 + 0.0398)^2 = 0.0743, \\
x_2 &= x_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.5, \\
y_2 &= y_1 + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) = \\
&= 0.0053 + \frac{1}{6} \cdot (0.0163 + 2 \cdot 0.0377 + 2 \cdot 0.0398 + 0.0743) = 0.0463.
\end{aligned}$$

Další přibližné hodnoty řešení $x_3, y_3, \ldots, x_6, y_6$ počítáme obdobně.

Nalezli jsme přibližné hodnoty řešení:

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5
y_i	0	0.0053	0.0463	0.1816	0.5572	1.7534	10.6766



Příklad 6.4: Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y' = \sin(x) \cdot y - x^3 + y, \qquad y(1) = 0,$$

Rungeovou–Kuttovou metodou na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ s předepsaným krokem $h = 0.2$.

Nejprve si spočítáme počet dílků dělení intervalu $\langle a, b \rangle$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{2-1}{0.2} = 5\,.$$

Z počáteční podmínky víme, že $x_0 = 1, , y_0 = 0$.

Spočítáme x_1, y_1 Runge–Kutta 4. řádu

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) = h \cdot \left(\sin(x_0) \cdot y_0 - x_0^3 + y_0\right) = 0.2 \cdot \left(\sin(1) \cdot 0 - 1^3 + 0\right) = \\
&= -0.2, \\
k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = \\
&= h \cdot \left(\sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)^3 + y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = \\
&= 0.2 \cdot \left(\sin\left(1 + \frac{0.2}{2}\right) \cdot \left(0 + \frac{-0.2}{2}\right) - \left(1 + \frac{0.2}{2}\right)^3 + 0 + \frac{-0.2}{2}\right) = -0.304, \\
k_3 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = \\
&= h \cdot \left(\sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(y_0 + \frac{k_2}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)^3 + y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = \\
&= 0.2 \cdot \left(\sin\left(1 + \frac{0.2}{2}\right) \cdot \left(0 + \frac{-0.304}{2}\right) - \left(1 + \frac{0.2}{2}\right)^3 + 0 + \frac{-0.304}{2}\right) = \\
&= -0.3237, \\
k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = \\
&= h \cdot \left(\sin(x_0 + h) \cdot (y_0 + k_3) - (x_0 + h)^3 + y_0 + k_3\right) = \\
&= 0.2 \cdot \left(\sin(1 + 0.2) \cdot (0 - 0.3237) - (1 + 0.2)^3 + 0 - 0.3237\right) = -0.4707, \\
x_1 &= x_0 + h = 1 + 0.2 = 1.2, \\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) = \\
&= 0 + \frac{1}{6} \cdot (-0.2 + 2 \cdot (-0.304) + 2 \cdot (-0.3237) - 0.4707) = -0.321.
\end{aligned}$$

