VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

evropský
sociální
fond v ČR

ZÁKLADY GEOMETRIE

Jiří Doležal

Vytvořeno v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů
CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016
Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

ISBN 80-248-1202-9

Obsah

STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA

je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s.r.o. v Mostě, Univerzita obrany v Brně a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5.1.2006 a bude ukončen 4.1.2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si mohou doplnit získané vědomosti. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese http://www.studopory.vsb.cz/.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděčni, pokud nás na ně upozorníte.

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

POKYNY KE STUDIU

Pro zvýraznění jednotlivých částí textu jsou používány ikony a barevné odlišení, jejichž význam nyní objasníme.

Výklad

označuje samotný výklad učiva dané části.

Řešené úlohy

označují vzorové příklady, které jsou těžištěm práce.

Příklad: uvádí zadání příkladu.

Literatura

obsahuje seznam knih, které byly použity při tvorbě příslušného textu a na které byly případně uvedeny odkazy k hlubšímu prostudování tématu.

Úvod

- předkládaný studijní materiál je spíše sbírkou komfortně řešených úloh než souvislým učebním textem
- jednotlivé úlohy jsou přitom řešeny metodou krok po kroku, tj. od zadání až po řešení je vyrýsována série několika obrázků opatřených vysvětlujícím komentářem
- učební látka je rozdělena do dvou kapitol: Planimetrie a Stereometrie; v každé z nich je stručně a heslovitě připojena potřebná teorie
- v kapitole Planimetrie jsou řešeny především konstrukční úlohy, v nichž se užívají množiny všech bodů dané vlastnosti, mocnost bodu ke kružnici a geometrická zobrazení v rovině
- v kapitole Stereometrie je ukázáno řešení rovinných řezů na hranatých tělesech a konstrukce průniku přímky s daným tělesem
- pro pohodlí čtenářovo je připojen dodatek s názvem Pracovní listy, v němž jsou sebrána zadání všech 26 úloh vyřešených v předchozí části
- na závěr je uveden přehled užité literatury a rejstřík významných pojmů
- na webových stránkách projektu (http://www.studopory.vsb.cz/) lze najít interaktivní verzi těchto materiálů včetně 9 virtuálních 3D modelů ke stereometrickým úlohám, další aktuální informace a řadu dokumentů ve formátu PDF volně ke stažení...

Planimetrie

Tematický obsah

- Množiny všech bodů dané vlastnosti
    - Základní množiny všech bodů dané vlastnosti, Řešené úlohy
- Mocnost bodu ke kružnici
    - Definice a základní vlastnosti, Chordála a potenční střed, Řešené úlohy
- Geometrická zobrazení
    - Posunutí, Otočení, Středová souměrnost, Osová souměrnost, Stejnolehlost

1. Konstrukční planimetrické úlohy

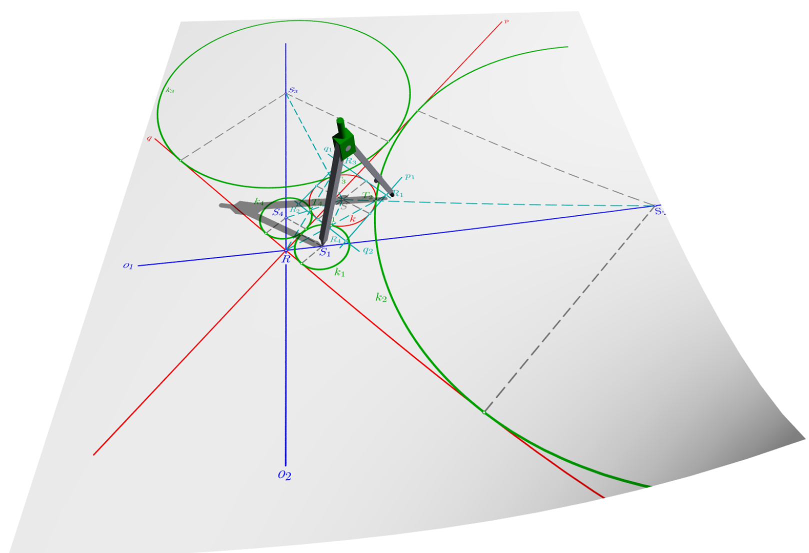
Výklad

- v rámci tohoto studijního materiálu byly zpracovány zejména **řešené konstrukční úlohy**
- v těchto úlohách jde především o to sestrojit (zkonstruovat) předepsaný geometrický útvar, který bude mít požadované vlastnosti
- přitom jsou užívány výhradně tzv. **eukleidovské konstrukce** pomocí pravítka a kružítka
- části postupu řešení konstrukční úlohy:
    1. **Rozbor:** předpokládáme, že úloha je vyřešená, načrtneme ilustrační obrázek a snažíme se najít vztahy mezi danými a hledanými útvary

2. **Konstrukce:** na základě rozboru sestavíme **postup konstrukce** a podle něj provedeme konstrukci **graficky** (v předkládaném studijním materiálu je prováděna přímo grafická konstrukce krok po kroku opatřená vysvětlujícím komentářem)
3. **Zkouška:** kontrola správnosti konstrukce
4. **Diskuze:** v této části se stanovují podmínky řešitelnosti úlohy a **počet řešení** podle vzájemné polohy zadaných prvků; přitom postupujeme tak, že procházíme jednotlivé kroky konstrukčního postupu a zkoumáme počet možných řešení těchto jednotlivých kroků (u některých úloh je diskuze přenechána čtenáři jako cvičení)

2. Apolloniovy a Pappovy úlohy

Výklad



- větší část zde řešených úloh patří mezi tzv. **Apolloniovy** a **Pappovy úlohy**
- zadání tzv. **obecné Apolloniovy úlohy**: sestrojte kružnici, která se dotýká tří daných kružnic
- připustíme-li v obecné Apolloniově úloze dotyk hledané kružnice také s přímkami případně procházení body, dostaneme sérii **desíti** tzv. **Apolloniových úloh**: *BBB, BBp, BBk, Bpp, Bpk, Bkk, ppp, ppk, pkk, kkk* (B – bod, p – přímka, k – kružnice)

- v rámci těchto studijních materiálů byly vyřešeny následující Apolloniovy úlohy: BBB (viz strana 15), BBp (strana 46), BBk (strana 51), Bpp - varianta rovnoběžky (strana 59), Bpp - varianta různoběžky (strana 87), ppp (strana 18), ppk - varianta rovnoběžky (strana 39), ppk - varianta různoběžky (strana 96)

- speciálním případem Apolloniových úloh jsou **úlohy Pappovy**: dvěma ze tří daných útvarů jsou vždy přímka nebo kružnice s daným bodem dotyku

- takto lze získat sérii šesti Pappových úloh: *BBp, BBk, Bpp, Bkk, Bpk, Bkp*

- v rámci těchto studijních materiálů byly vyřešeny následující Pappovy úlohy: BBp (strana 31), Bpk (strana 91), Bkp (strana 34)

- komplexně zpracované řešení všech Apolloniových a Pappových úloh je podáno např. v diplomové práci Evy Patákové
(viz `http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/uvod/uvod.html`)

3. Množiny všech bodů dané vlastnosti

3.1. Základní množiny všech bodů dané vlastnosti v rovině

Výklad

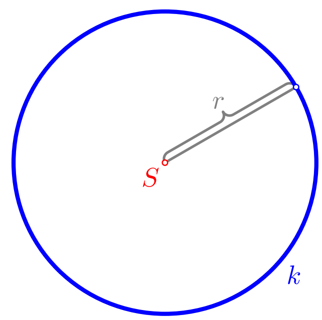
- **množinou** M **všech bodů dané vlastnosti** V rozumíme takový geometrický útvar G, jehož body splňují následující dvě podmínky:

  1. každý bod útvaru G má danou vlastnost V
  2. každý bod, který má danou vlastnost V, je bodem útvaru G

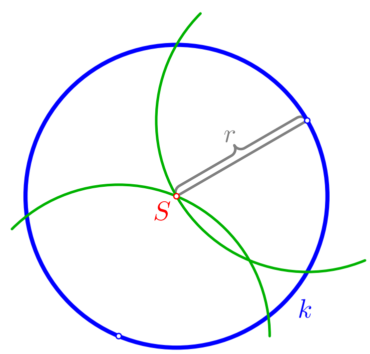
Přehled nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti v rovině

$M1$

- množina všech bodů, které mají od daného bodu S danou vzdálenost r, je **kružnice** $k(S, r)$

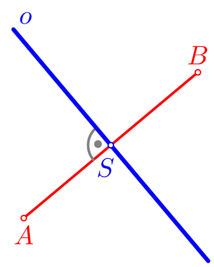


- tato kružnice je také množinou všech středů kružnic, jež mají daný poloměr r a procházejí daným bodem S

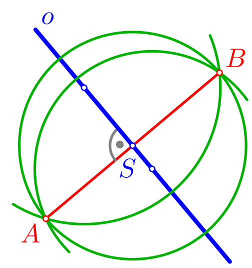


$M2$

- množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých bodů A, B, je **osa úsečky** AB, která je kolmá k úsečce AB a prochází jejím středem S

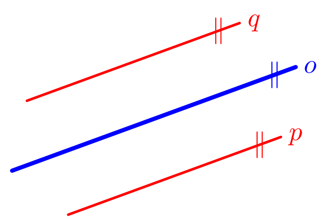


- tato osa úsečky je také množinou všech středů kružnic, jež procházejí danými body A, B

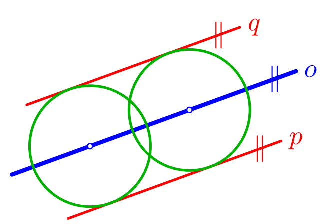


M3

- množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých rovnoběžek p, q ($p \neq q, p \parallel q$), je **osa pásu** jimi omezeného

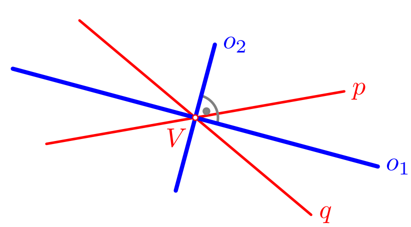


- tato osa pásu je také množinou všech středů kružnic, jež se dotýkají daných rovnoběžek p, q

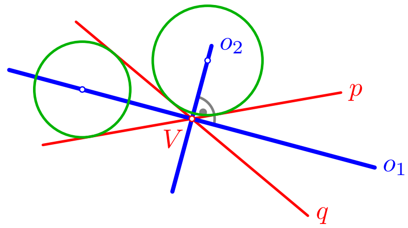


M4

- množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek p, q, jsou navzájem kolmé **osy** o_1, o_2 ($o_1 \perp o_2$) **úhlů** sevřených přímkami p, q



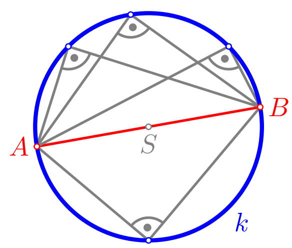
- tyto osy úhlů jsou také vyjma jejich průsečíku $V = o_1 \cap o_2$ množinou všech středů kružnic, jež se dotýkají daných různoběžek p, q



$M5$

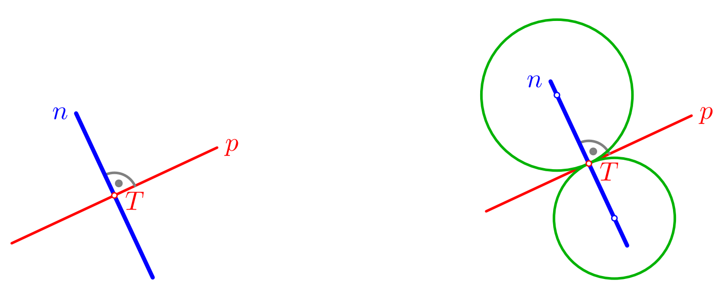
- množina všech bodů, z nichž je danou úsečku AB vidět pod pravým úhlem, je kružnice sestrojená nad průměrem AB (tzv. **Thaletova kružnice** nad daným průměrem) vyjma bodů A, B

- tato Thaletova kružnice je jinak také množinou všech vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí danými dvěma různými body A, B



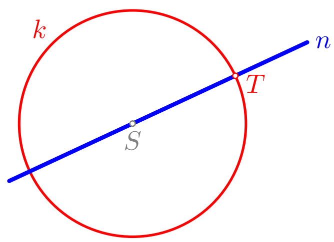
$M6$

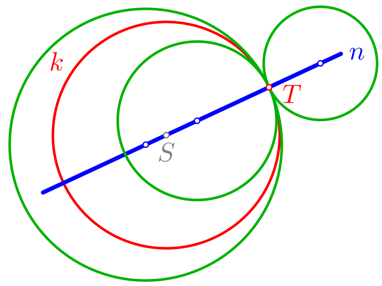
- množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané přímky p v jejím daném bodě T, je přímka n jdoucí daným bodem T kolmo k dané přímce p (**normála přímky** p v bodě T; $T \in n, n \perp p$) vyjma bodu T



$M7$

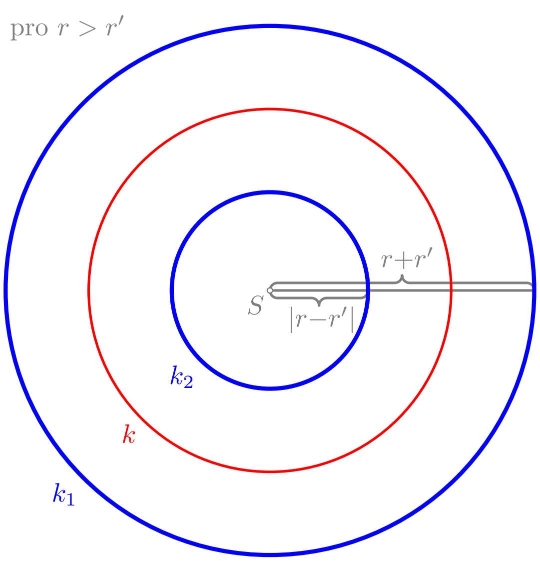
- množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k(S, r{=}|ST|)$ v jejím daném bodě T, je přímka $n{=}ST$ (**normála kružnice** k v bodě T) vyjma bodů S, T

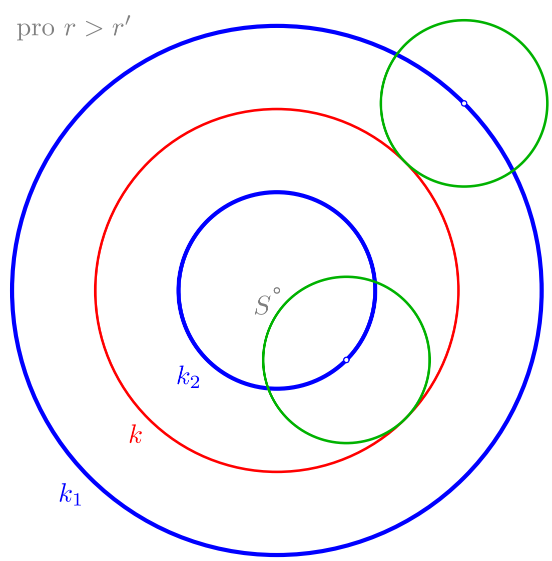


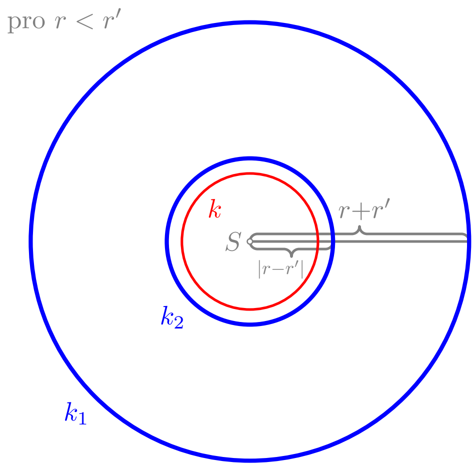


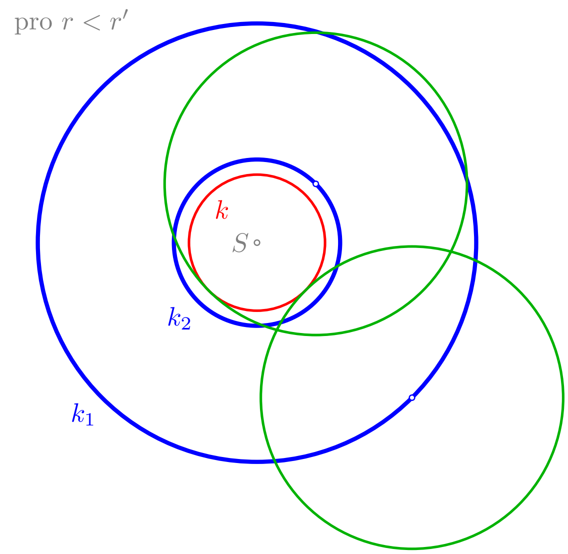
$M8$

- množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k(S, r)$ a mají daný poloměr r', jsou soustředné kružnice $k_1(S, r + r')$ (pro vnější dotyk s k) a $k_2(S, |r - r'|)$ (pro vnitřní dotyk s k)









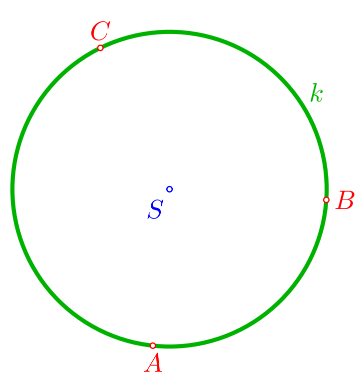
3.2. Apolloniova úloha BBB

Řešené úlohy

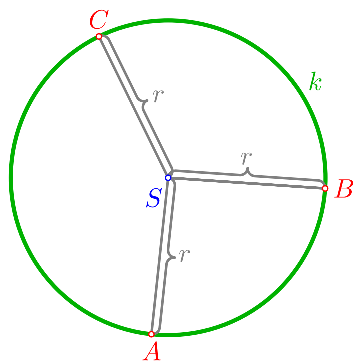
Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází třemi danými navzájem různými body A, B, C.

Rozbor úlohy:

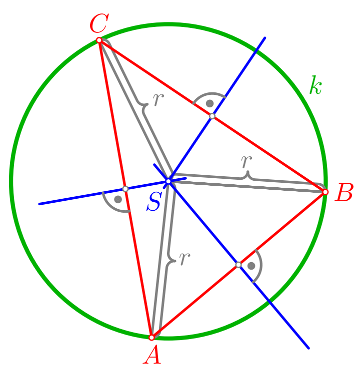
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k o středu S a libovolném poloměru r, zvolme na ní tři navzájem různé body A, B, C a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí...



- zřejmě pro body A, B, C, S platí $|AS|=|BS|=|CS|=r$ (viz množinu $M1$ na straně 11 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti)



- střed S kružnice k má stejnou vzdálenost r od bodu A i od bodu B, a musí tedy ležet na ose úsečky AB (viz množinu $M2$ na straně 11 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti); ze stejného důvodu leží také na ose úsečky AC a současně na ose úsečky BC; stačí tedy sestrojit dvě z těchto tří os, najít jejich průsečík S, který je nutně středem hledané kružnice k (viz následující konstrukce)

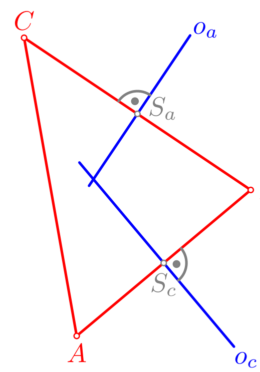


□

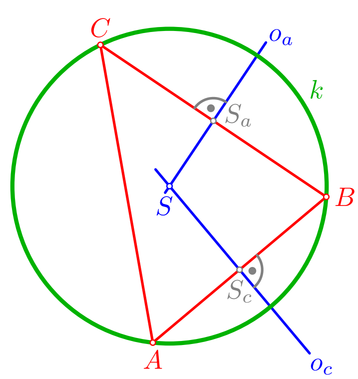
Konstrukce:

- zadání úlohy: jsou dány tři navzájem různé body A, B, C

- podle závěru rozboru sestrojme např. osy o_a a o_c úseček BC a AB: $o_a \perp BC, S_a \in o_a$, kde S_a je středem úsečky BC, podobně $o_c \perp AB, S_c \in o_c$, kde S_c je středem úsečky AB



- bod $S = o_a \cap o_c$ je pak středem hledané kružnice $k(S, r = |SA| = |SB| = |SC|)$, která je tzv. **kružnicí opsanou** trojúhelníku ABC



□

Diskuze:

Úloha má vždy právě jedno řešení vyjma případu, kdy dané navzájem různé body A, B, C leží v jedné přímce (jsou tzv. kolineární), v tomto případě řešení neexistuje (osy úseček AB, BC, AC jsou rovnoběžné a nelze tedy sestrojit jejich průsečík).

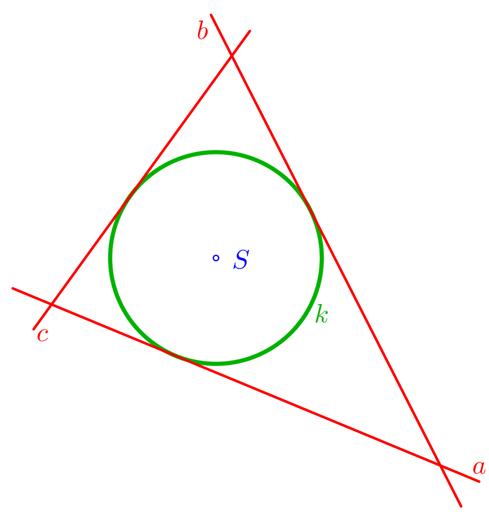
3.3. Apolloniova úloha ppp

Řešené úlohy

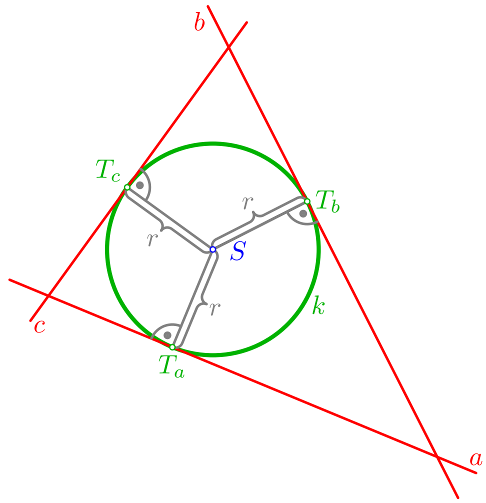
Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká tří daných navzájem různých přímek a, b, c.

Rozbor úlohy:

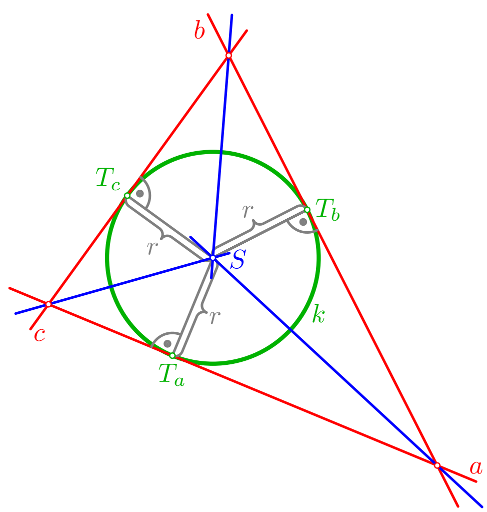
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k o středu S a libovolném poloměru r, zvolme tři její navzájem různé tečny a, b, c a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí ...