Dále spočítáme x_2, y_2

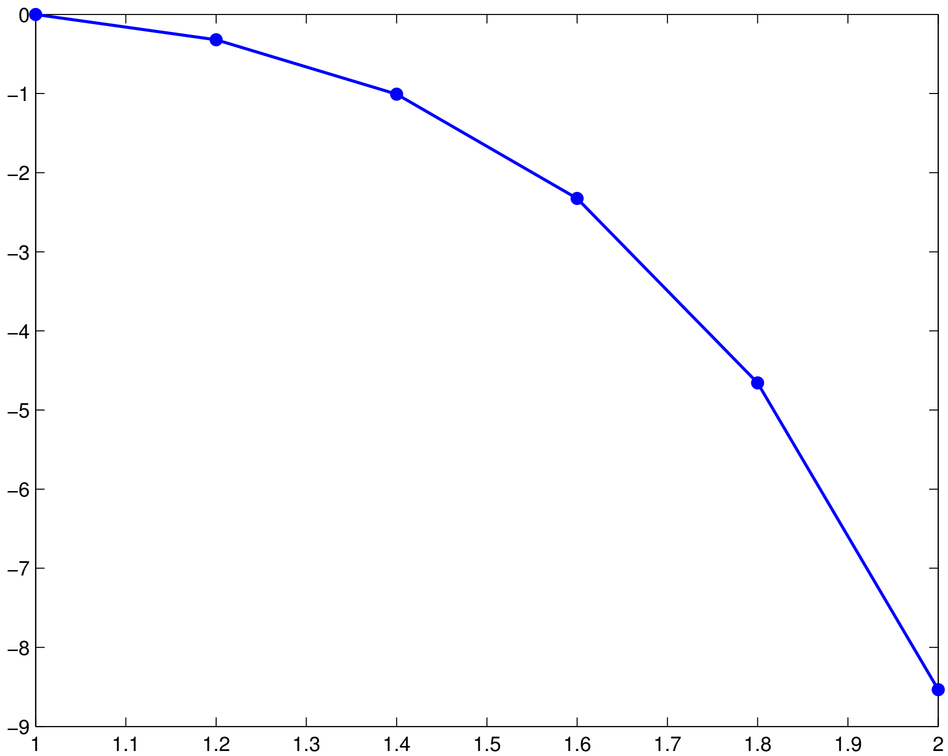
$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_1, y_1) = h \cdot \left(\sin(x_1) \cdot y_1 - x_1^3 + y_1\right) = \\
&= 0.2 \cdot \left(\sin(1.2) \cdot (-0.321) - 1^3 - 0.321\right) = \\
&= -0.4696, \\
k_2 &= h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = \\
&= h \cdot \left(\sin\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(y_1 + \frac{k_1}{2}\right) - \left(x_1 + \frac{h}{2}\right)^3 + y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = \\
&= 0.2 \cdot \left(\sin\left(1.2 + \frac{0.2}{2}\right) \cdot \left(-0.321 + \frac{-0.4696}{2}\right) - \left(1.2 + \frac{0.2}{2}\right)^3 - 0.321 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-0.4696}{2}\right) = -0.6577,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_3 &= h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = \\
&= h \cdot \left(\sin\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(y_1 + \frac{k_2}{2}\right) - \left(x_1 + \frac{h}{2}\right)^3 + y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = \\
&= 0.2 \cdot \left(\sin\left(1.2 + \frac{0.2}{2}\right) \cdot \left(-0.321 + \frac{-0.6577}{2}\right) - \left(1 + \frac{0.2}{2}\right)^3 + 0 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-0.6577}{2}\right) = -0.6946, \\
k_4 &= h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = h \cdot \left(\sin(x_1 + h) \cdot (y_1 + k_3) - (x_1 + h)^3 + y_1 + k_3\right) = \\
&= 0.2 \cdot \left(\sin(1 + 0.2) \cdot (0 - 0.3237) - (1 + 0.2)^3 + 0 - 0.3237\right) = -0.9521, \\
x_2 &= x_1 + h = 1.2 + 0.2 = 1.4, \\
y_2 &= y_1 + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) = \\
&= -0.321 + \frac{1}{6} \cdot (-0.4696 + 2 \cdot (-0.6577) + 2 \cdot (-0.6946) - 0.9521) = -1.0087.
\end{aligned}
$$

Další přibližné hodnoty řešení $x_3, y_3, \ldots, x_5, y_5$ počítáme obdobně.

Nalezli jsme přibližné hodnoty řešení:

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y_i	0	-0.3210	-1.0087	-2.3257	-4.6586	-8.5351



Příklad 6.5: Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y' = \frac{y^2 \ln(x) - y}{x}, \qquad y(1) = 1,$$

Eulerovou metodou i Rungeovou–Kuttovou metodou na intervalu $\langle 1, 2\rangle$ s předepsaným krokem $h = 0.2$. Řešení porovnejte.

Nejprve spočítáme diferenciální rovnice Eulerovou metodou. Spočítáme počet dílků dělení intervalu $\langle a, b\rangle$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{2-1}{0.2} = 5\,.$$

Z počáteční podmínky víme, že $x_0 = 1, , y_0 = 1$.

Spočítáme x_1, y_1 Eulerovou metodou

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h = 1 + 0.2 = 1.2, \\ y_1 &= y_0 + h\frac{y_0^2 \ln x_0 - y_0}{x_0} = 1 + 0.2\frac{1^2 \ln 1 - 1}{1} = 0.8. \end{aligned}$$

Dále spočítáme x_2, y_2, x_3, y_3

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h = 1.2 + 0.2 = 1.4, \\ y_2 &= y_1 + h\frac{y_1^2 \ln x_1 - y_1}{x_1} = 0.8 + 0.2\frac{0.8^2 \ln 1.2 - 0.8}{1.2} \\ &= 0.6861, \\ x_3 &= x_2 + h = 1.4 + 0.2 = 1.6, \\ y_3 &= y_2 + h\frac{y_2^2 \ln x_2 - y_2}{x_2} = 0.6861 + 0.2\frac{0.6861^2 \ln 1.4 - 0.6861}{1.4} \\ &= 0.6107, \end{aligned}$$

Další přibližné hodnoty řešení x_4, y_4, x_5, y_5 počítáme obdobně.
Nalezli jsme přibližné hodnoty řešení:

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y_i	1	0.8	0.6861	0.6107	0.5563	0.5147

Nyní vyřešíme diferenciální rovnice Rungeovou–Kuttovou metodou. Nejprve si spočítáme počet dílků dělení intervalu $\langle a, b\rangle$:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{2-1}{0.2} = 5\,.$$

Z počáteční podmínky víme, že $x_0 = 1, , y_0 = 1$.

Spočítáme x_1, y_1 Runge–Kutta 4. řádu:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) = h \cdot \frac{y_0^2 \ln(x_0) - y_0}{x_0} = 0.2 \cdot \frac{1^2 \ln(1) - 1}{1} = -0.2 \\
k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = h \cdot \frac{\left(y_0 + \frac{k1}{2}\right)^2 \ln\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - \left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right)}{x_0 + \frac{h}{2}} = \\
&= 0.2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{0.2}{2}\right)^2 \ln\left(1 + \frac{0.2}{2}\right) - \left(1 - \frac{0.2}{2}\right)}{1 + \frac{0.2}{2}} = -0.1496 \\
k_3 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = h \cdot \frac{\left(y_0 + \frac{k2}{2}\right)^2 \ln\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - \left(y_0 + \frac{k_2}{2}\right)}{x_0 + \frac{h}{2}} = \\
&= 0.2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{0.1496}{2}\right)^2 \ln\left(1 + \frac{0.2}{2}\right) - \left(1 - \frac{0.1496}{2}\right)}{1 + \frac{0.2}{2}} = -0.1534 \\
k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = h \cdot \frac{(y_0 + k_3)^2 \ln(x_0 + h) - (y_0 + k_3)}{x_0 + h} = \\
&= 0.2 \cdot \frac{(1 - 0.1534)^2 \ln(1 + 0.2) - (1 - 0.1534)}{1 + 0.2} = -0.1193 \\
x_1 &= x_0 + h = 1 + 0.2 = 1.2 \\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) = \\
&= 1 + \frac{1}{6} \cdot (-0.2 + 2 \cdot (-0.1496) + 2 \cdot (-0.1534) - 0.1193) = 0.8458
\end{aligned}$$

Dále spočítáme x_2, y_2:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_1, y_1) = h \cdot \frac{y_1^2 \ln(x_1) - y_1}{x_1} = 0.2 \cdot \frac{0.8458^2 \ln(1.2) - 0.8458}{1.2} = -0.1192 \\
k_2 &= h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = h \cdot \frac{\left(y_1 + \frac{k1}{2}\right)^2 \ln\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) - \left(y_1 + \frac{k_1}{2}\right)}{x_1 + \frac{h}{2}} = \\
&= 0.2 \cdot \frac{\left(0.8458 - \frac{0.1192}{2}\right)^2 \ln\left(1.2 + \frac{0.2}{2}\right) - \left(0.8458 - \frac{0.1192}{2}\right)}{1.2 + \frac{0.2}{2}} = -0.0960 \\
k_3 &= h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = h \cdot \frac{\left(y_1 + \frac{k2}{2}\right)^2 \ln\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) - \left(y_1 + \frac{k_2}{2}\right)}{x_1 + \frac{h}{2}} = \\
&= 0.2 \cdot \frac{\left(0.8458 - \frac{0.0960}{2}\right)^2 \ln\left(1.2 + \frac{0.2}{2}\right) - \left(0.8458 - \frac{0.0960}{2}\right)}{1.2 + \frac{0.2}{2}} = -0.0970
\end{aligned}$$

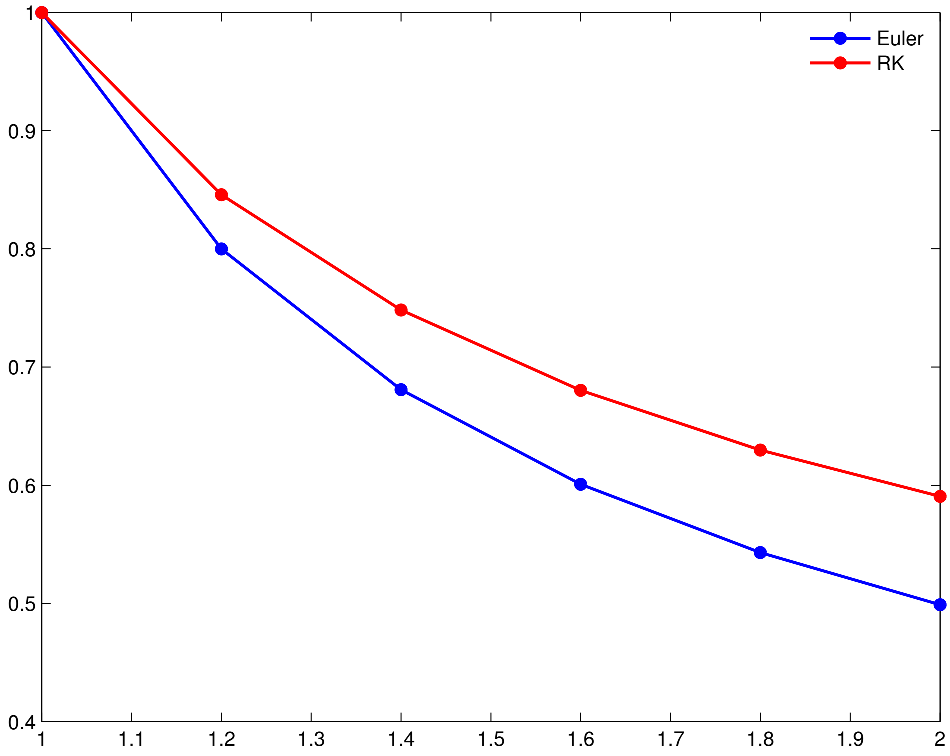
$$
\begin{aligned}
k_4 &= h \cdot f\left(x_1+h, y_1+k_3\right) = h \cdot \frac{\left(y_1+k_3\right)^2 \ln\left(x_1+h\right)-\left(y_1+k_3\right)}{x_1+h} = \\
&= 0.2 \cdot \frac{(0.8458-0.0970)^2 \ln(1.2+0.2)-(0.8458-0.0970)}{1.2+0.2} = -0.08 \\
x_2 &= x_1+h = 1.2+0.2 = 1.4 \\
y_2 &= y_1+\frac{1}{6} \cdot\left(k_1+2 \cdot k_2+2 \cdot k_3+k_4\right) = \\
&= 0.8458+\frac{1}{6} \cdot(-0.1192+2 \cdot(-0.0960)+2 \cdot(-0.0970)-0.08) = 0.7482
\end{aligned}
$$