- zřejmě pro přímky a, b, c a bod S platí $|aS|{=}|bS|{=}|cS|{=}r$, tj. střed S kružnice k má stejnou vzdálenost r od přímek a, b, c



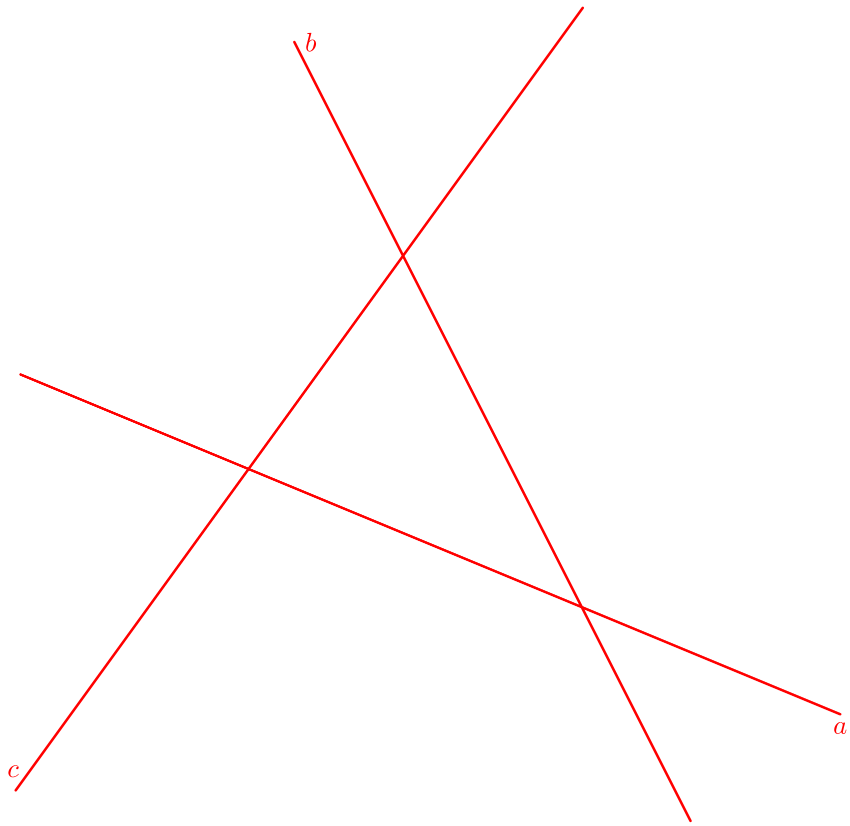
- podle vlastností množiny *M4* (viz strana 12) z přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti musí tedy bod S ležet na jedné z os úhlů přímkami a, b sevřených; ze stejného důvodu leží také na jedné z os úhlů sevřených přímkami a, c a současně na jedné z os úhlů sevřených přímkami b, c; tím je nalezen vztah mezi danými (přímky a, b, c) a hledanými (kružnice k, především její střed S) prvky a je možno přistoupit k následující konstrukci



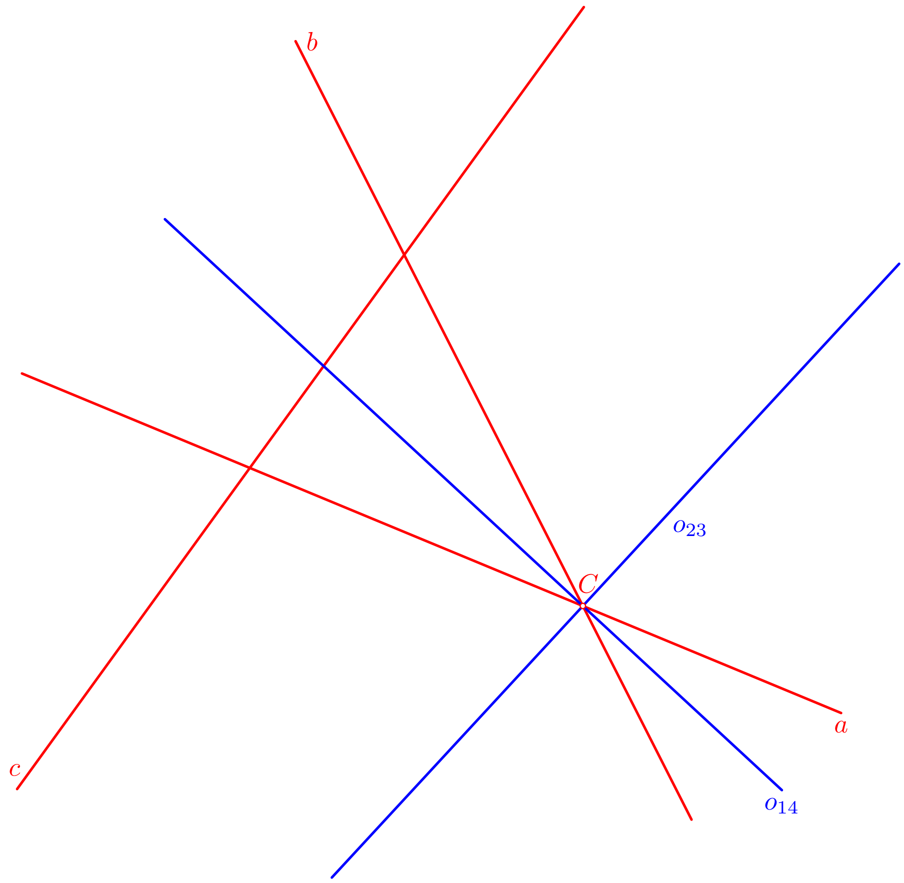
□

Konstrukce (dosti náročná na přesnost rýsování):

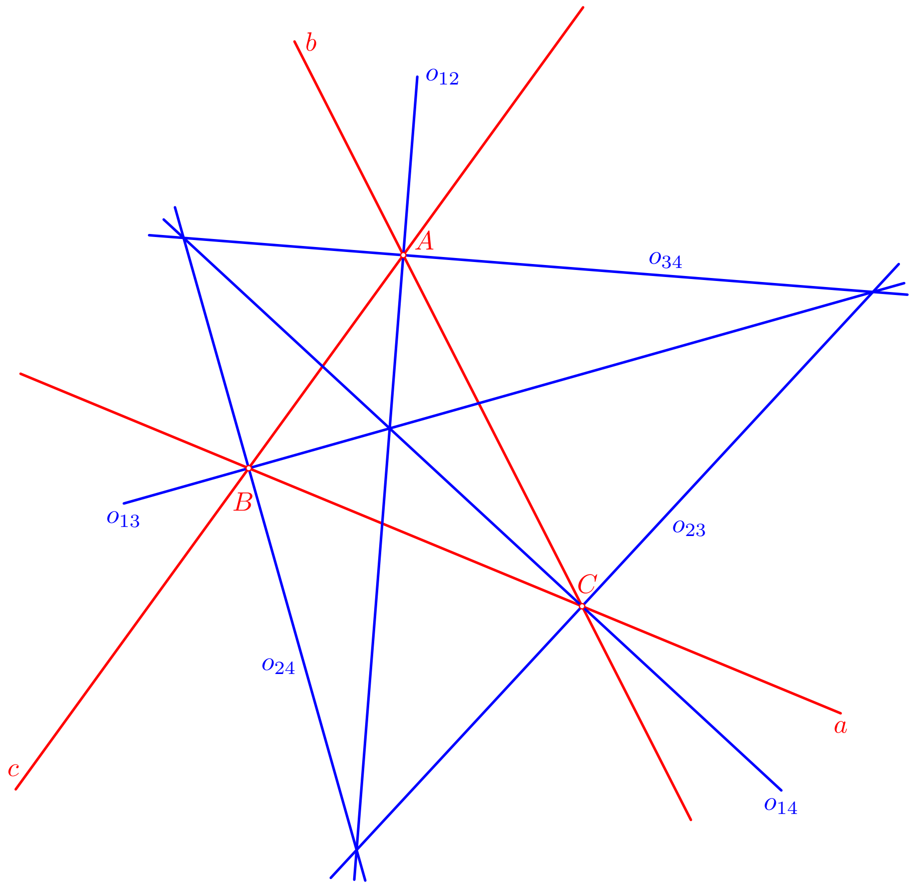
- zadání úlohy: jsou dány tři navzájem různé přímky a, b, c



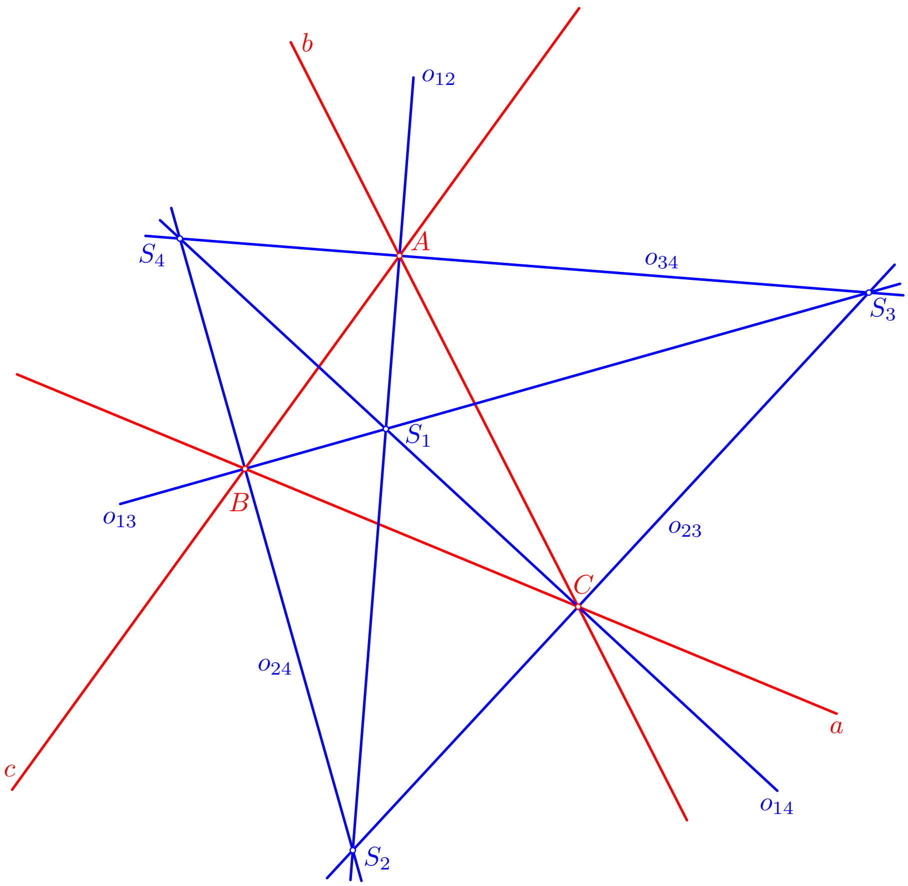
- podle závěru rozboru sestrojme nejprve průsečík $C = a \cap b$ daných přímek a, b a jím veďme obě osy o_{14} a o_{23} ($o_{14} \perp o_{23}$) úhlů přímkami a, b sevřených



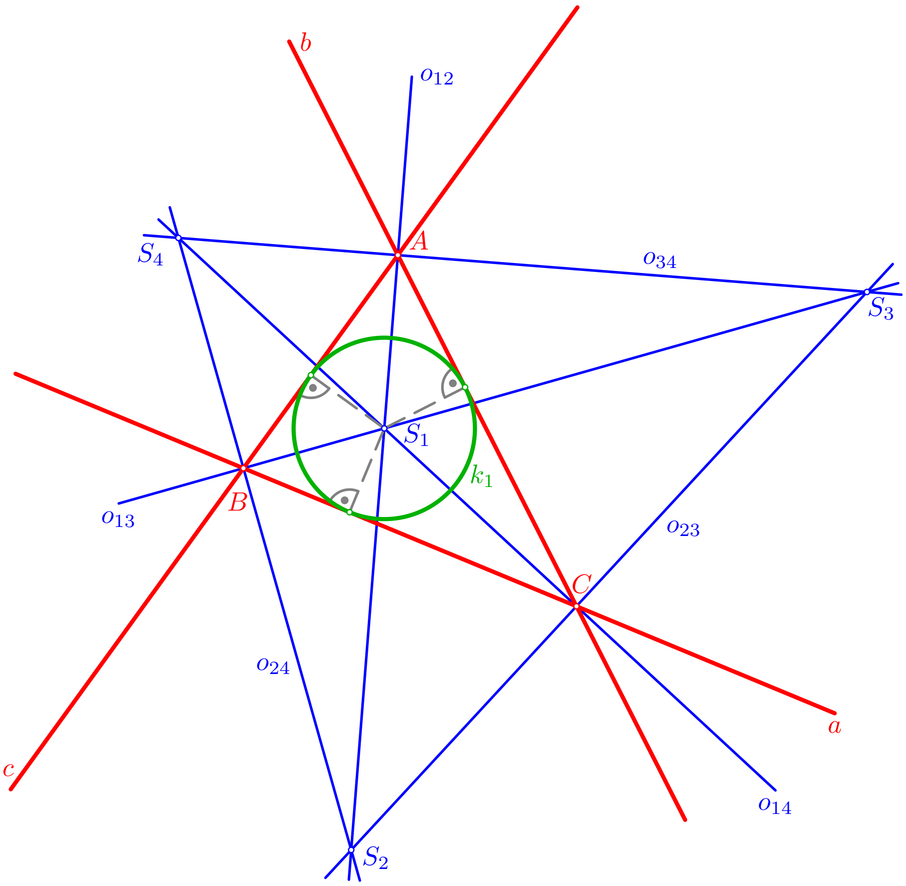
- totéž proveďme analogicky v bodě $B = a \cap c$: zde získáme osy o_{13} a o_{24} ($o_{13} \perp o_{24}$) úhlů sevřených přímkami a, c; a ještě naposled rozdělme osami o_{12} a o_{34} ($o_{12} \perp o_{34}$) úhly sevřené přímkami b, c (ty se protínají v bodě $A = b \cap c$)



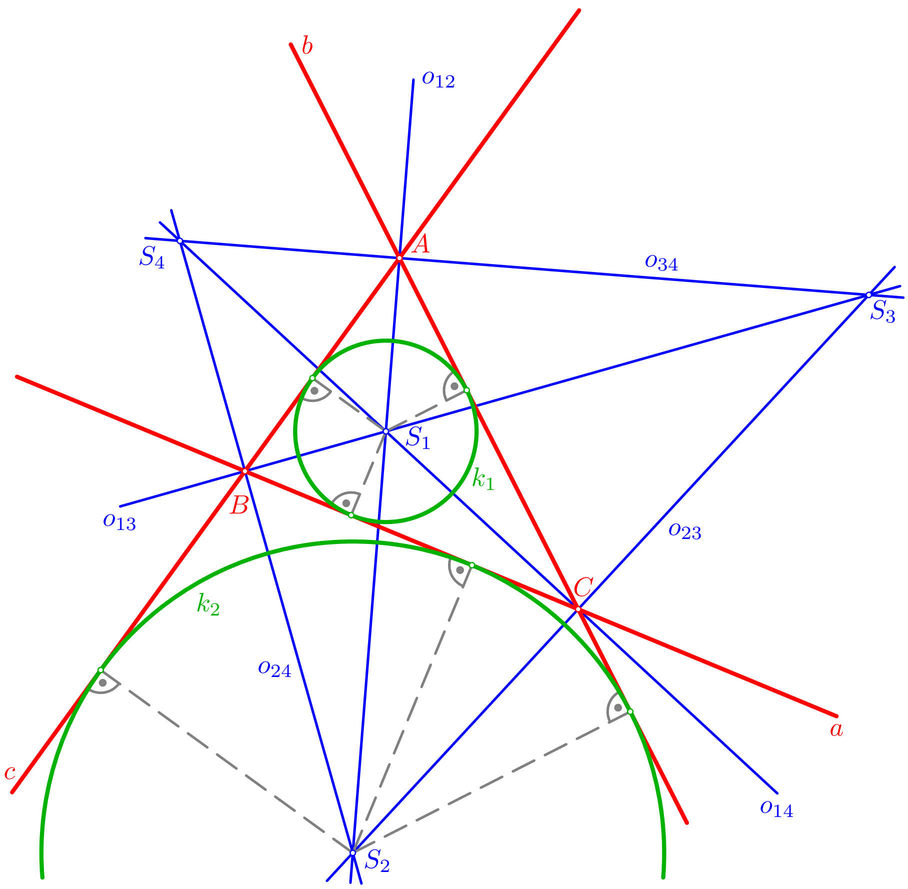
- při přesném rýsování musí vyjít, že se vždy tři ze šesti sestrojených os protínají v jednom bodě: získáme tak celkem čtyři průsečíky $S_1{=}o_{12}\cap o_{13}\cap o_{14}$, $S_2{=}o_{12}\cap o_{23}\cap o_{24}$, $S_3{=}o_{13}\cap \cap\, o_{23}\cap o_{34}$ a $S_4{=}o_{14}\cap o_{24}\cap o_{34}$; podle *M4* pro každý takto sestrojený bod S_i, kde $i{=}1,2,3,4$, platí, že jeho vzdálenost od daných přímek a, b, c je stejná, a je to tedy střed hledané kružnice; pro větší přehlednost sestrojme tyto kružnice postupně



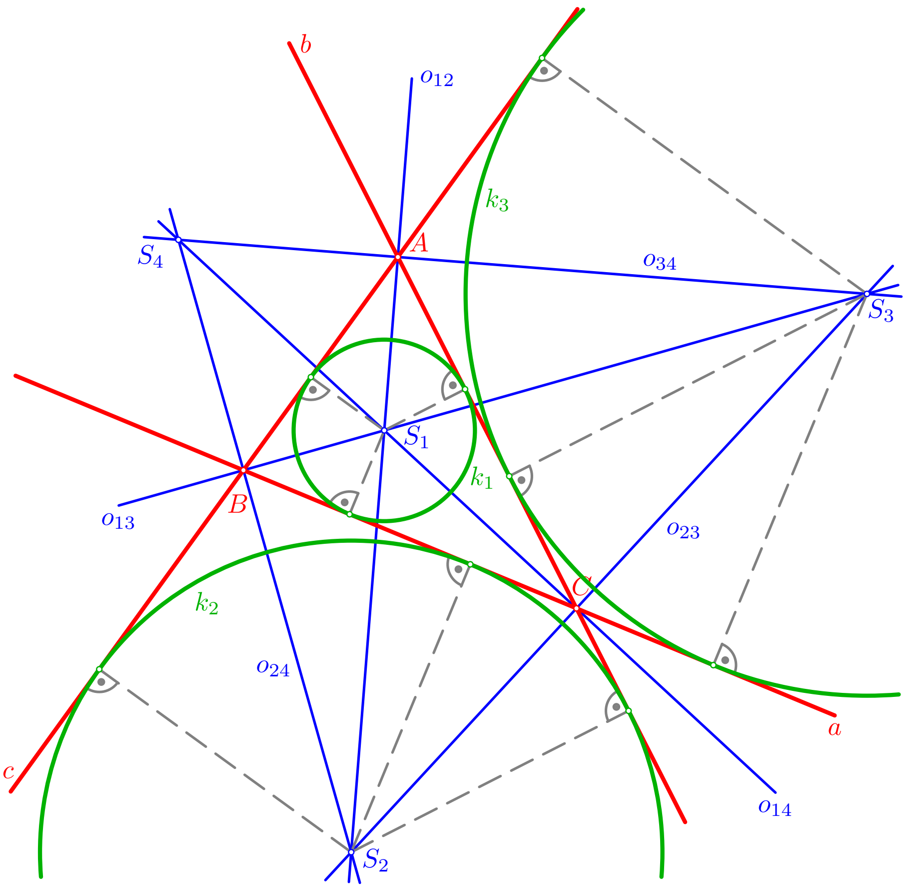
- bodem S_1 veďme kolmice k daným tečnám a, b, c a v průsečících najdeme příslušné body dotyku; bod S_1 leží ve vnitřní oblasti trojúhelníka ABC a kružnice $k_1(S_1, r_1{=}|aS_1|{=}|bS_1|{=}|cS_1|)$ se tudíž nazývá kružnicí trojúhelníku ABC **vepsanou**



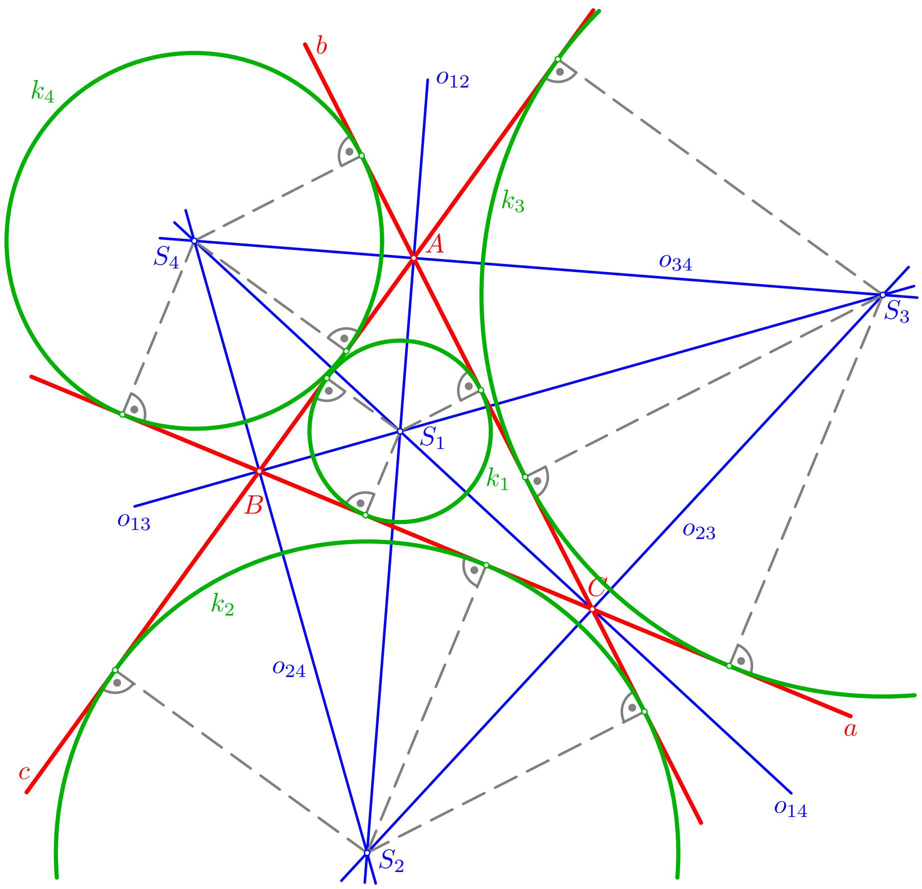
- podobně sestrojme kružnici $k_2(S_2, r_2{=}|aS_2|{=}|bS_2|{=}|cS_2|)$ tzv. **připsanou** ke straně a trojúhelníka ABC



- analogicky pro kružnici $k_3(S_3, r_3{=}|aS_3|{=}|bS_3|{=}|cS_3|)$ připsanou ke straně b trojúhelníka ABC



- a konečně je doplněna i kružnice $k_4(S_4, r_4{=}|aS_4|{=}|bS_4|{=}|cS_4|)$ připsaná ke straně c trojúhelníka ABC



□

Diskuze:

V obecném případě má úloha právě čtyři řešení; jsou-li dvě z přímek a, b, c rovnoběžné a třetí je s nimi různoběžná, má tato úloha právě dvě řešení (pro rovnoběžky se sestrojí osa pásu jimi určeného - viz množina $M3$ na straně 12 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti); jsou-li všechny tři dané přímky a, b, c rovnoběžné, nemá úloha žádné řešení (osy příslušných pásů jsou také rovnoběžné).