Další přibližné hodnoty řešení $x_3, y_3, \ldots, x_5, y_5$ počítáme obdobně.
Nalezli jsme přibližné hodnoty řešení:

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y_i	1	0.8458	0.7482	0.6803	0.6298	0.5906

Nalezli jsme přibližné hodnoty řešení:

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
Euler y_i	1	0.8	0.6861	0.6107	0.5563	0.5147
RK y_i	1	0.8458	0.7482	0.6803	0.6298	0.5906



LITERATURA

Základní doporučená literatura

[1] GILAT, Amos a Vish SUBRAMANIAM. *Numerical methods for engineers and scientists: an introduction with applications using MATLAB*. 2nd ed. Hoboken, N.J.: Wiley, 2011, xvi, 495 p. ISBN 9780470565155.

[2] KUČERA, Radek. *Numerické metody*. 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006, 132 s. ISBN 80-248-1198-7. Dostupné z: `http://mdg.vsb.cz/portal/nm/nm.pdf`.

[3] WOODFORD, Chris a Chris PHILLIPS. *Numerical methods with worked examples: Matlab edition*. 2nd ed. New York: Springer, 2012, x, 256 p. ISBN 9789400713666.

Doplňková literatura

[4] FIEDLER, Miroslav. *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981, 266 s. Teoretická knižnice inženýra.

[5] HAMMING, R. *Numerical methods for scientists and engineers*. 2nd ed. New York: Dover, 1973, ix, 721 p. ISBN 0486652416.

[6] MÍKA, Stanislav. *Numerické metody algebry*. 2., nezm. vyd. Praha: SNTL, 1985, 169 s. Matematika pro vysoké školy technické.

[7] PŘIKRYL, Petr. *Numerické metody matematické analýzy: vysokoškolská příručka pro vysoké školy technické*. 2. nezm. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988, 187 s. Matematika pro vysoké školy technické.

[8] RALSTON, Anthony. *Základy numerické matematiky: příručka pro univerzity ČSR*. 2. čes. vyd. Praha: Academia, 1978, 635, [1] s.

[9] SÜLI, Endre a David MAYERS. *An introduction to numerical analysis*. New York: Cambridge University Press, 2003, x, 433 p. ISBN 0521007941.

[10] TEODORESCU, P, Nicolae-Doru STĂNESCU a Nicolae PANDREA. *Numerical analysis with applications in mechanics and engineering*. Hoboken, NJ: Wiley, 2013, xi, 633 pages. ISBN 9781118077504.

[11] WALLISCH, Pascal. *MATLAB for neuroscientists: an introduction to scientific computing in MATLAB*. Burlington: Elsevier, 2009, xiv, 384 s., [8] s. obr. příl. ISBN 978-0-12-374551-4.

[12] VITÁSEK, Emil. *Numerické metody*. Praha: SNTL, 1987.

Název: Numerická matematika: Banka řešených příkladů

Katedra: Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Autoři: Radek Kučera, Pavel Ludvík, Zuzana Morávková

Místo, rok, vydání: Ostrava, 2016, 1. vydání

Počet stran: 79

Vydala: Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava

Neprodejné

ISBN 978-80-248-3894-6