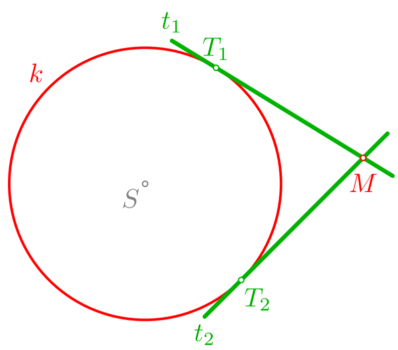
3.4. Tečny z bodu ke kružnici

Řešené úlohy

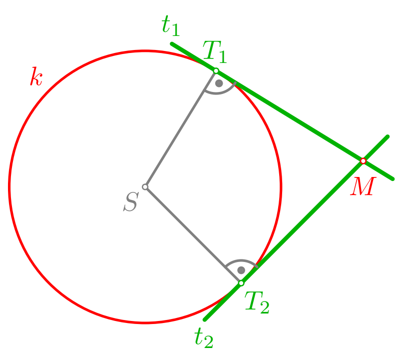
Příklad: Daným bodem M veďte tečny k dané kružnici $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:

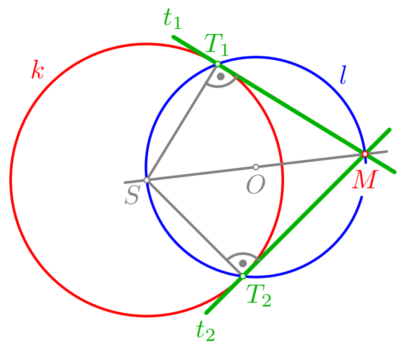
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k o středu S a libovolném poloměru r, zvolme dvě její nerovnoběžné tečny t_1, t_2, které se protínají v bodě M, a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí…



- zřejmě je $ST_1 \perp t_1$ a $ST_2 \perp t_2$, kde T_1 resp. T_2 je bod dotyku tečny t_1 resp. tečny t_2 a kružnice k



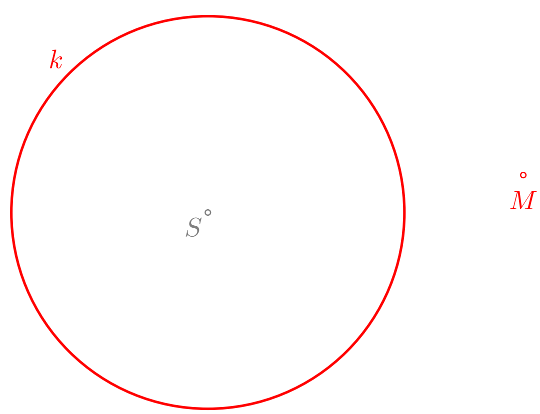
- úsečku SM je tedy z bodu T_1 i z bodu T_2 vidět pod pravým úhlem a podle vlastností množiny $M5$ (viz strana 13) z přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti leží body T_1, T_2 na Thaletově kružnici $l(O, \frac{1}{2}|SM|)$ sestrojené nad průměrem SM



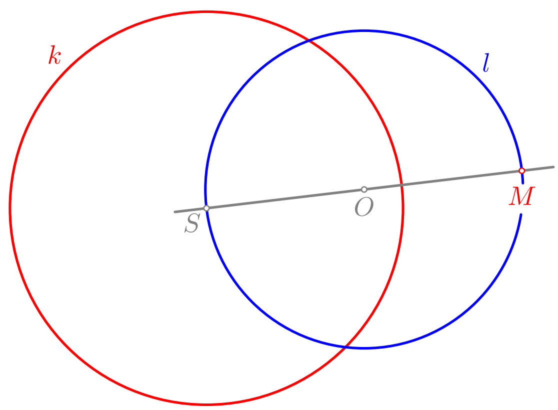
□

Konstrukce:

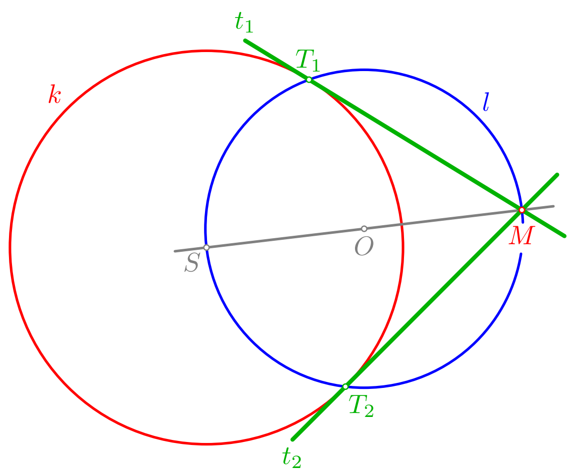
- zadání úlohy: je dána kružnice $k(S, r)$ a bod M



- podle závěru rozboru sestrojme Thaletovu kružnici $l(O, \frac{1}{2}|SM|)$ nad průměrem SM, kde bod O je tedy středem úsečky SM



- nyní stačí najít průsečíky T_1, T_2 dané kružnice k a sestrojené kružnice l a vést jimi hledané tečny $t_1{=}MT_1, t_2{=}MT_2$ z bodu M ke kružnici k



□

Diskuze:

Úloha má právě dvě řešení osově souměrná podle přímky SM, leží-li daný bod M ve vnější oblasti dané kružnice k; jestliže je bod M bodem kružnice k, pak má úloha právě jedno řešení (bod M je současně bodem dotyku dané kružnice k, sestrojené Thaletovy kružnice l i hledané tečny t); v případě, že bod M leží ve vnitřní oblasti kružnice k, řešení neexistuje (Thaletova kružnice l kružnici k neprotíná nebo pro $S{=}M$ kružnice l neexistuje).

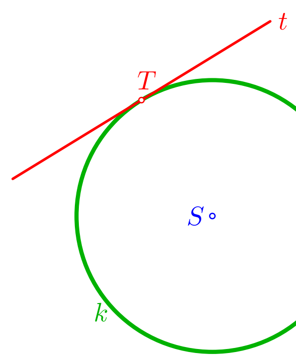
3.5. Pappova úloha BBp

Řešené úlohy

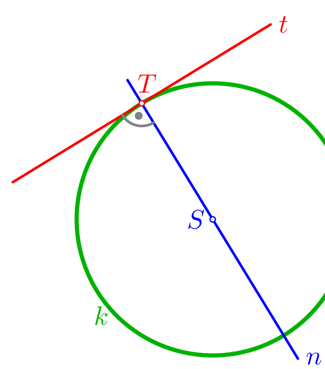
Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a dotýká se dané přímky t v daném bodě T.

Rozbor úlohy:

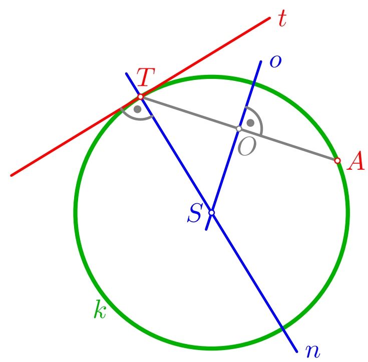
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k o středu S a libovolném poloměru r, zvolme na ní dva body A, T, v bodě T doplňme tečnu t a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí…



- střed S kružnice k musí ležet na normále n tečny t v bodě T (viz množinu $M6$ na straně 13 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti)



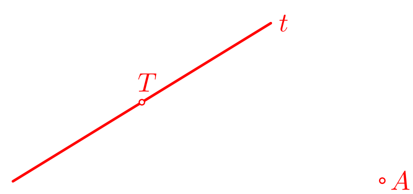
- současně musí střed S kružnice k ležet také na ose o úsečky AT (viz množinu $M2$ na straně 11 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti); pro řešení této úlohy se tedy využijí hned dvě různé množiny bodů dané vlastnosti



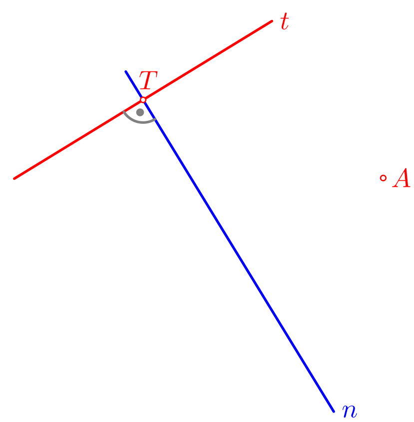
□

Konstrukce:

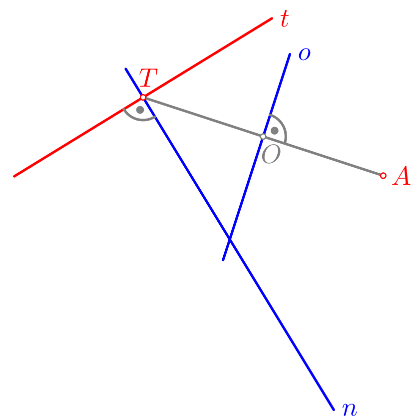
- zadání úlohy: je dán bod A, přímka t a na ní bod T ($T \in t$)



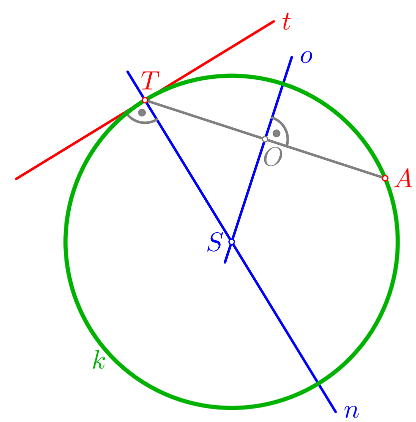
- podle rozboru sestrojme nejprve normálu n přímky t v bodě T: $T \in n$ a $n \perp t$



- dále sestrojme osu o úsečky AT: $O \in o$, kde bod O je středem úsečky AT, a $o \perp AT$



- bod $S = n \cap o$ je pak středem hledané kružnice $k(S, r = |SA| = |ST|)$, která prochází daným bodem A a dotýká se dané přímky t v daném bodě T



□

Diskuze:

Úloha má právě jedno řešení, jestliže bod A neleží na přímce t; je-li $A \in t$ a $A \neq T$, pak úloha nemá žádné řešení (normála n a osa o úsečky AT jsou rovnoběžné); je-li $A=T$, má úloha nekonečně mnoho řešení (všechny kružnice, jejichž středy leží na normále n vyjma bodu $A=T$).

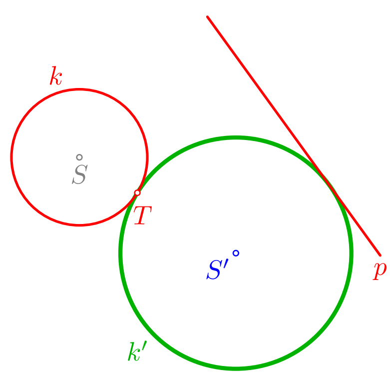
3.6. Pappova úloha Bkp

Řešené úlohy

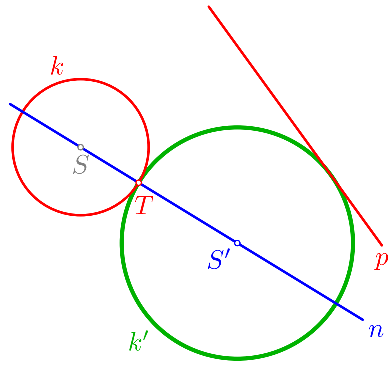
Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S, r = |ST|)$ v daném bodě T a dané přímky p.

Rozbor úlohy:

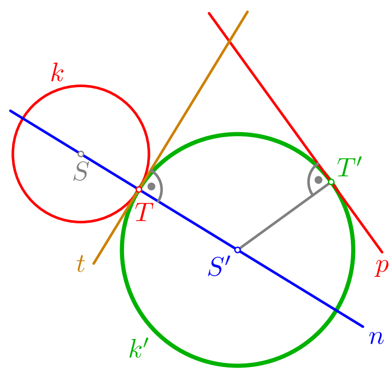
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k' o středu S' a libovolném poloměru r', zvolme na ní bod T, přikresleme kružnici $k(S, r)$, která se dotýká kružnice k' v bodě T, doplňme tečnu p ke kružnici k a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí ...



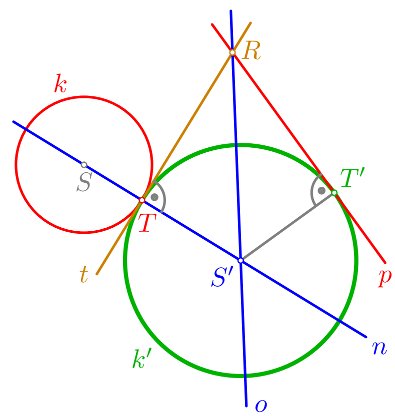
- střed S' kružnice k' musí ležet na normále $n{=}ST$ kružnice k v bodě T (viz množinu $M7$ na straně 14 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti)



- současně musí mít střed S' kružnice k' stejnou vzdálenost r' od přímky p i od přímky t, která je společnou tečnou kružnic k a k' v bodě T



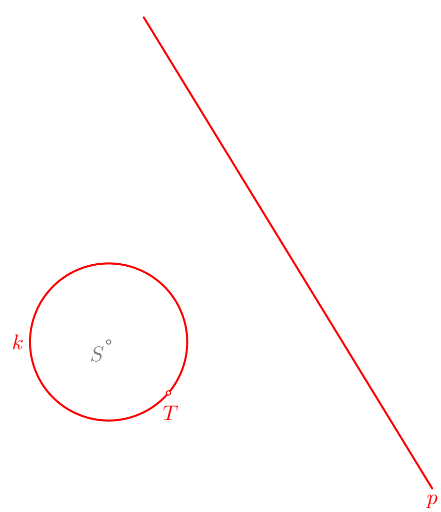
- podle vlastností množiny $M4$ (viz strana 12) z přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti leží tedy bod S' na jedné z os úhlů sevřených přímkami t a p; pro řešení této úlohy se tedy využijí hned dvě různé množiny bodů dané vlastnosti



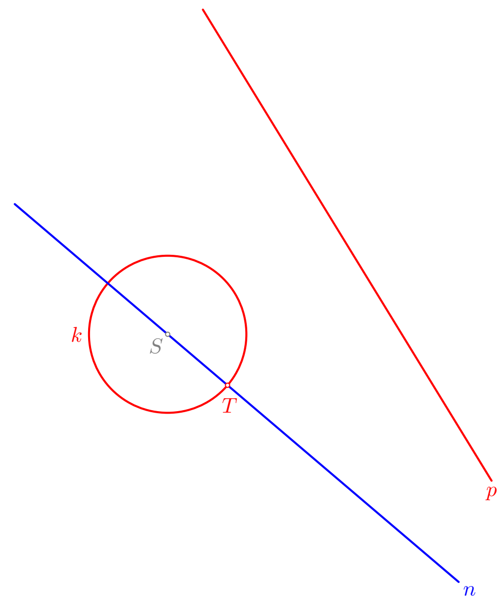
□

Konstrukce:

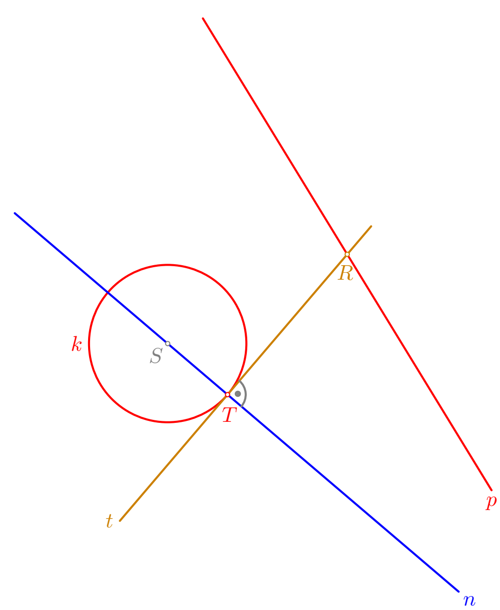
- zadání úlohy: je dána kružnice $k(S, r{=}|ST|)$ s bodem T dotyku ($T \in k$) a přímka p



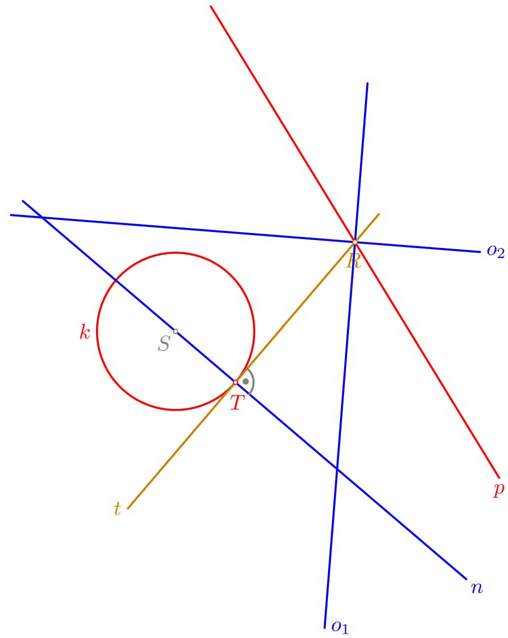
- podle rozboru sestrojme nejprve normálu $n{=}ST$ kružnice k v bodě T



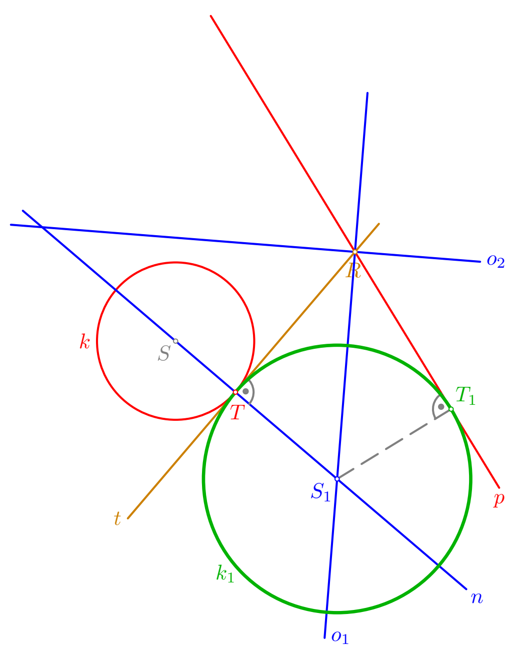
- nyní doplňme tečnu t ke kružnici k v bodě T ($T \in t$ a $t \perp n$) a najděme průsečík $R{=}t{\cap}p$



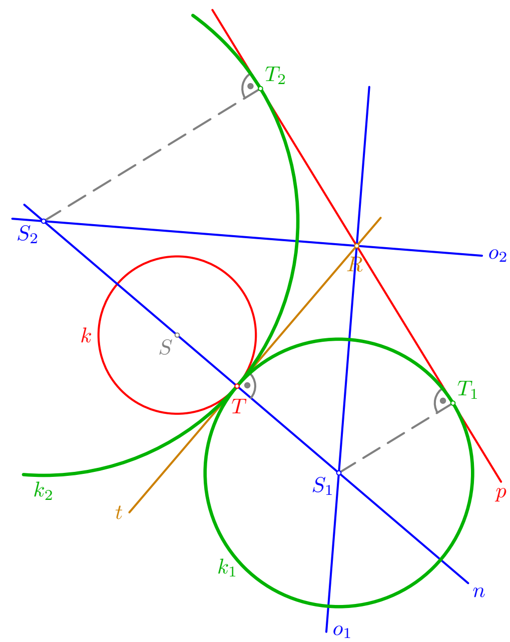
- bodem R sestrojme obě osy o_1 a o_2 ($o_1 \perp o_2$) úhlů sevřených přímkami t a p



- bod $S_1 = n \cap o_1$ je pak středem hledané kružnice $k_1(S_1, r_1 = |S_1T|)$, která se dotýká dané kružnice k v daném bodě T (tzv. *vnější dotyk*) a také se dotýká dané přímky p



- podobně je bod $S_2 = n \cap o_2$ také středem hledané kružnice $k_2(S_2, r_2 = |S_2T|)$, která se dotýká dané přímky p a s danou kružnicí k má v daném bodě T tzv. *vnitřní dotyk*



□

Diskuze:

Nechť t je tečna kružnice k v bodě T. Úloha má právě dvě řešení, jestliže přímka p je různoběžná s tečnou t a současně $T \notin p$; je-li $T \in p$ a přímka p není tečnou kružnice k (tj. $p \neq t$), pak úloha nemá žádné řešení; úloha má právě jedno řešení, jestliže je $p \parallel t$ a současně $T \notin p$ (při řešení se místo množiny $M4$ využije množina $M3$ – viz strana 12); je-li přímka p tečnou kružnice k v bodě T (tj. $p = t$), pak má úloha nekonečně mnoho řešení.

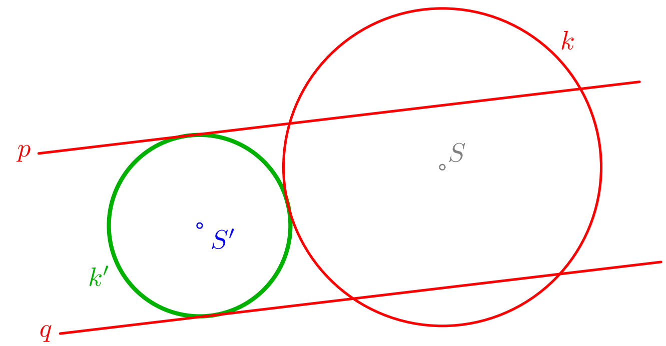
3.7. Varianta Apolloniovy úlohy ppk

Řešené úlohy

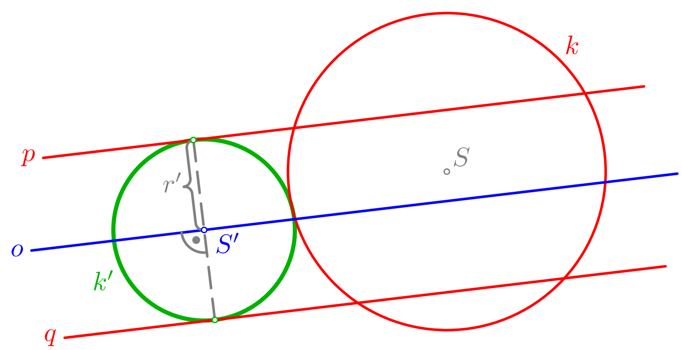
Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou daných různých rovnoběžných přímek p, q $(p \parallel q, p \neq q)$ a dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:

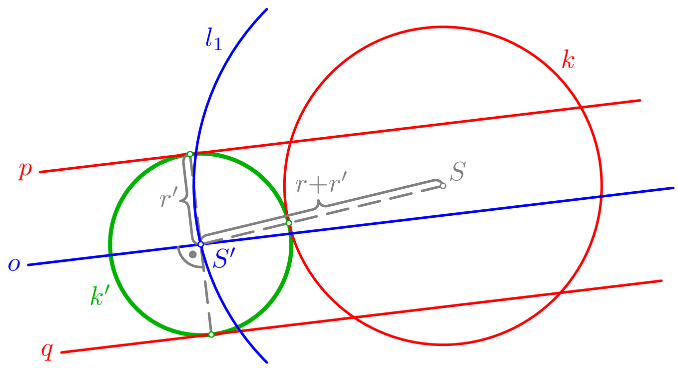
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k' o středu S' a libovolném poloměru r', zvolme dvě její navzájem různé rovnoběžné tečny p, q ($p \parallel q, p \neq q$), kružnici $k(S, r)$, která se dotýká kružnice k', a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí…



- střed S' kružnice k' musí ležet na ose o pásu omezeného rovnoběžkami p, q (viz množinu $M3$ na straně 12 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti) a pro poloměr r' kružnice k' platí $r' = \frac{1}{2}|pq|$



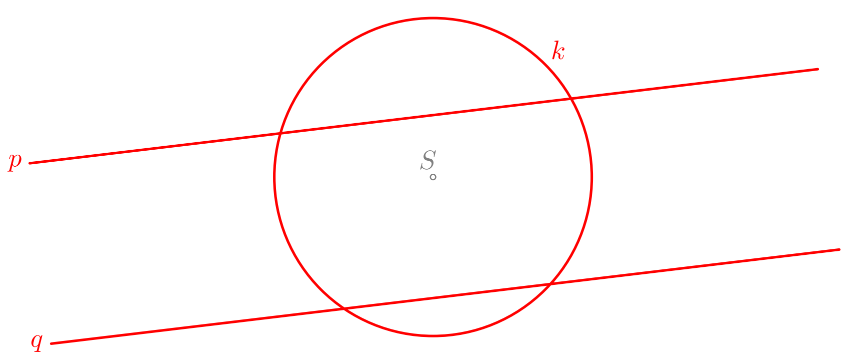
- podle vlastností množiny $M8$ (viz strana 14) z přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti musí tedy bod S' ležet také na jedné ze soustředných kružnic $l_1(S, r+r')$ nebo $l_2(S, |r-r'|)$; v náčrtku je zvolen vnější dotyk kružnic k, k' a střed S' tedy leží na kružnici $l_1(S, r+r')$



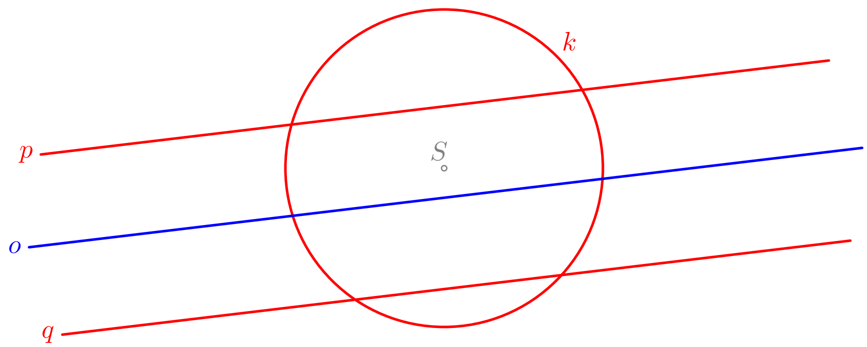
□

Konstrukce:

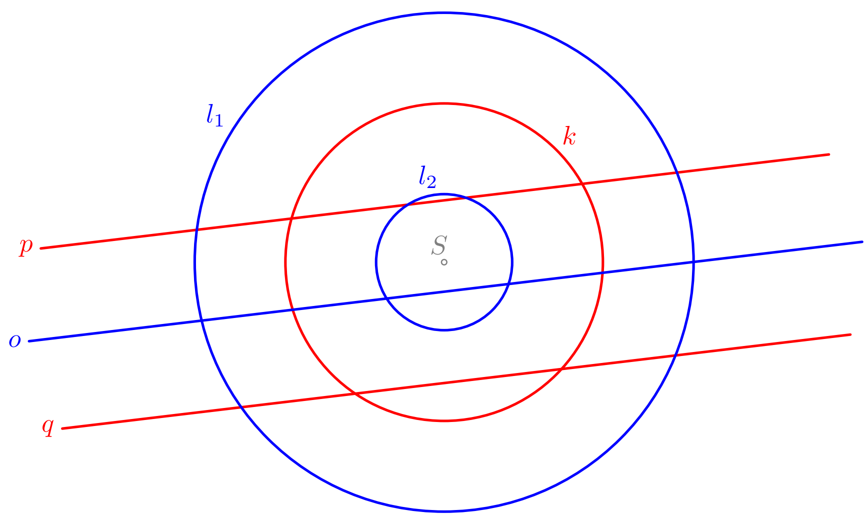
- zadání úlohy: jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q $(p \parallel q, p \neq q)$ a kružnice $k(S, r)$



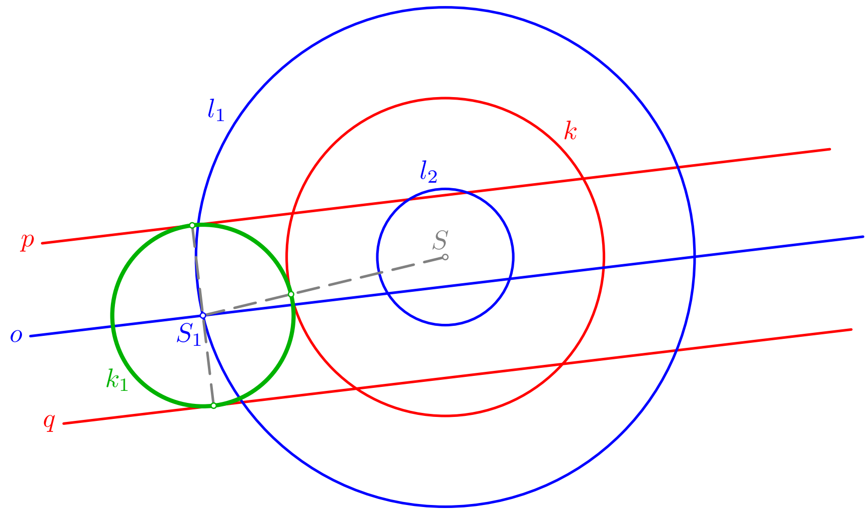
- nejprve sestrojme osu o pásu omezeného rovnoběžkami p, q, na níž bude ležet střed hledané kružnice



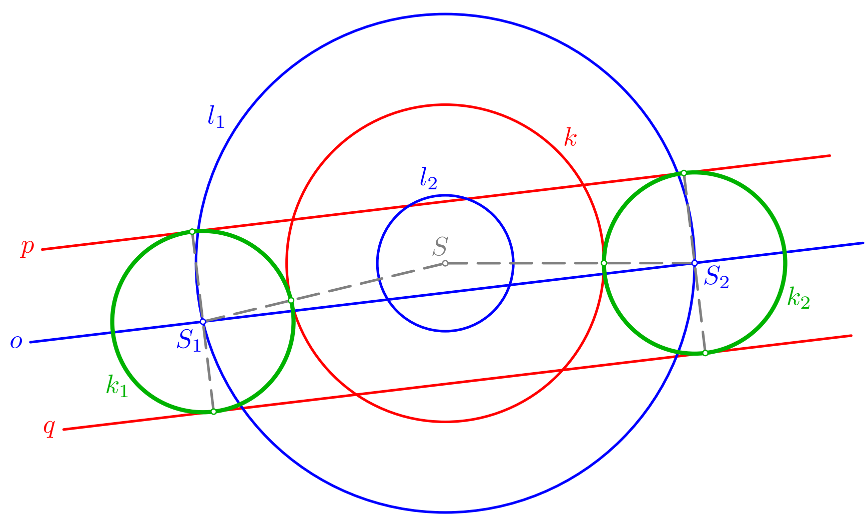
- dále sestrojme kružnice $l_1(S, r+r')$ a $l_2(S, |r-r'|)$, kde $r' = \frac{1}{2}|pq| = |op| = |oq|$, na nichž leží středy kružnic, které se dotýkají kružnice k a mají zjištěný poloměr r'



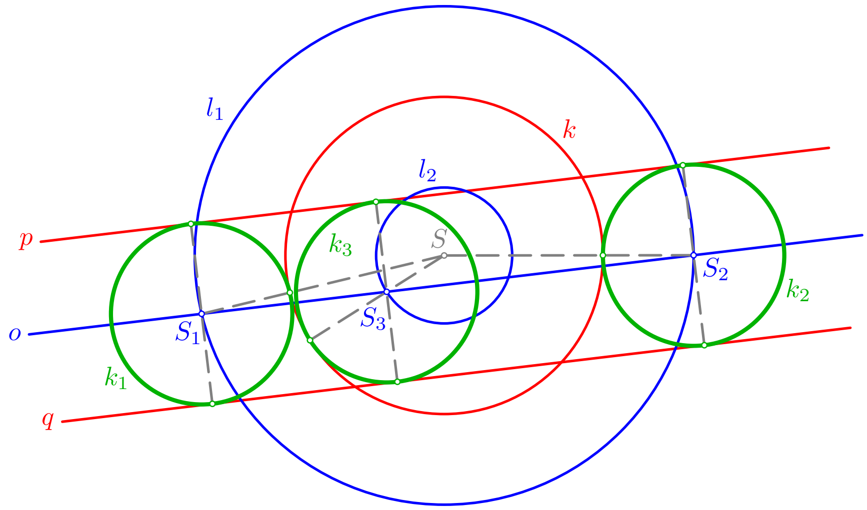
- nyní postupně hledejme průsečíky osy o s kružnicemi l_1, l_2: osa o protíná kružnici l_1 ve dvou bodech, jeden z nich označme S_1 a podle rozboru je to střed hledané kružnice $k_1(S_1, r')$, která se dotýká daných rovnoběžek p, q i dané kružnice $k(S, r)$; body dotyku na přímkách p, q jsou průsečíky těchto přímek s kolmicí k ose o vedenou bodem S_1; bod dotyku kružnic k_1 a k najdeme jako průsečík úsečky SS_1 s kružnicí k



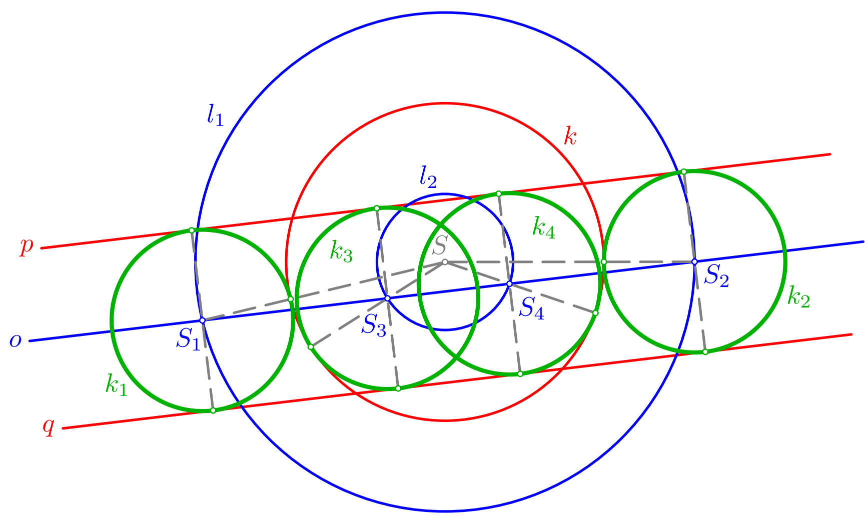
- druhý průsečík osy o a kružnice l_1 označme S_2 a opišme kolem něj kružnici $k_2(S_2, r')$; kružnice k_1 a k_2 jsou zřejmě osově souměrné podle kolmice k ose o vedené středem S; současně mají obě tato řešení k_1, k_2 vnější dotyk s danou kružnicí k



- třetím řešením úlohy je kružnice $k_3(S_3, r')$, kde bod S_3 je jedním z průsečíků osy o s kružnicí l_2; v tomto případě najdeme bod dotyku kružnic k_3 a k jako průsečík kružnice k s polopřímkou SS_3



- analogicky doplňme poslední kružnici $k_4(S_4, r')$, kde S_4 je druhým průsečíkem osy o a kružnice l_2; tato kružnice k_4 je opět osově souměrná s kružnicí k_3 podle téže osy; obě tato řešení k_3, k_4 mají s danou kružnicí k vnitřní dotyk



□

Diskuze:

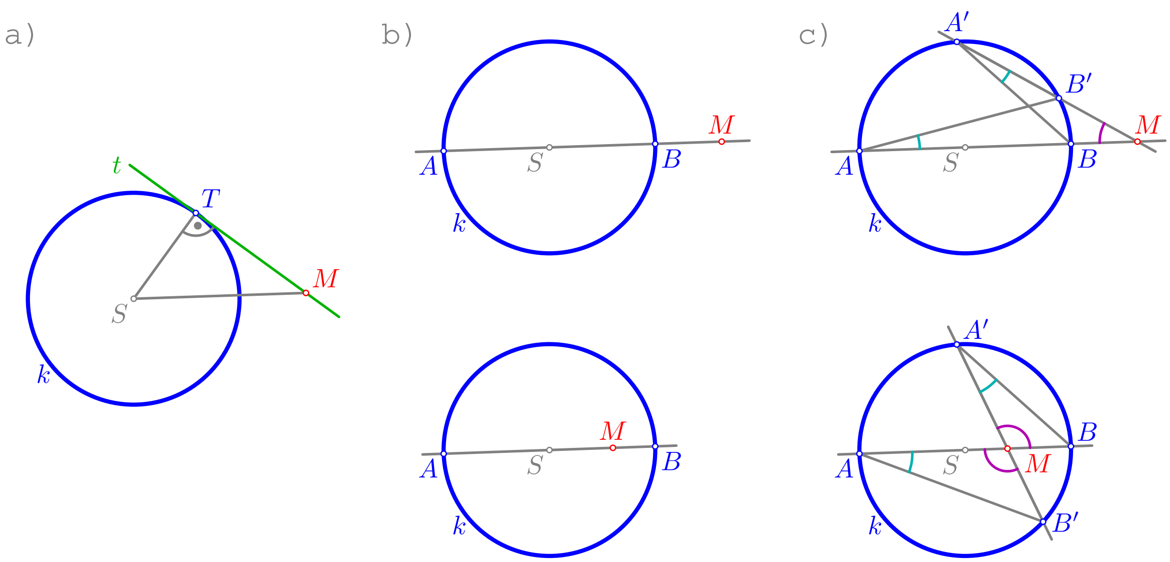
Úloha může mít čtyři, tři, dvě, jedno nebo žádné řešení. Podrobnější provedení diskuze je přenecháno čtenáři jako cvičení.

4. Mocnost bodu ke kružnici

4.1. Definice a základní vlastnosti

Výklad

- nechť je v rovině dána kružnice $k(S, r)$ a bod M; **mocností bodu M ke kružnici k** nazýváme reálné číslo $m = v^2 - r^2$, kde $v = |MS|$
- $m > 0$ resp. $m = 0$ resp. $m < 0$, právě když bod M leží ve vnější oblasti kružnice k resp. bod M leží na kružnici k resp. bod M leží ve vnitřní oblasti kružnice k
- leží-li bod M ve vnější oblasti kružnice k a T je bodem dotyku tečny t vedené z bodu M ke kružnici k, pak platí $|MT|^2 = v^2 - r^2 = m$ (plyne z Pythagorovy věty, viz obr. a)
- pro průsečíky A, B kružnice k a její libovolné sečny vedené bodem M platí $|MA| \cdot |MB| = m$ resp. $|MA| \cdot |MB| = -m$, je-li bod M ve vnější resp. ve vnitřní oblasti kružnice k
  1. pro sečnu jdoucí středem S kružnice k je tvrzení zřejmé (viz obr. b): $|MA| \cdot |MB| = (v+r) \cdot (v-r) = v^2 - r^2 = m$ nebo $|MA| \cdot |MB| = (r+v) \cdot (r-v) = r^2 - v^2 = -m$
  2. jestliže jiná sečna vedená bodem M protíná kružnici k v bodech A', B' (viz obr. c), pak jsou trojúhelníky $A'BM$ a $AB'M$ podobné (podle věty uu), a tudíž platí: $\frac{|MA'|}{|MA|} = \frac{|MB|}{|MB'|}$ a odtud $|MA'| \cdot |MB'| = |MA| \cdot |MB|$



4.2. Chordála a potenční střed

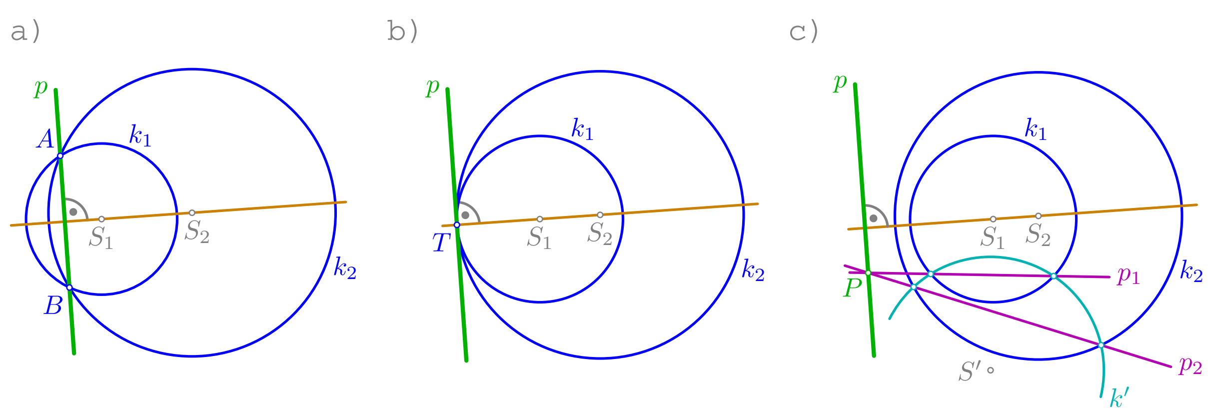
- dá se ukázat, že množinou všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma různým nesoustředným kružnicím $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$ je přímka p kolmá ke středné $s = S_1S_2$ daných kružnic; tato přímka se nazývá **chordála** kružnic k_1, k_2

- konstrukci chordály ukazují následující obrázky

  a) kružnice k_1, k_2 se protínají v bodech A, B, jež mají stejnou mocnost $m = 0$ k oběma kružnicím; je tudíž chordála $p = AB$

  b) kružnice k_1, k_2 se dotýkají v bodě T, který má k oběma stejnou mocnost $m = 0$; chordálou je tedy společná tečna p v bodě T

  c) kružnice k_1, k_2 nemají žádný společný bod; zvolme pomocnou kružnici $k'(S', r')$, která protíná obě kružnice k_1, k_2, a sestrojme chordálu p_1 kružnic k', k_1 a chordálu p_2 kružnic k', k_2; průsečík $P = p_1 \cap p_2$ má pak stejnou mocnost ke všem třem kružnicím k', k_1, k_2, je to jejich tzv. **potenční střed**; bodem P pak prochází také chordála $p \perp S_1S_2$ kružnic k_1, k_2



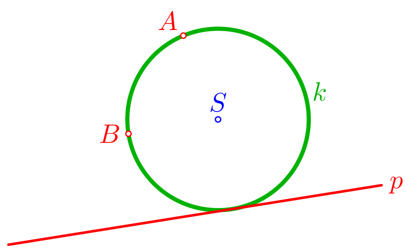
4.3. Apolloniova úloha BBp

Řešené úlohy

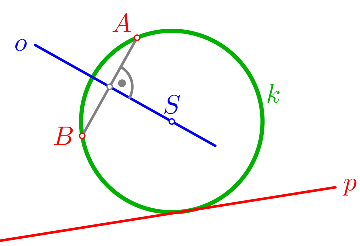
Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází danými různými body A, B a dotýká se dané přímky p.

Rozbor úlohy:

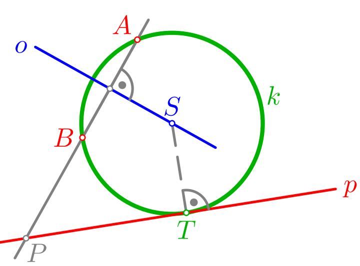
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k o středu S a libovolném poloměru r, zvolme na ní dva body A, B, doplňme tečnu p a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí . . .



- střed S kružnice k musí ležet na ose o úsečky AB (viz množinu $M2$ na straně 11 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti)



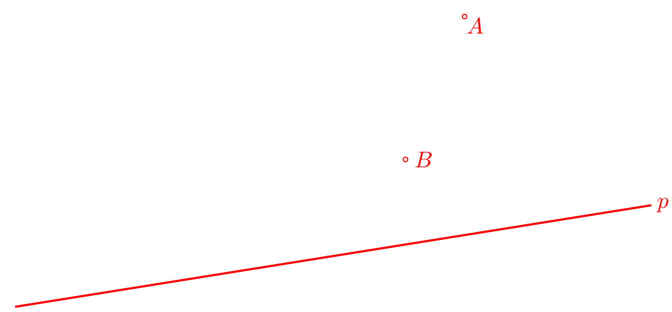
- nechť je $P = p \cap AB$ a T je bodem dotyku přímky p a kružnice k; z vlastností mocnosti bodu P ke kružnici k pak plyne: $|PT|^2 = |PA| \cdot |PB|$; díky tomu lze bod T dotyku sestrojit . . .



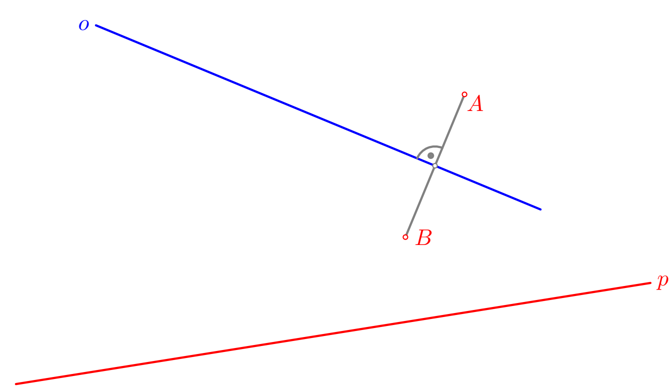
$\square$

Konstrukce:

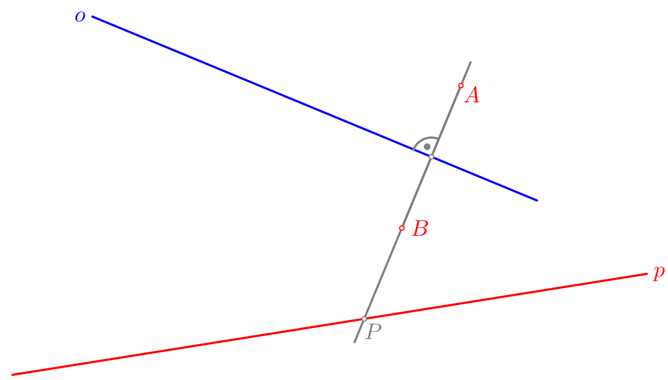
- zadání úlohy: jsou dány různé body A, B a přímka p



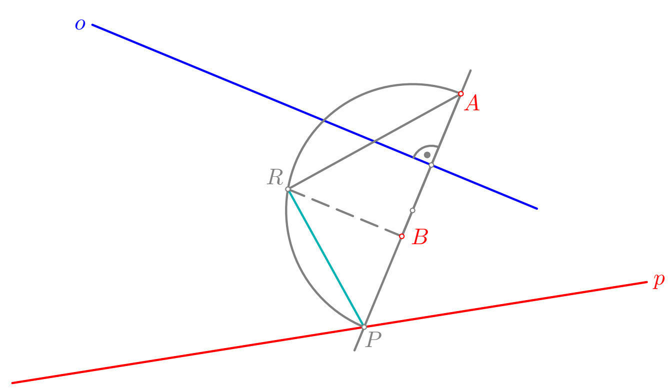
- podle rozboru sestrojme nejprve osu o úsečky AB



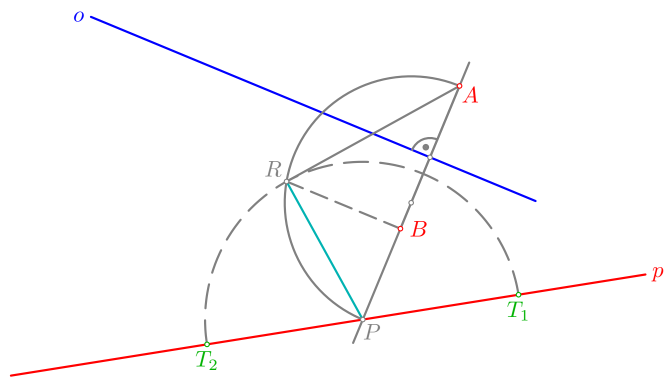
- dále najděme průsečík $P = p \cap AB$



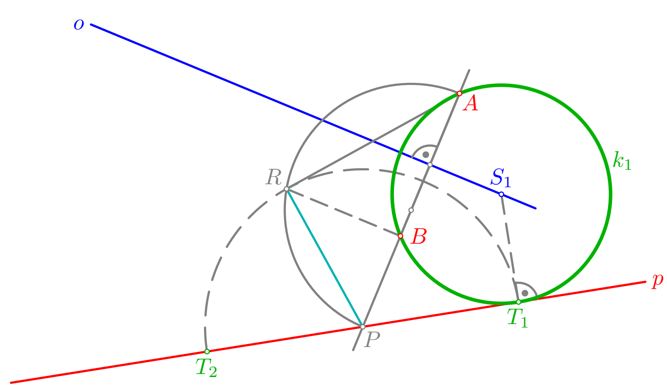
- nad úsečkou AP sestrojme Thaletovu půlkružnici a na ní vrchol R pravoúhlého trojúhelníka ARP, v němž je úsečka BR výškou; podle Eukleidovy věty o odvěsně pak platí $|PR|^2 = |PA| \cdot |PB|$



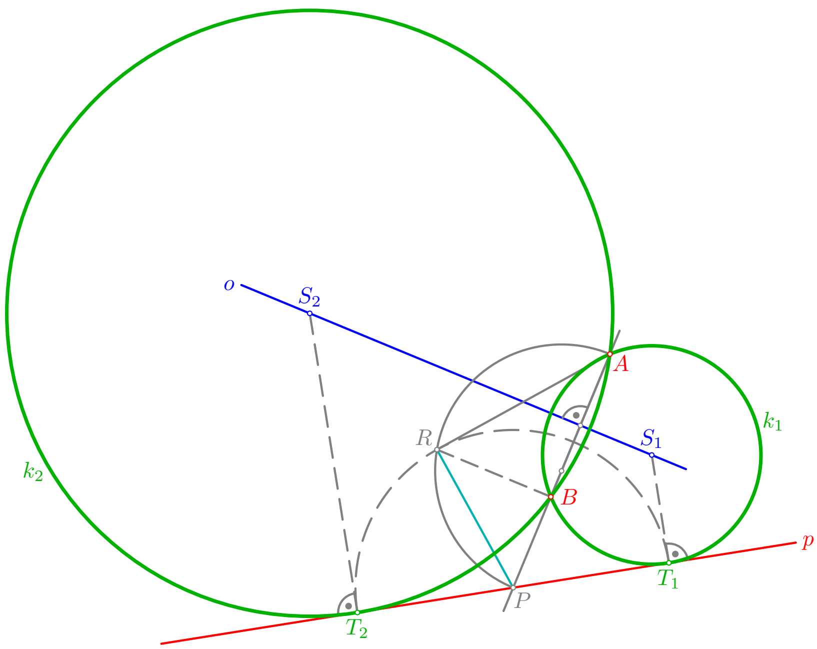
- nyní stačí na přímku p od bodu P nanést velikost úsečky PR a tím získáme body T_1, T_2 dotyku přímky p a hledaných kružnic k_1, k_2



- střed S_1 kružnice $k_1(S_1, r_1)$ leží na ose o a na kolmici vedené bodem T_1 k přímce p



- podobně protíná normála k přímce p vedená bodem T_2 osu o v bodě S_2, který je středem druhé hledané kružnice $k_2(S_2, r_2)$, jež také prochází danými body A, B a dotýká se dané přímky p



□

Diskuze:

Úloha nemá žádné řešení, jestliže body A, B leží v různých polorovinách určených hraniční přímkou p nebo je-li $A \in p$ a současně $B \in p$; je-li $AB \parallel p$, má úloha právě jedno řešení (osa o úsečky AB protíná přímku p přímo v bodě T dotyku); leží-li body A, B uvnitř jedné poloroviny ohraničené přímkou p a $p \nparallel AB$, pak má úloha právě dvě řešení; jestliže právě jeden z bodů A, B leží na přímce p, jedná se o Pappovu úlohu Bpp.

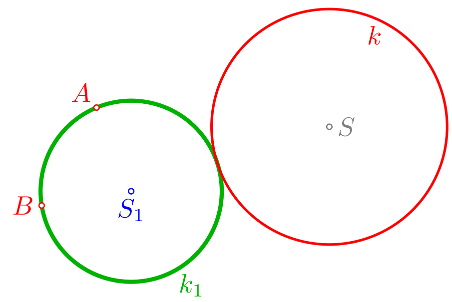
4.4. Apolloniova úloha BBk

Řešené úlohy

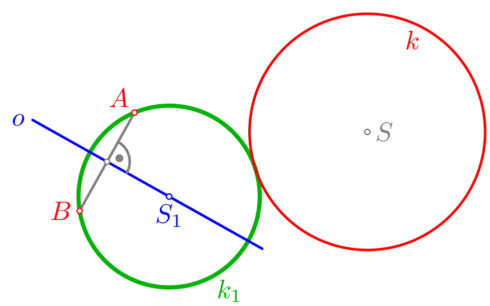
Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází danými různými body A, B a dotýká se dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:

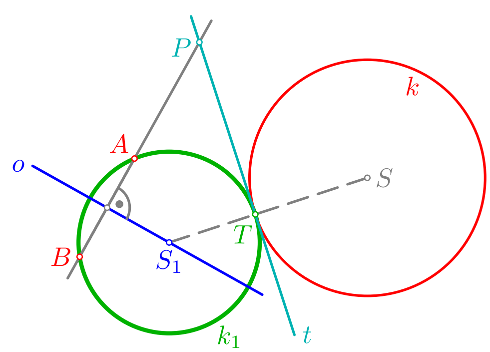
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k_1 o středu S_1 a libovolném poloměru r_1, zvolme na ní dva body A, B, doplňme dotykovou kružnici $k(S, r)$ a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí...



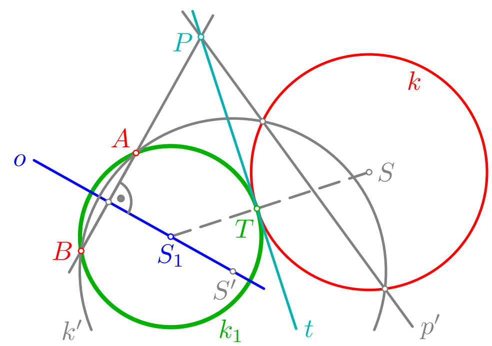
- střed S_1 kružnice k_1 musí ležet na ose o úsečky AB (viz množinu $M2$ na straně 11 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti)



- společná tečna t kružnic k, k_1 je současně také jejich chordálou; průsečík $P = t \cap AB$ má tedy stejnou mocnost ke kružnici k i ke kružnici k_1



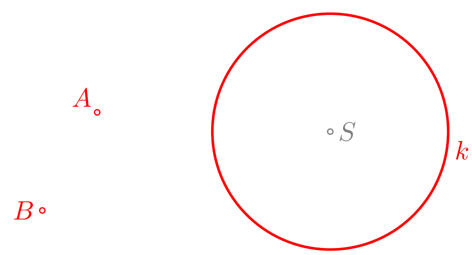
- bodem P pak musí procházet i chordála p' dané kružnice k a zvolené kružnice $k'(S', r')$, která prochází body A, B (tj. $S' \in o$); díky tomu lze potenční střed P kružnic k, k', k_1 a následně tečnu t sestrojit ...



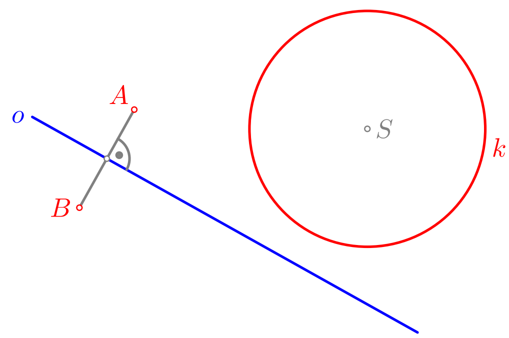
$\square$

Konstrukce:

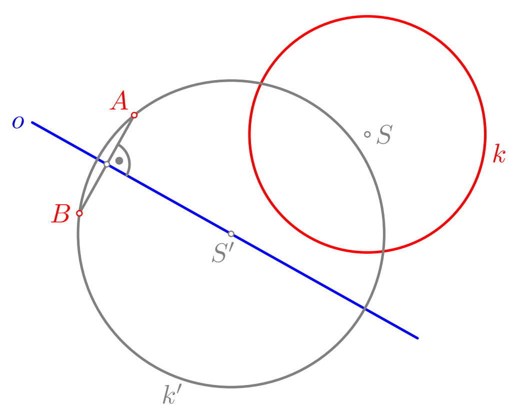
- zadání úlohy: jsou dány různé body A, B a kružnice $k(S, r)$



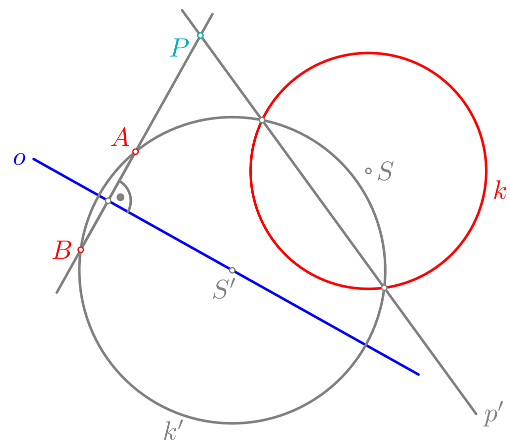
- podle rozboru sestrojme nejprve osu o úsečky AB



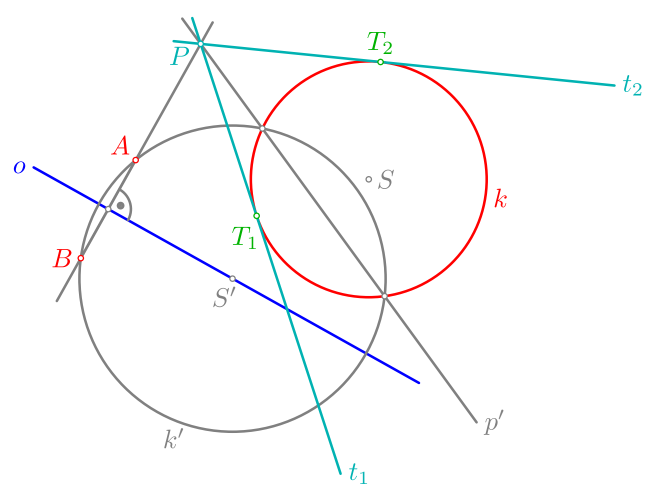
- dále zvolme kružnici $k'(S', r')$ tak, aby procházela body A, B (její střed S' tedy leží na ose o) a aby protínala kružnici k



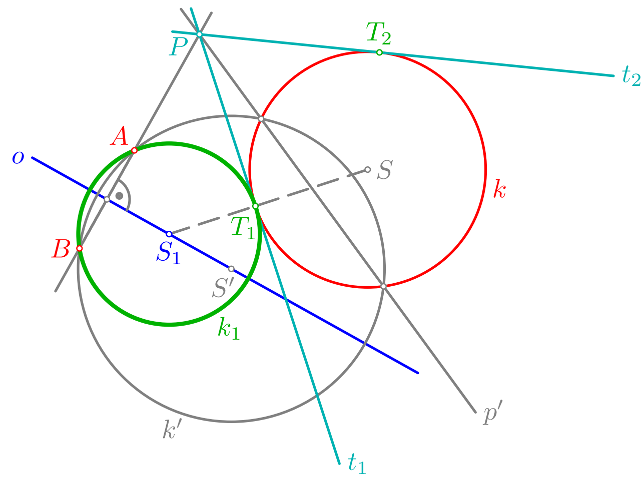
- sestrojme chordálu p' kružnic k, k' a na ní bod $P = p' \cap AB$, který je hledaným potenčním středem



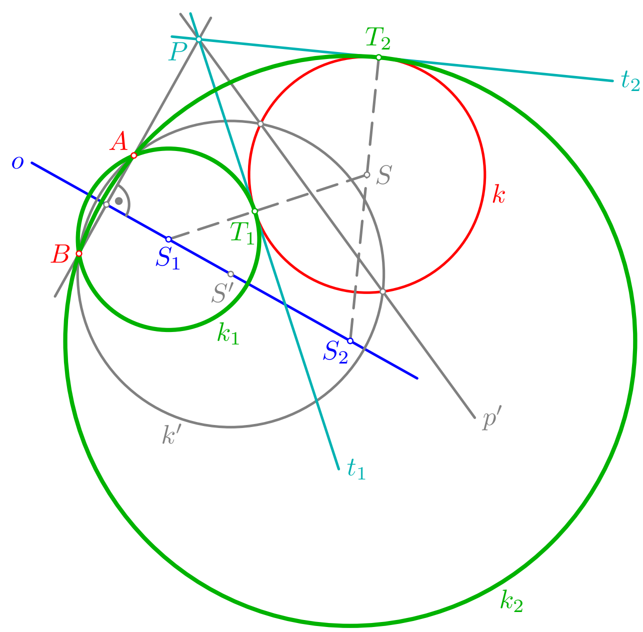
- bodem P veďme tečny t_1, t_2 ke kružnici k a doplňme příslušné body T_1, T_2 dotyku (viz úloha Tečny z bodu ke kružnici na straně 28)



- střed S_1 hledané kružnice $k_1(S_1, r_1)$ pak leží na ose o a na přímce ST_1 (kružnice k a k_1 mají vnější dotyk)



- podobně protíná přímka ST_2 osu o v bodě S_2, který je středem druhé hledané kružnice $k_2(S_2, r_2)$, jež také prochází danými body A, B a dotýká se dané kružnice k (kružnice k a k_2 mají vnitřní dotyk)



□

Diskuze:

Úloha nemá žádné řešení, jestliže jeden z bodů A, B leží ve vnitřní a druhý ve vnější oblasti kružnice k nebo jestliže oba body A, B leží na kružnici k; leží-li oba body A, B ve vnitřní nebo ve vnější oblasti kružnice k, pak má úloha právě dvě řešení; jestliže právě jeden z bodů A, B leží na kružnici k, jedná se o Pappovu úlohu BBk, která se řeší pomocí množin všech bodů dané vlastnosti a má právě jedno řešení.

5. Geometrická zobrazení v rovině

Výklad

- **geometrickým zobrazením v rovině** se rozumí předpis, který libovolnému bodu X roviny přiřazuje jako jeho obraz právě jeden bod X' téže roviny
- jestliže v daném zobrazení splývá bod X se svým obrazem X', pak se bod $X = X'$ nazývá **samodružným bodem daného zobrazení**
- nechť U je geometrický útvar a U' jeho obraz v daném zobrazení; jestliže obraz každého bodu útvaru U je opět bodem tohoto útvaru, pak obraz U' splývá s útvarem U a takový útvar $U = U'$ se nazývá **samodružným útvarem daného zobrazení**; je-li každý bod samodružného útvaru U samodružný, pak je útvar U tzv. **silně samodružný** v daném zobrazení, jinak je **slabě samodružný**

5.1. Shodná zobrazení (shodnosti) v rovině

Výklad

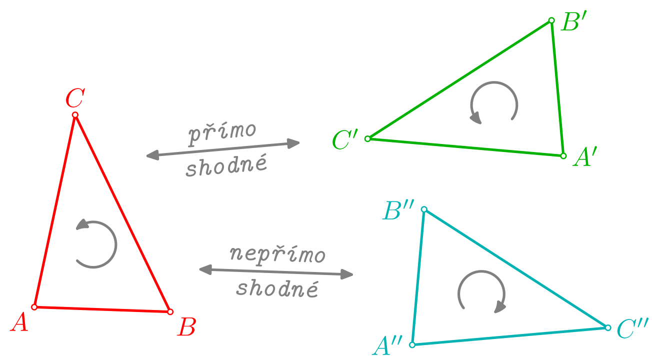
- prosté zobrazení v rovině se nazývá **shodným zobrazením** nebo krátce **shodností**, právě když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' v tomto zobrazení platí $|X'Y'| = |XY|$, tj. **shodnost zachovává délku úsečky**
- zvláštním případem shodnosti je tzv. **identita**, v níž je každému bodu X roviny přiřazen tentýž bod $X' = X$

Základní vlastnosti shodností

- obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ s ní shodná ($|A'B'| = |AB|$)
- obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky, tj. shodnost zachovává rovnoběžnost
- obrazem každého trojúhelníka ABC je trojúhelník $A'B'C'$ s ním shodný

Rozdělení shodností

- **přímé** – libovolný trojúhelník a jeho obraz jsou **přímo** shodné, tj. mají **souhlasnou** orientaci vrcholů
  - identita, posunutí (translace), otočení (rotace), středová souměrnost
- **nepřímé** – libovolný trojúhelník a jeho obraz jsou **nepřímo** shodné, tj. mají **nesouhlasnou** orientaci vrcholů
  - osová souměrnost, posunutá souměrnost



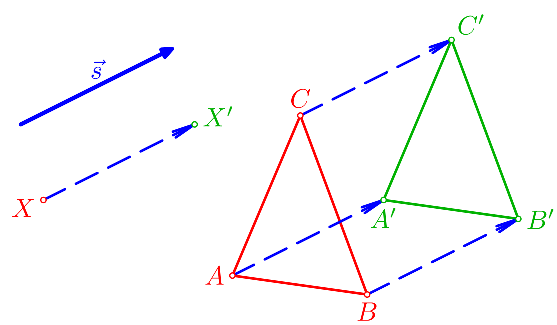
Skládání shodností

- složením dvou přímých nebo dvou nepřímých shodností vznikne přímá shodnost
- složením přímé a nepřímé shodnosti vznikne nepřímá shodnost
- každou přímou shodnost lze složit ze dvou osových souměrností
- každou nepřímou shodnost lze složit ze středové souměrnosti a osové souměrnosti

5.1.1. Posunutí (translace)

Výklad

- **posunutí** (**translace**) v rovině je přímá shodnost, která každému bodu X roviny přiřazuje obraz X' tak, že platí $\overrightarrow{XX'} = \vec{s}$, kde $\vec{s}$ je daný vektor
- vektoru $\vec{s}$ se říká **vektor posunutí**, jeho délka udává **délku posunutí** a jeho směr určuje **směr posunutí**
- posunutí je jednoznačně určeno vektorem posunutí
- posunutí nemá samodružné body; (slabě) samodružné jsou všechny přímky rovnoběžné se směrem posunutí
- je-li přímka p' obrazem dané přímky p v posunutí, pak platí $p \parallel p'$



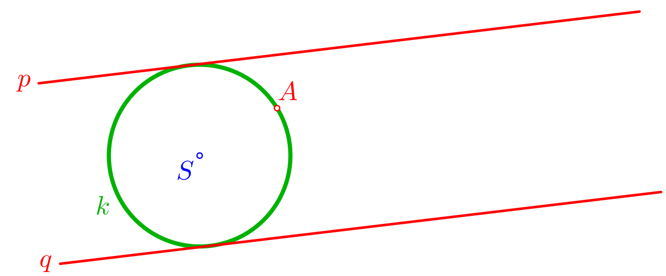
Varianta Apolloniovy úlohy Bpp

Řešené úlohy

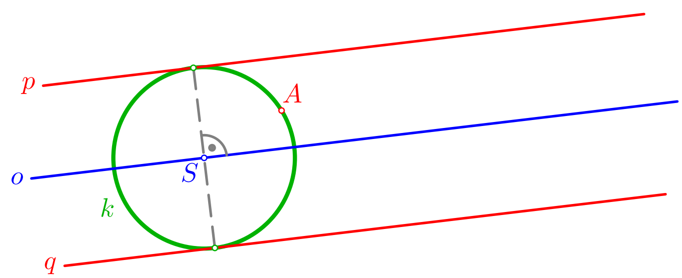
Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a dotýká se daných různých rovnoběžných přímek p, q ($p \parallel q, p \neq q$).

Rozbor úlohy:

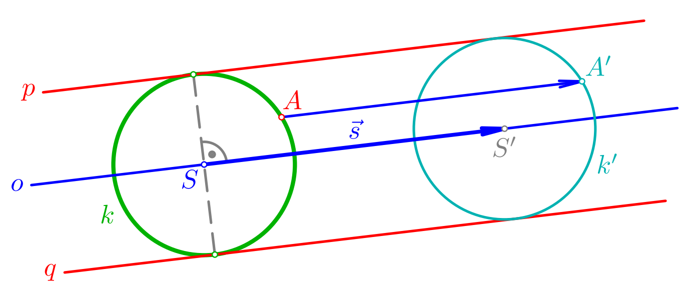
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k o středu S a libovolném poloměru r, zvolme na ní bod A, přidejme rovnoběžné tečny p, q a nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít ...



- střed S kružnice k zřejmě musí ležet na ose o pásu omezeného rovnoběžkami p, q (viz množinu $M3$ na straně 12 v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti)



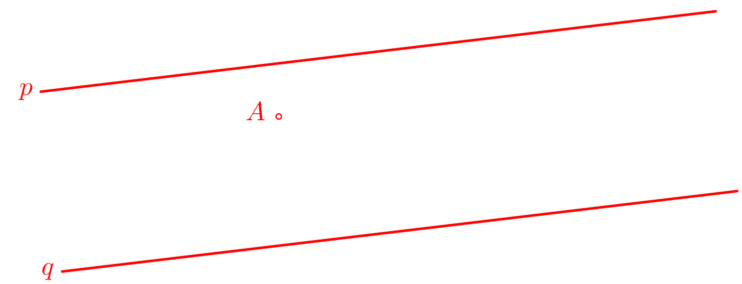
- na přímce o zvolme bod S' tak, aby kružnice $k'(S', r{=}|SA|)$ kolem něj opsaná neprocházela bodem A; kružnice k' se také dotýká rovnoběžek p, q a odpovídá kružnici k v posunutí určeném směrovým vektorem $\vec{s} = S' - S$; v tomto posunutí je obrazem bodu $A \in k$ bod $A' \in k'$; v následující konstrukci zkusme tedy nejprve zvolit kružnici k' a jejím posunutím v opačném směru vyřešíme danou úlohu



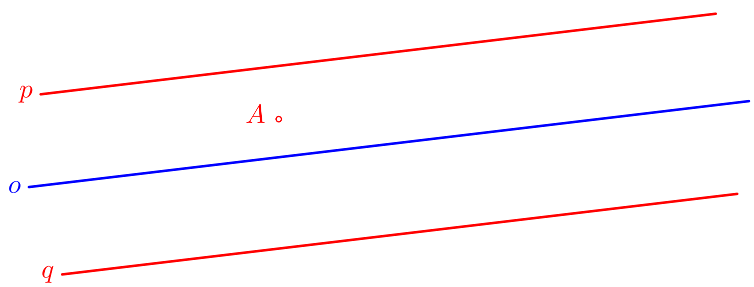
□

Konstrukce:

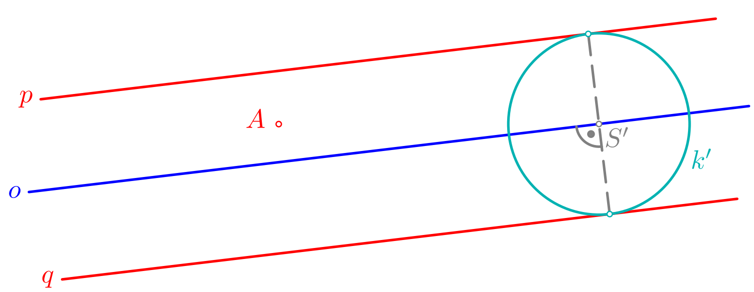
- zadání úlohy: je dán bod A a dvě různé rovnoběžné přímky p, q ($p \parallel q, p \neq q$)



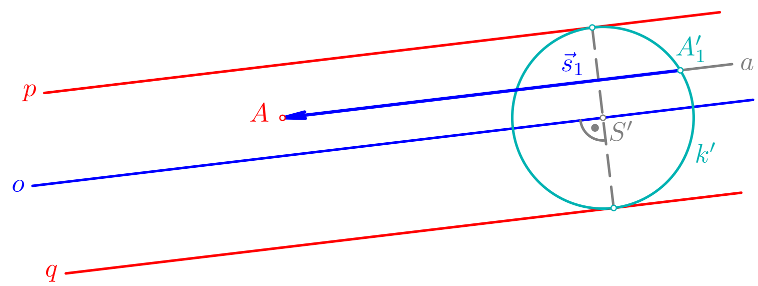
- nejprve sestrojme osu o ($o \parallel p \parallel q$) rovinného pásu omezeného rovnoběžkami p, q



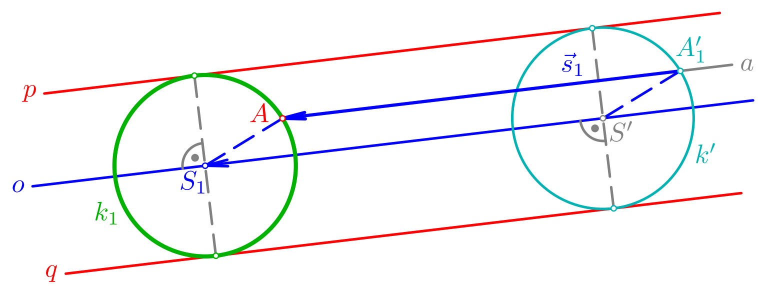
- dále zvolme na přímce o bod S' a doplňme kružnici $k'(S', r{=}|op|{=}|oq|)$, která se dotýká přímek p, q



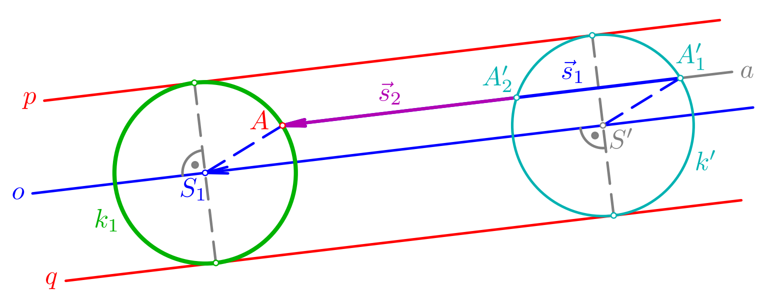
- veďme přímku a tak, že $a \parallel o, A \in a$, a najděme jeden její průsečík A_1' s kružnicí k'; body A, A_1' pak určují vektor $\vec{s}_1 = A - A_1'$ zpětného posunutí T_1, o němž byla zmínka v rozboru úlohy



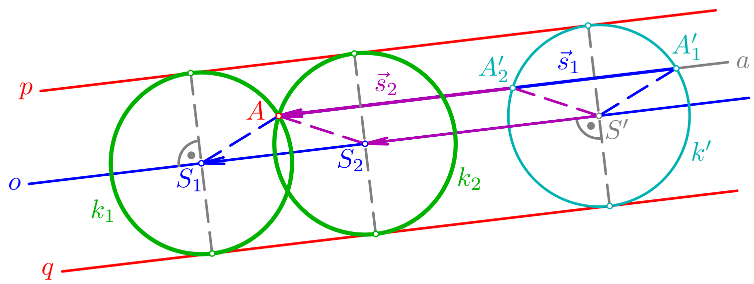
- v posunutí T_1 sestrojme obraz S_1 středu S' (platí $S_1A \parallel S'A_1'$) a tím získáme střed hledané kružnice $k_1(S_1, r)$, která prochází daným bodem A a dotýká se daných různých rovnoběžek p, q



- přímka a protíná kružnici k' ještě v bodě A_2', který spolu s bodem A určuje vektor $\vec{s}_2 = A - A_2'$ zpětného posunutí T_2



- opět najděme obraz S_2 středu S' v posunutí T_2 (podobně platí $S_2A \parallel S'A'_2$) a obdržíme střed kružnice $k_2(S_2, r)$, která je druhým řešením dané úlohy



□

Diskuze:

Úloha má právě dvě řešení, leží-li daný bod A uvnitř pásu určeného danými různými rovnoběžkami p, q; jestliže bod A leží na některé z přímek p nebo q ($A \in p$ nebo $A \in q$), pak má úloha jediné řešení (varianta Pappovy úlohy Bpp); leží-li bod A vně pásu určeného rovnoběžkami p, q, pak úloha nemá žádné řešení.

Poznámka:

Na závěr poznamenejme, že úlohu je možno řešit snadno také jen s použitím množin všech bodů dané vlastnosti (viz množiny $M1$ na straně 11 a $M3$ na straně 12).

5.1.2. Otočení (rotace)

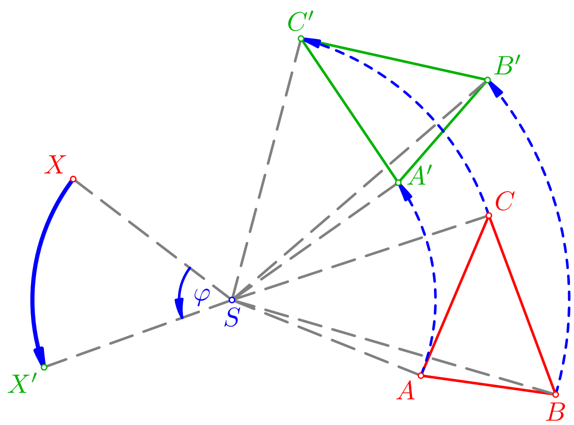
Výklad

- **otočení** (**rotace**) **kolem středu** S o úhel velikosti φ ($0° < \varphi \leq 360°$) v daném kladném nebo záporném smyslu je přímá shodnost, která přiřazuje bodu S týž bod $S' = S$ a každému jinému bodu $X \neq S$ roviny přiřazuje obraz X' tak, že platí:

  1. bod X' leží na kružnici o středu S a poloměru $|SX|$
  2. polopřímka SX' se získá otočením polopřímky SX o daný úhel otočení velikosti φ v daném smyslu (kladném, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček; nebo záporném, tj. po směru pohybu hodinových ručiček)

- otočení je jednoznačně určeno **středem otočení** S, velikostí **úhlu otočení** φ a daným **smyslem otočení**

- pro velikost $\varphi = 360°$ úhlu otočení jsou všechny body roviny samodružné, pro $\varphi \neq 360°$ je samodružný pouze střed S; pro velikost $\varphi = 360°$ úhlu otočení jsou všechny přímky roviny (silně) samodružné, pro velikost $\varphi = 180°$ jsou (slabě) samodružné všechny přímky jdoucí bodem S, v ostatních případech ($\varphi \neq 360°, \varphi \neq 180°$) otočení samodružné přímky nemá



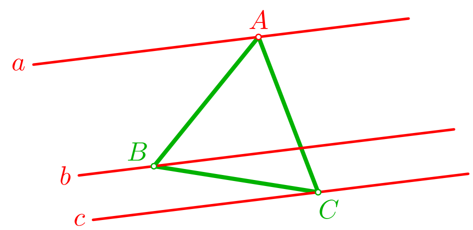
Konstrukce rovnostranného trojúhelníka z daných prvků

Řešené úlohy

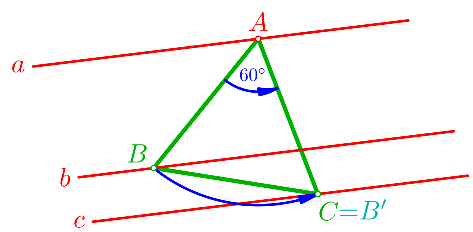
Příklad: Jsou dány tři navzájem různé rovnoběžné přímky a, b, c ($a \parallel b \parallel c$) a bod $A \in a$; sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby byl $B \in b$ a $C \in c$.

Rozbor úlohy:

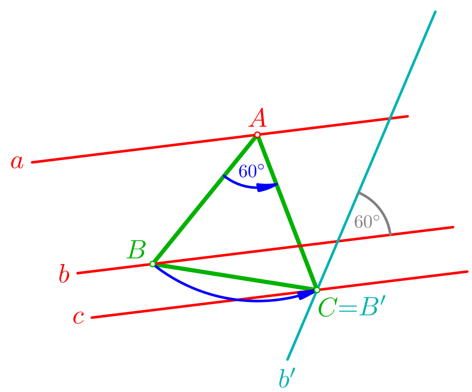
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme rovnostranný trojúhelník ABC, jeho vrcholy A, B, C veďme po řadě tři různé rovnoběžné přímky a, b, c a nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít …



- z vlastností rovnostranného trojúhelníka plyne, že otočení kolem středu A o úhel velikosti $60°$ v kladném smyslu přiřazuje vrcholu B obraz $B' = C$



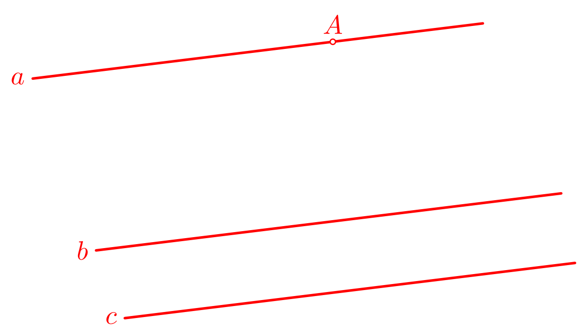
- pro řešení úlohy bude tedy stačit v tomto otočení sestrojit obraz b' přímky b a najít průsečík přímek b', c (dá se ukázat, že jeden z úhlů, které svírají přímka b a její obraz b' má velikost rovnu velikosti úhlu použitého otočení)



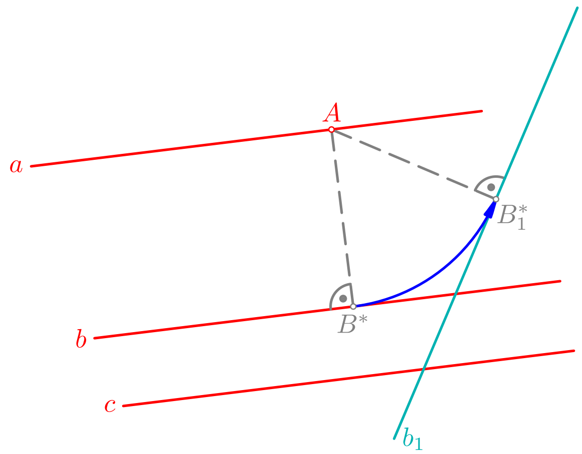
□

Konstrukce:

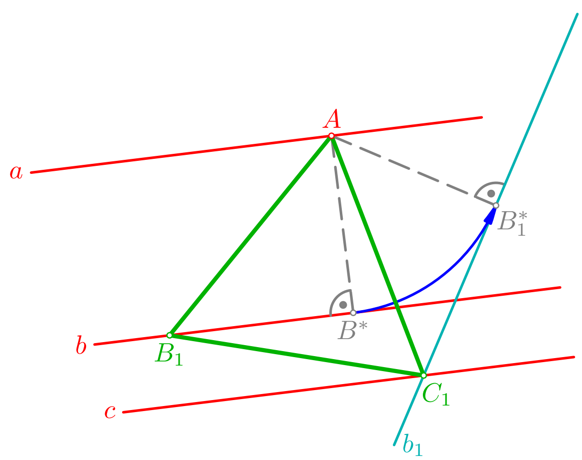
- zadání úlohy: jsou dány tři navzájem různé rovnoběžné přímky a, b, c $(a \parallel b \parallel c)$ a bod $A \in a$



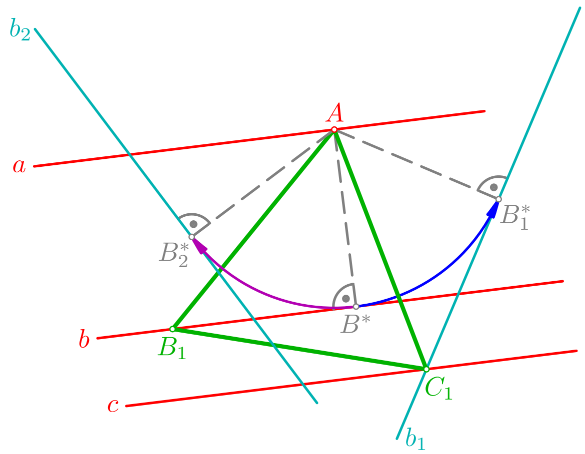
- sestrojme obraz b_1 přímky b v otočení R_1 kolem středu A o úhel velikosti 60° v kladném směru a to například takto: na přímce b sestrojme bod B^* tak, že $AB^* \perp b$, určeme jeho obraz B_1^* v otočení R_1 a tímto veďme přímku $b_1 \perp AB_1^*, B_1^* \in b_1$



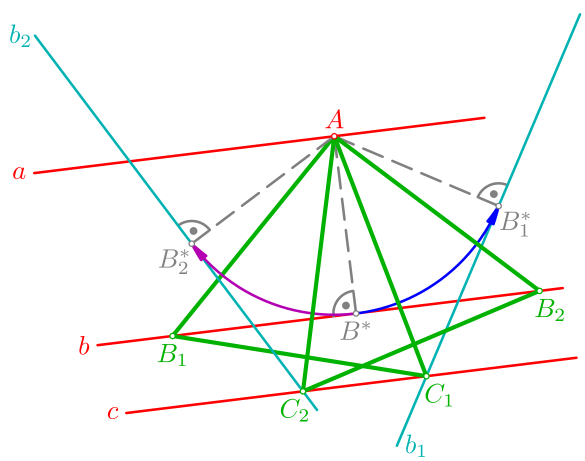
- průsečík $C_1 = b_1 \cap c$ je pak vrcholem hledaného rovnostranného trojúhelníka AB_1C_1, jehož třetí vrchol B_1 najdeme na přímce b



- tytéž konstrukce proveďme také v otočení R_2, které se od R_1 liší pouze záporným smyslem otočení: obrazem B_2^* bodu B^* v otočení R_2 sestrojme přímku $b_2 \perp AB_2^*, B_2^* \in b_2$ jako obraz přímky b v tomto otočení R_2



- průsečík $C_2 = b_2 \cap c$ je pak rovněž vrcholem hledaného rovnostranného trojúhelníka AB_2C_2, který je druhým řešením dané úlohy; trojúhelníky AB_1C_1 a AB_2C_2 jsou zřejmě osově souměrné podle přímky AB^*



□

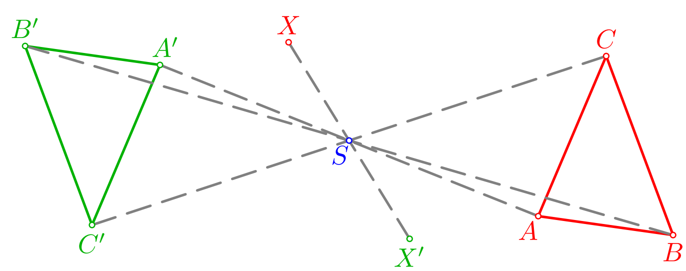
Diskuze:

Úloha má vždy právě dvě řešení osově souměrná podle přímky jdoucí bodem A kolmo k přímce a.

5.1.3. Středová souměrnost

Výklad

- **středová souměrnost se středem** S je přímá shodnost, která přiřazuje bodu S týž bod $S' = S$ a každému jinému bodu $X \neq S$ roviny přiřazuje obraz X' tak, že platí:
    1. bod X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX
    2. $|SX'| = |SX|$
- středová souměrnost je jednoznačně určena **středem** S **souměrnosti**
- samodružný je právě jen střed S souměrnosti; (slabě) samodružné jsou všechny přímky jdoucí bodem S
- středová souměrnost je speciálním případem otočení o úhel velikosti 180°
- je-li přímka p' obrazem přímky p v dané středové souměrnosti, pak platí $p' \parallel p$



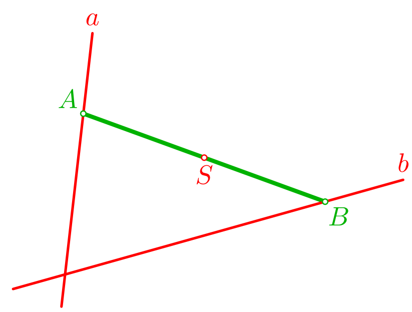
Konstrukce úsečky z daných prvků

Řešené úlohy

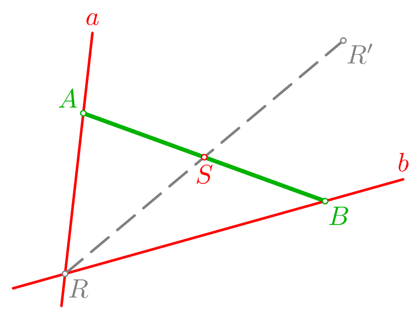
Příklad: Jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a bod S, kde $S \notin a, S \notin b$; sestrojte úsečku AB tak, aby měla střed v bodě S a aby platilo $A \in a, B \in b$.

Rozbor úlohy:

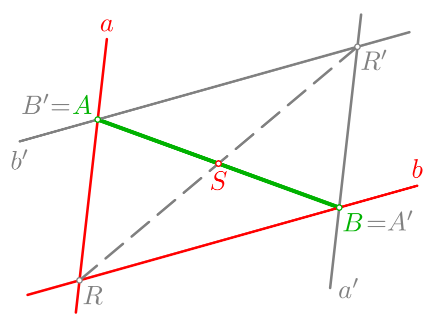
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: různoběžky a, b procházejí po řadě krajními body A, B úsečky AB, která má střed v bodě S; nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít ...



- uvažujme průsečík $R = a \cap b$ a jeho obraz R' ve středové souměrnosti o středu S



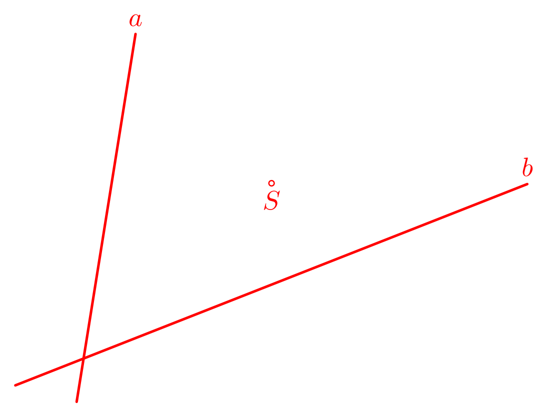
- v této středové souměrnosti je obrazem bodu A bod $A' = B$ a obrazem přímky $a = AR$ je přímka $a' = BR'$, kde $a' \parallel a$; podobně je obrazem bodu B bod $B' = A$ a obrazem přímky b je přímka $b' = AR', b' \parallel b$



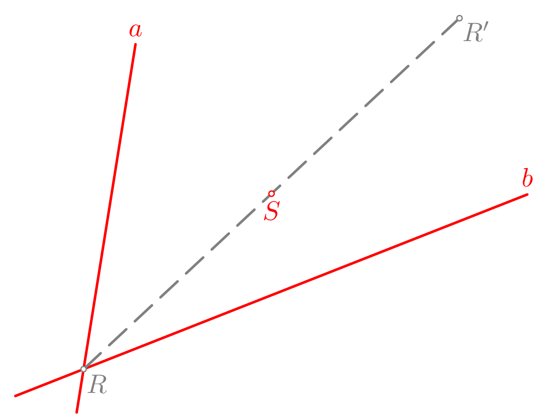
□

Konstrukce:

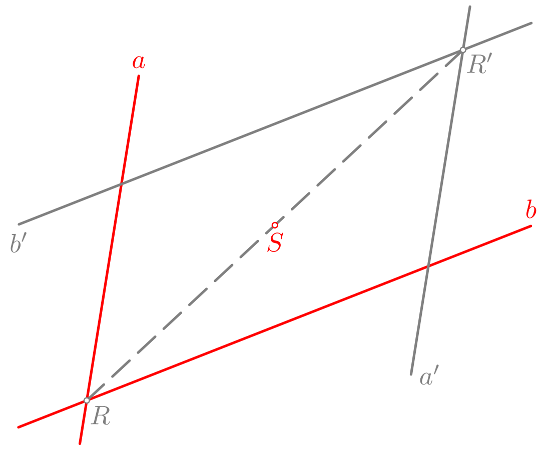
- zadání úlohy: jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a bod S, pro který platí $S \notin a, S \notin b$



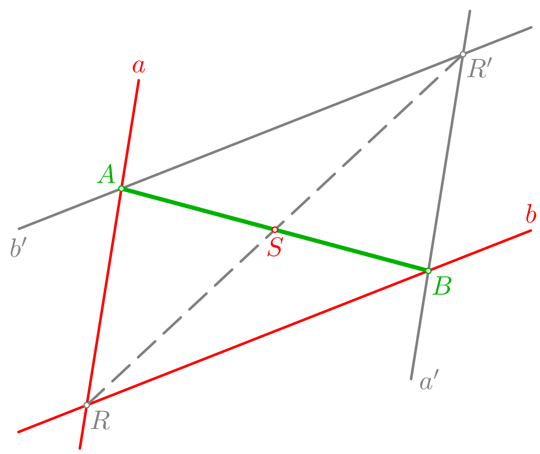
- sestrojme bod R' souměrný podle středu S s průsečíkem $R = a \cap b$



- bodem R' veďme přímku $a' \parallel a, R' \in a'$ a přímku $b' \parallel b, R' \in b'$



- průsečík $A = a \cap b'$ a průsečík $B = b \cap a'$ jsou pak krajními body hledané úsečky AB, která má střed v daném bodě S



□

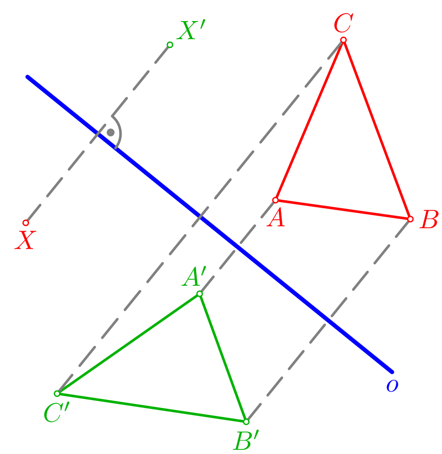
Diskuze:

Úloha má vždy právě jedno řešení.

5.1.4. Osová souměrnost

Výklad

- **osová souměrnost s osou** o je nepřímá shodnost, která každému bodu X roviny přiřazuje obraz X' tak, že platí:
  1. bod $X' = X$, právě když bod X leží na ose o souměrnosti
  2. bod X' leží na kolmici k ose o vedené bodem X a to v opačné polorovině určené osou o než bod X
  3. $|oX'| = |oX|$
- osová souměrnost je jednoznačně určena **osou** o **souměrnosti**
- samodružnými body jsou právě jen všechny body osy o; silně samodružná je osa o, slabě samodružné jsou všechny přímky kolmé k ose o
- přímka p a její obraz p' mají stejnou odchylku od osy o souměrnosti



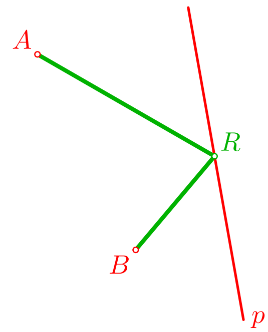
Konstrukce bodu dané vlastnosti

Řešené úlohy

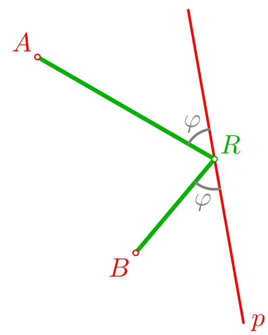
Příklad: Je dána přímka p a dva různé body A, B ($A \neq B$) ležící uvnitř jedné poloroviny s hraniční přímkou p; sestrojte na přímce p bod R, v němž se odrazí paprsek vyslaný z bodu A do bodu B.

Rozbor úlohy:

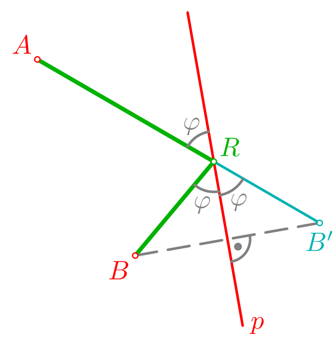
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: paprsek, který se odráží v bodě R přímky p, prochází bodem A i bodem B; nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít ...



- úsečky AR a BR mají tedy stejnou odchylku φ od přímky p



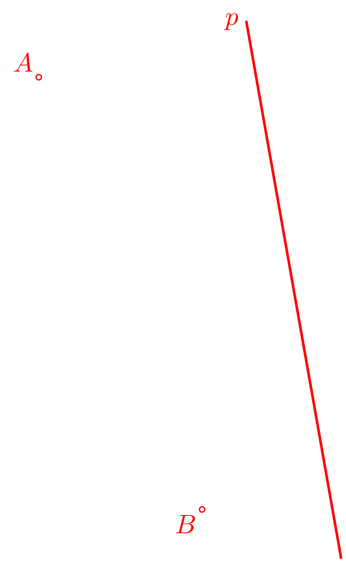
- uvažujeme-li obraz B' bodu B v osové souměrnosti s osou p, pak úsečka $B'R$ má od přímky p tutéž odchylku φ a body A, R, B' tudíž leží v jedné přímce



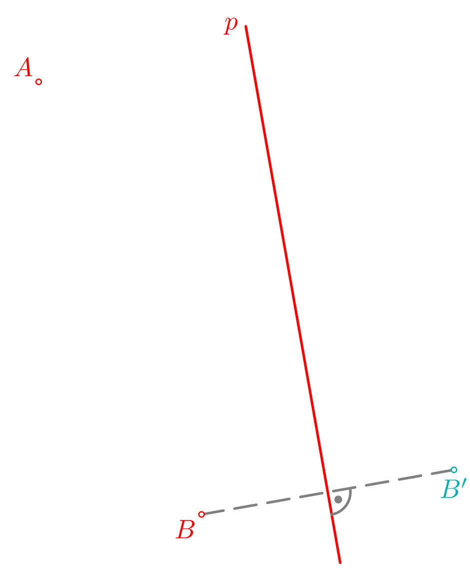
□

Konstrukce:

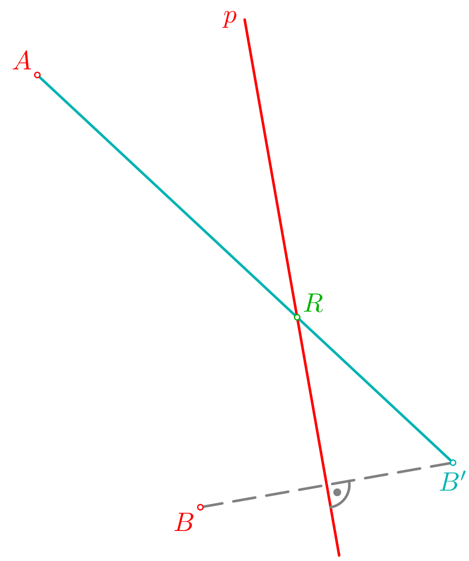
- zadání úlohy: je dána přímka p a dva různé body A, B, které leží uvnitř jedné poloroviny určené přímkou p



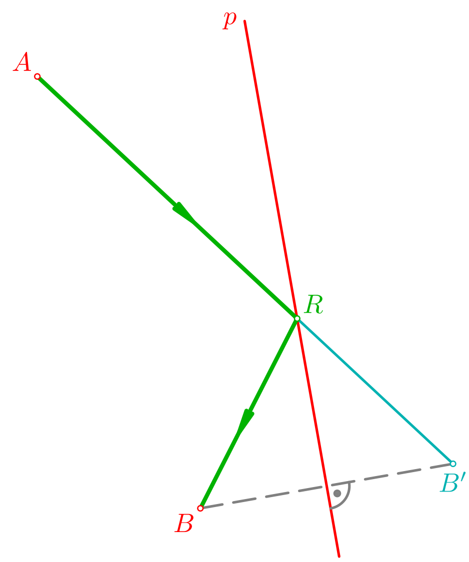
- sestrojme obraz B' bodu B v osové souměrnosti s osou p



- průsečík $R = p \cap AB'$ je pak hledaným bodem odrazu na dané přímce p



- na závěr doplňme průběh paprsku, který vychází z daného bodu A a v sestrojeném bodě R se odráží od dané přímky p do daného bodu B



□

Diskuze:

Úloha má vždy právě jedno řešení.

Poznámka:

Tato úloha může mít i jiné zadání: na přímce p sestrojte bod R tak, aby délka lomené čáry ARB byla co nejmenší.

5.2. Podobná zobrazení (podobnosti) v rovině

- prosté zobrazení v rovině se nazývá **podobným zobrazením** nebo krátce **podobností**, právě když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' v tomto zobrazení platí $|X'Y'| = k|XY|$, kde $k \neq 0$ je daná konstanta zvaná **koeficient podobnosti**
- zvláštním případem podobnosti je pro $k = 1$ **shodnost**

Základní vlastnosti podobností

- obrazem každé úsečky AB v podobnosti s koeficientem k je úsečka $A'B'$ délky $|A'B'| = = k|AB|$
- obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky, tj. podobnost zachovává rovnoběžnost
- obrazem každého trojúhelníka ABC je podobný trojúhelník $A'B'C'$

Významný zástupce podobného zobrazení

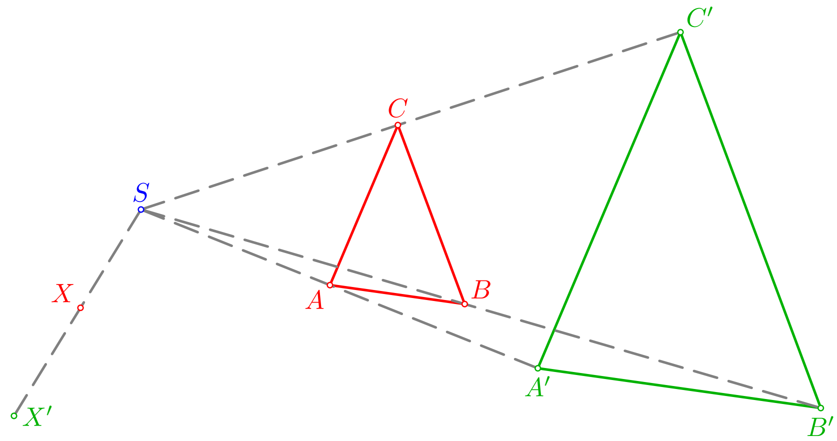
- stejnolehlost

5.2.1. Stejnolehlost

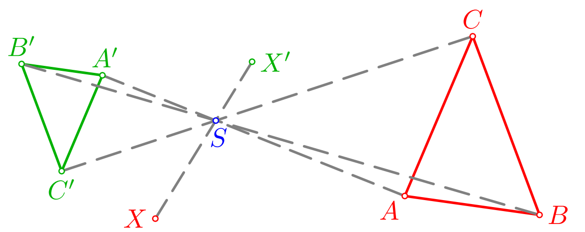
Výklad

- **stejnolehlost se středem** S a **koeficientem** k je přímá podobnost, která:
  1. bodu S přiřazuje obraz $S' = S$
  2. bodu $X \neq S$ přiřazuje obraz X' tak, že platí $|SX'| = |k| \cdot |SX|$ a přitom bod X' leží na polopřímce SX pro $k > 0$ (obr. a), resp. bod X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX pro $k < 0$ (obr. b)

a) $k > 0$ a $|k| > 1$



b) $k < 0$ a $|k| < 1$



- stejnolehlost je jednoznačně určena **středem** S a **koeficientem** k
- stejnolehlost se středem S a koeficientem $k = -1$ je středová souměrnost se středem S; stejnolehlost s koeficientem $k = 1$ je identita
- pro $k \neq 1$ je samodružným bodem právě jen střed S, slabě samodružné jsou všechny přímky procházející bodem S
- je-li přímka p' obrazem přímky p v dané stejnolehlosti, pak platí $p' \parallel p$
- obraz U' omezeného útvaru U je **zvětšený** pro $|k| > 1$ (obr. a) a **zmenšený** pro $|k| < 1$ (obr. b)
- každé dvě kružnice v rovině jsou stejnolehlé

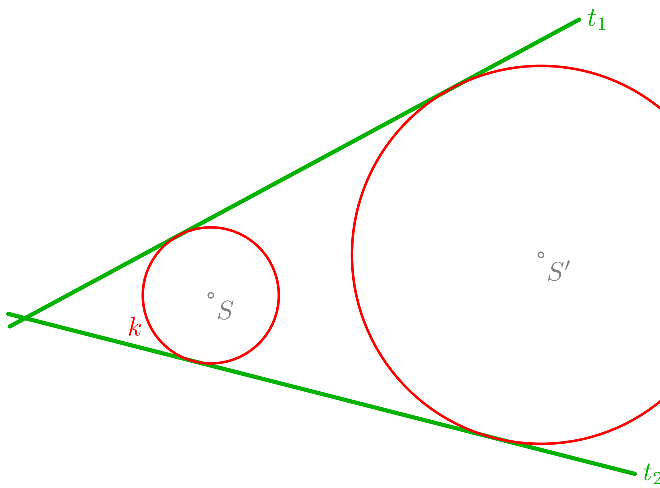
Společné tečny dvou kružnic s různými poloměry

Řešené úlohy

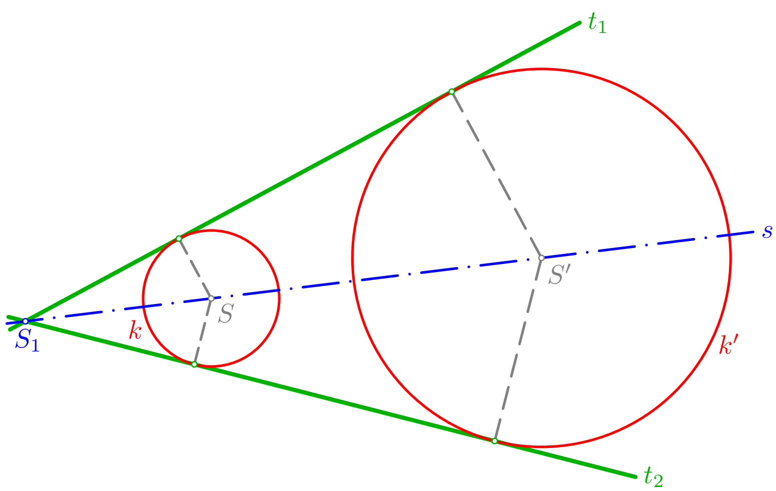
Příklad: Sestrojte společné tečny dvou daných kružnic $k(S, r)$ a $k'(S', r')$, kde $r \neq r'$.

Rozbor úlohy:

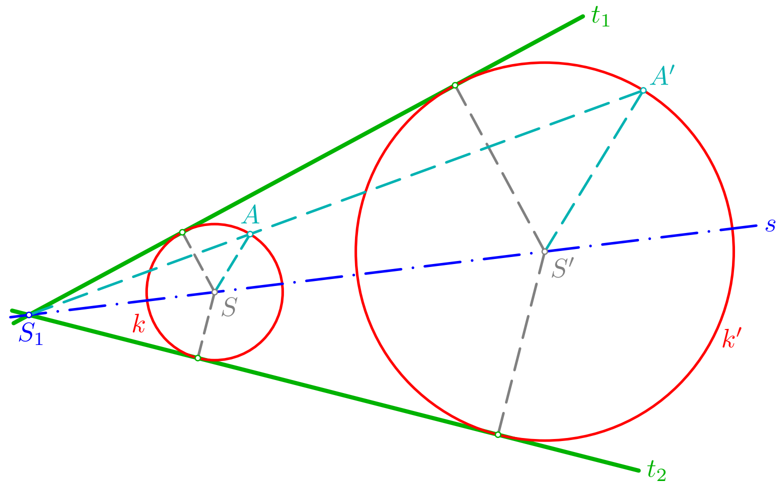
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme dvě kružnice $k(S, r), k'(S', r')$ o nestejných poloměrech, doplňme jejich společné tečny t_1, t_2, a nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít ...



- z vlastností stejnolehlosti vyplývá, že průsečík S_1 tečen t_1, t_2 se střednou $s = SS'$ daných kružnic k, k' je středem stejnolehlosti, v níž si tyto kružnice odpovídají



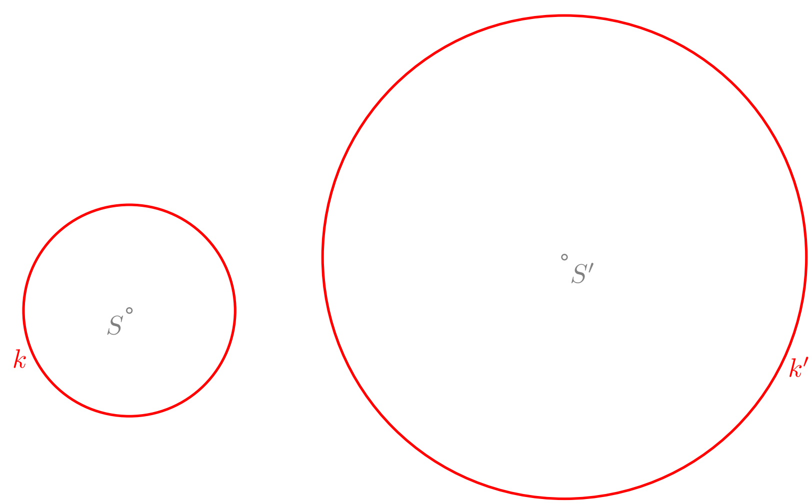
- ke konstrukci bodu S_1 využijeme vhodně zvolený bod $A \in k$ a jemu odpovídající obraz $A' \in k'$ ve zmíněné stejnolehlosti, přičemž platí $AS \parallel A'S'$



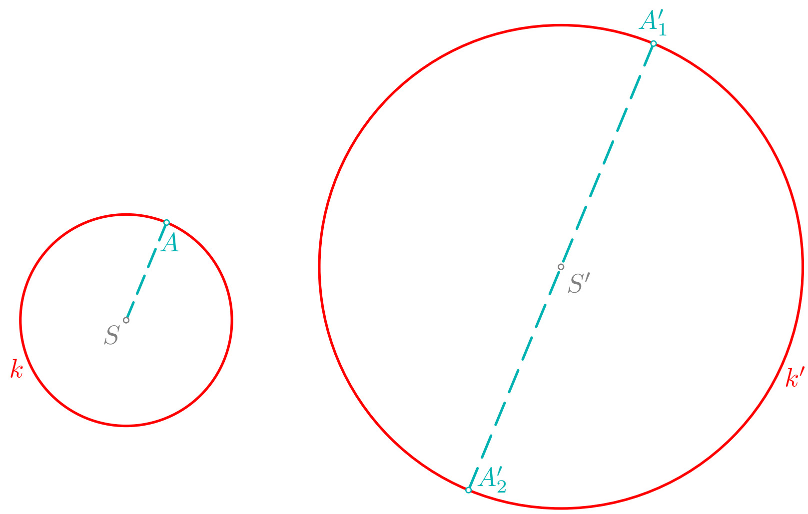
□

Konstrukce:

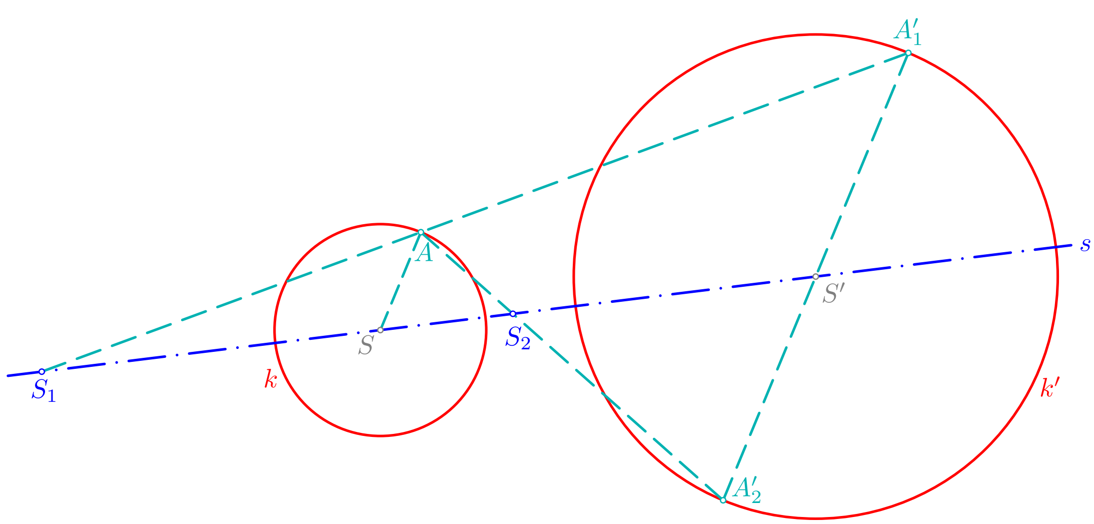
- zadání úlohy: jsou dány kružnice $k(S, r)$ a $k'(S', r')$, kde $r \neq r'$



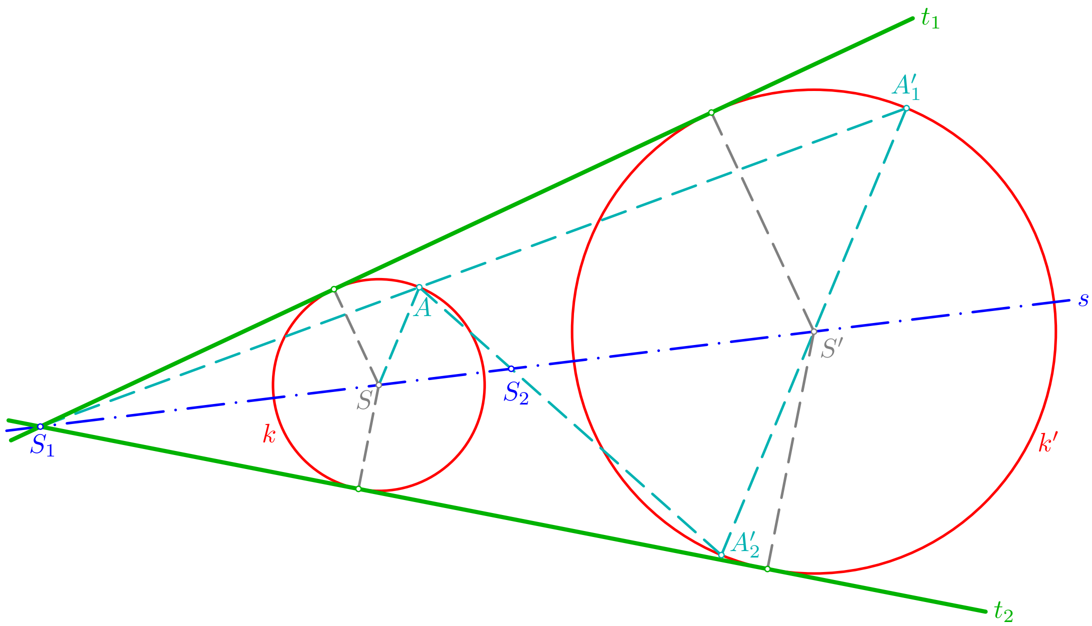
- na kružnici k zvolme bod A a na kružnici k' sestrojme krajní body průměru $A'_1A'_2 \parallel AS$



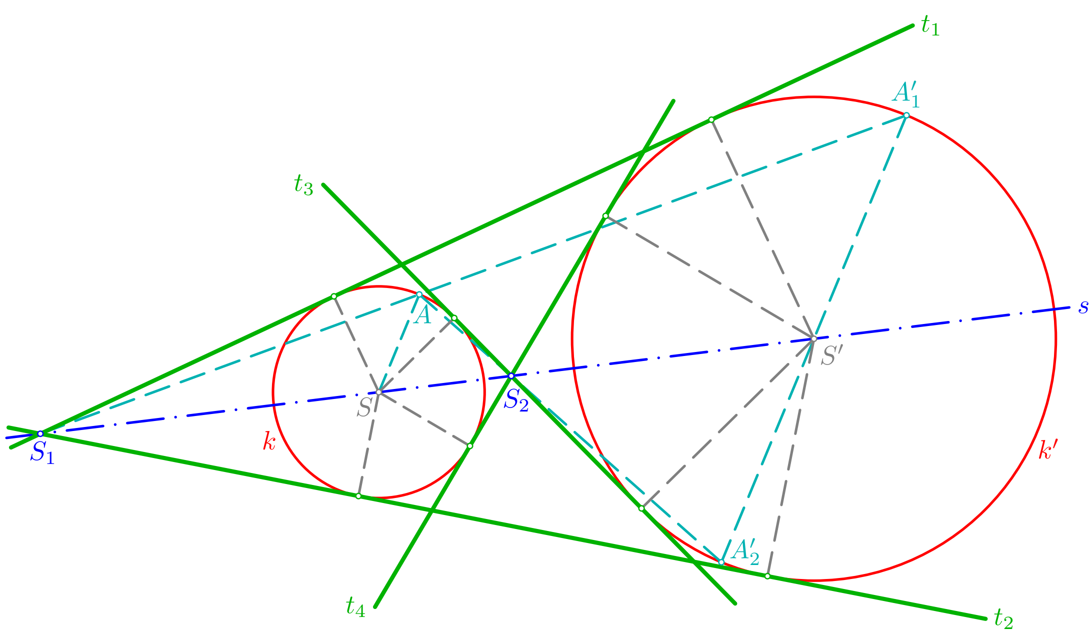
- bod $S_1 = s \cap AA'_1$, kde $s = SS'$, je pak tzv. **vnějším** středem stejnolehlosti mezi oběma kružnicemi, podobně je průsečík $S_2 = s \cap AA'_2$ tzv. **vnitřním** středem stejnolehlosti daných kružnic



- sestrojíme-li tečny t_1, t_2 z bodu S_1 ke kružnici k, budou to současně také tečny ke kružnici k'



- analogicky jsou tečny t_3, t_4 vedené z bodu S_2 ke kružnici k hledanými společnými tečnami obou daných kružnic $k(S, r), k'(S', r')$, kde $r \neq r'$



□

Diskuze:

Úloha může mít čtyři, tři, dvě, jedno nebo žádné řešení podle vzájemné polohy daných kružnic k, k'; podrobnější diskuze je přenechána čtenáři jako cvičení.

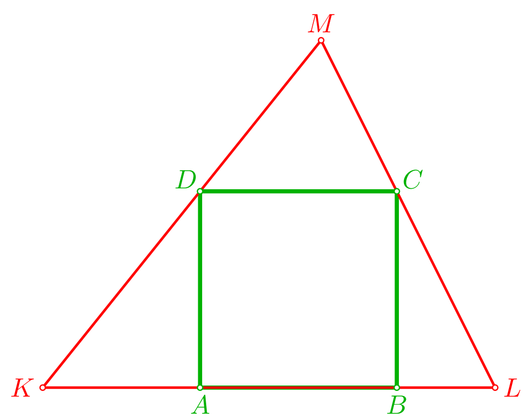
Čtverec vepsaný do ostroúhlého trojúhelníka

Řešené úlohy

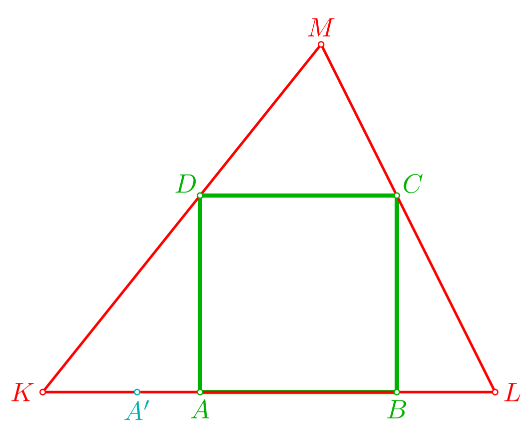
Příklad: Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby jeho vrcholy A, B ležely na straně KL, vrchol C ležel na straně LM a vrchol D na straně KM daného ostroúhlého trojúhelníka KLM.

Rozbor úlohy:

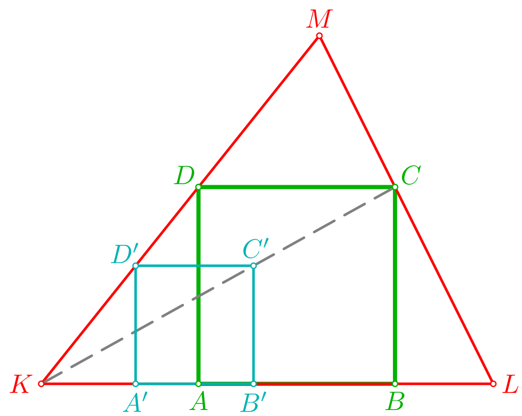
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: vrcholy A, B čtverce leží na straně KL trojúhelníka, vrchol C leží na straně LM a vrchol D na straně KM; nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít …



- na straně KL zvolme vhodně bod A' jako obraz bodu A ve stejnolehlosti se středem K



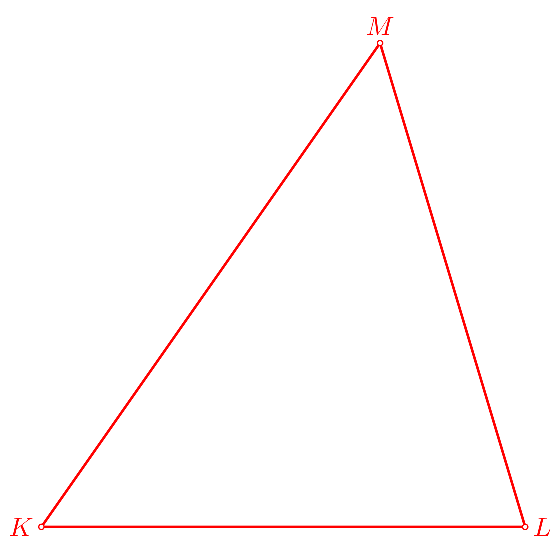
- v této stejnolehlosti se čtverec $ABCD$ zobrazí na čtverec $A'B'C'D'$, kde pouze vrchol C' nesplňuje zadání úlohy, a pro její řešení se zřejmě užije opačný postup konstrukcí ...



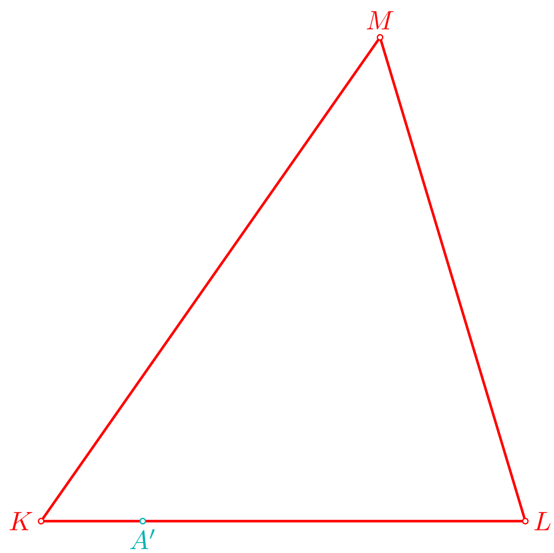
□

Konstrukce:

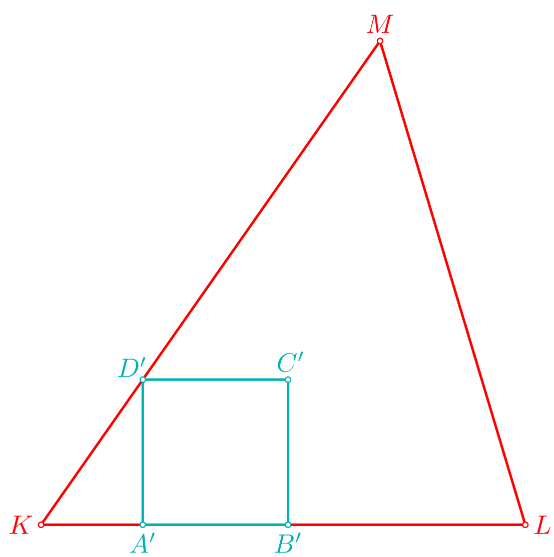
- zadání úlohy: ostroúhlý trojúhelník KLM



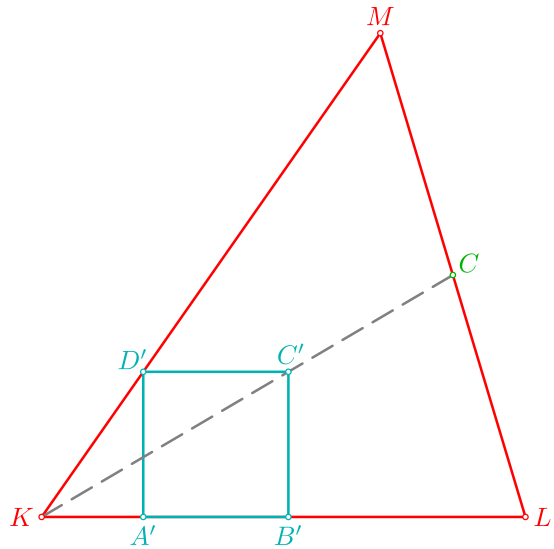
- na jeho straně KL zvolme vhodně bod A' (vhodně znamená uvnitř úsečky KM_1, kde M_1 by byl pravoúhlý průmět bodu M na stranu KL)



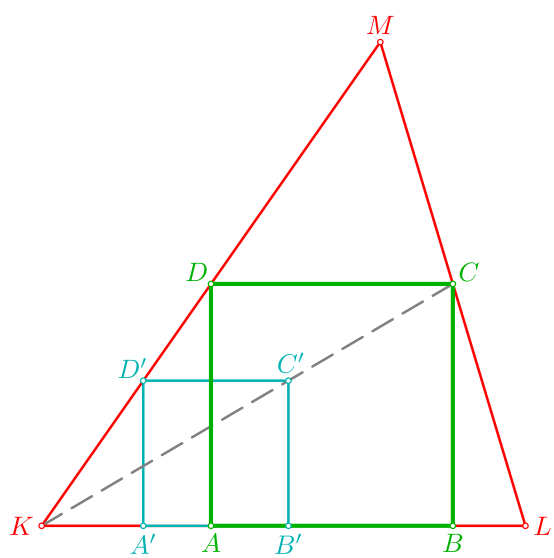
- dále sestrojme čtverec $A'B'C'D'$ tak, že vrchol $D' \in KM, A'D' \perp KL$ a vrchol B' leží na polopřímce $A'L$



- průsečík $C = KC' \cap LM$ je pak jedním vrcholem hledaného čtverce $ABCD$; současně je tím určena stejnolehlost o středu ve vrcholu K, v níž bod C' je obrazem bodu C



- v této stejnolehlosti se zachová rovnoběžnost a díky tomu jsou sestrojeny zbývající vrcholy A, B, D hledaného čtverce $ABCD$ vepsaného do daného ostroúhlého trojúhelníka KLM



□

Diskuze:

Úloha má vždy právě jedno řešení.

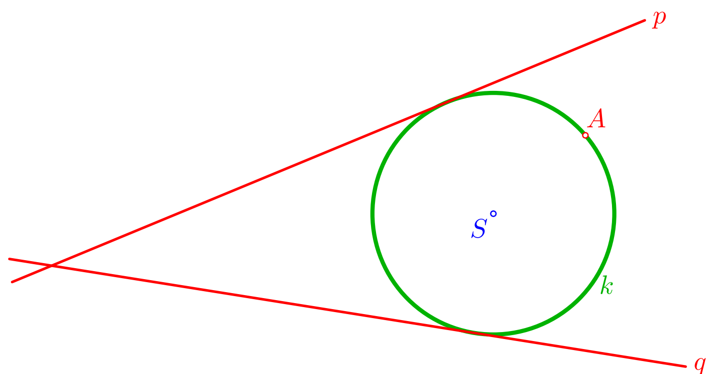
Varianta Apolloniovy úlohy Bpp

Řešené úlohy

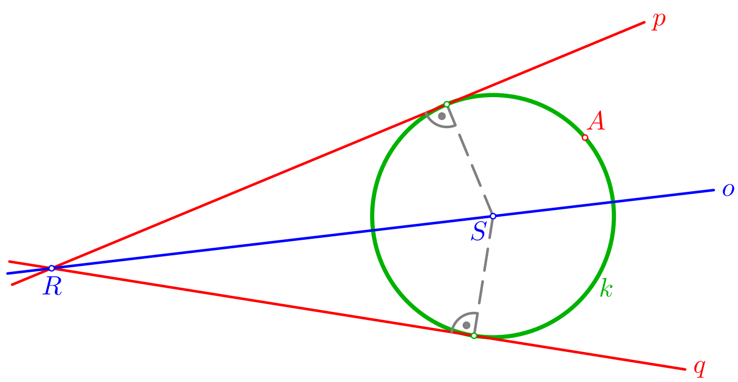
Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a dotýká se daných různoběžných přímek p, q.

Rozbor úlohy:

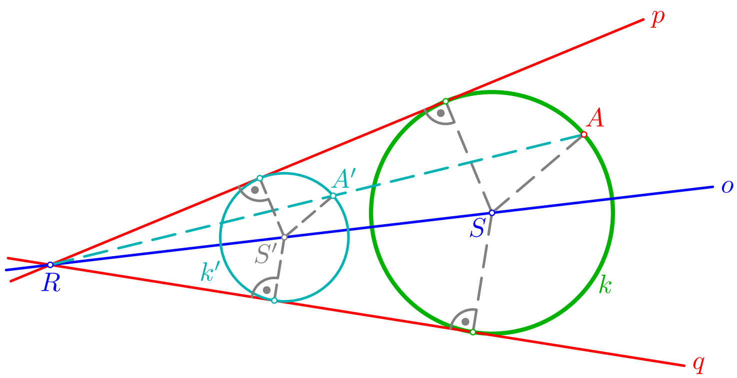
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici $k(S, r)$, na ní zvolme bod A, doplňme dvě její různoběžné tečny p, q a nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít . . .



- střed S kružnice k leží na ose o toho z úhlů sevřených různoběžkami p, q, v němž leží bod A (viz množina $M4$ na straně 12 v přehledu množin všech bodů dané vlastnosti)



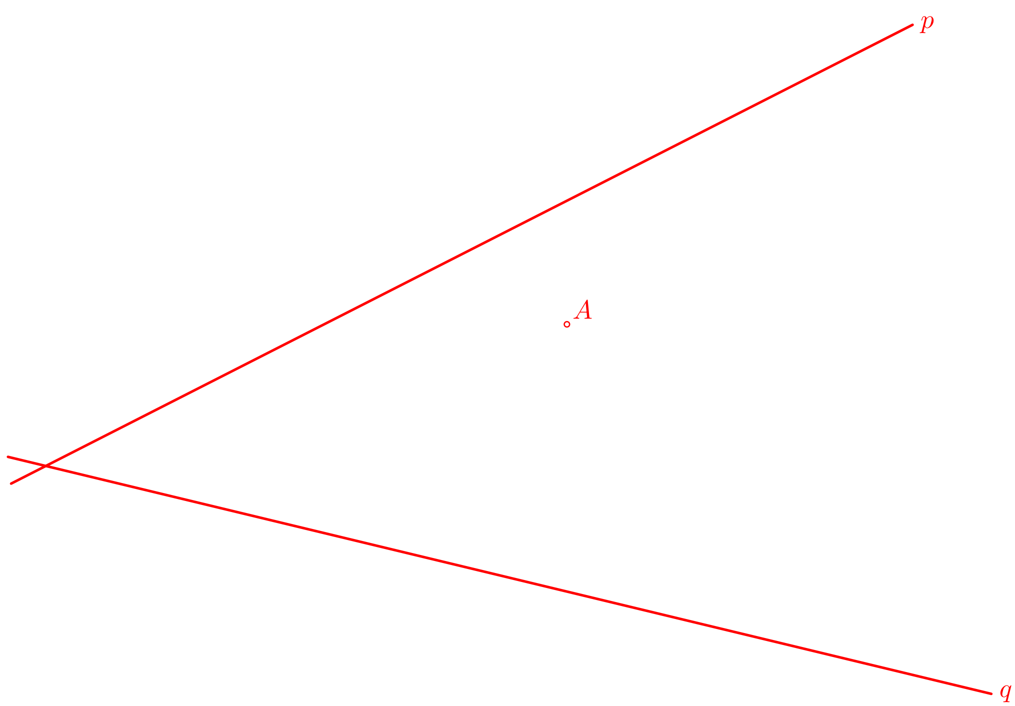
- kružnice $k'(S', r'{=}|S'p|{=}|S'q|)$, jejíž střed S' byl zvolen na ose o a která se dotýká přímek p, q, je obrazem kružnice $k(S, r)$ ve stejnolehlosti se středem v průsečíku $R = p \cap q$; v této stejnolehlosti je obrazem bodu $A \in k$ bod $A' \in k'$ a platí $SA \parallel S'A'$; toho využijeme pro řešení dané úlohy . . .



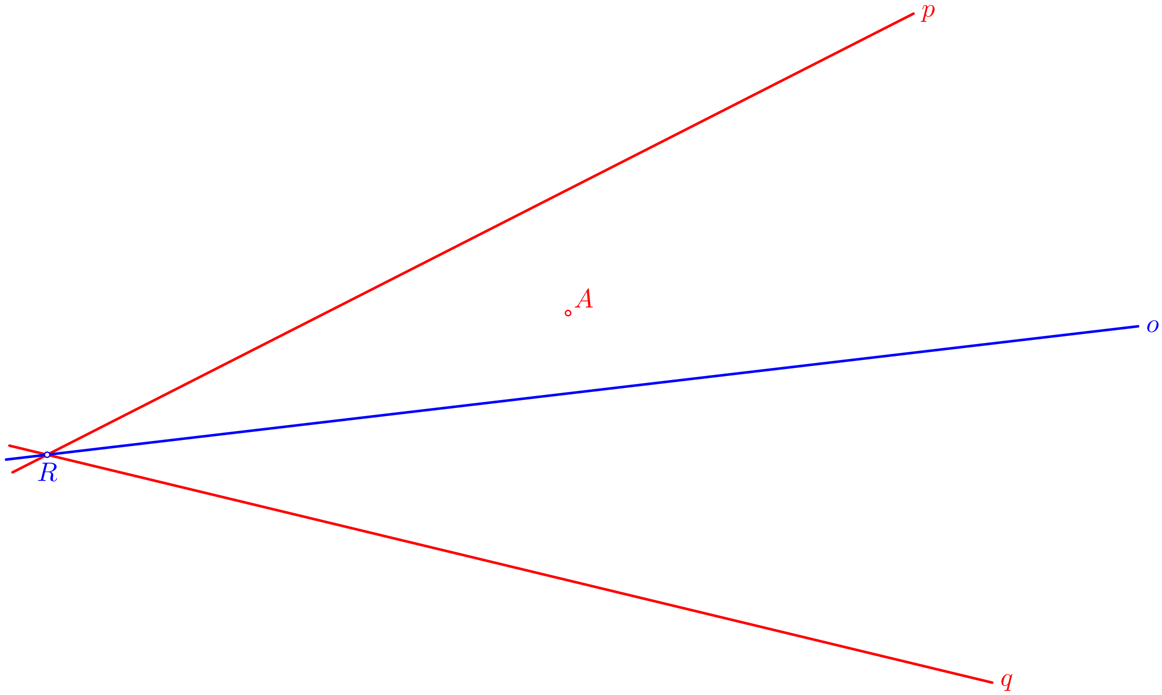
□

Konstrukce:

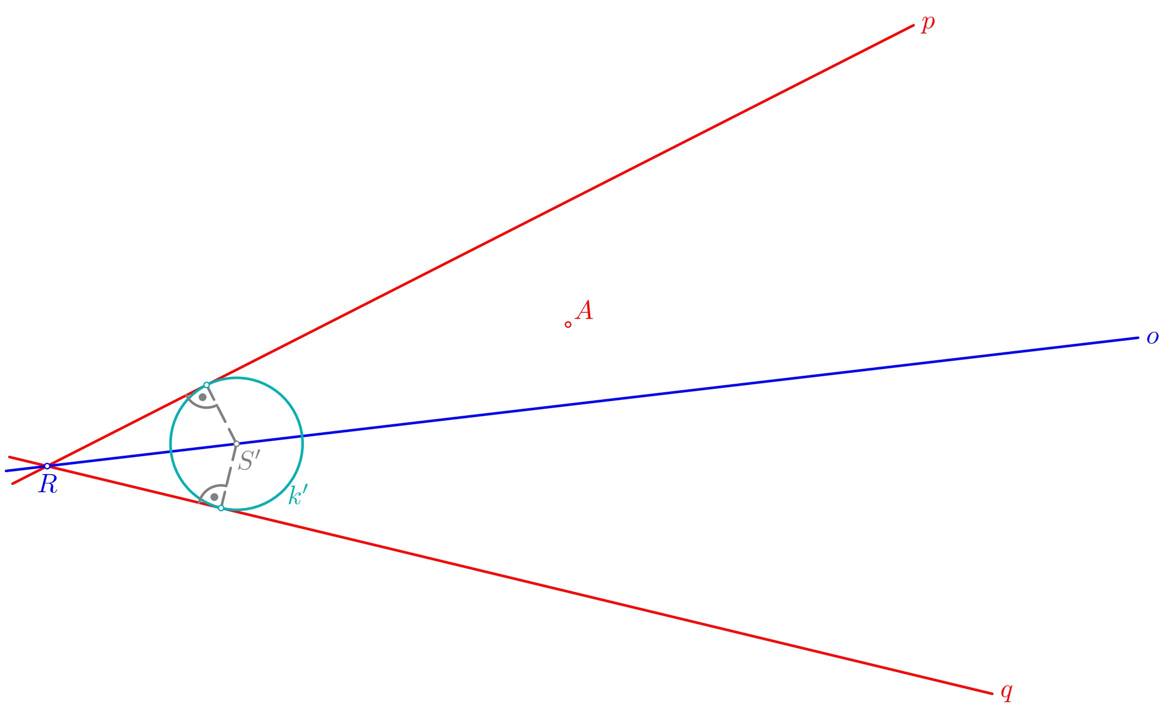
- zadání úlohy: bod A a dvě různé různoběžky p, q



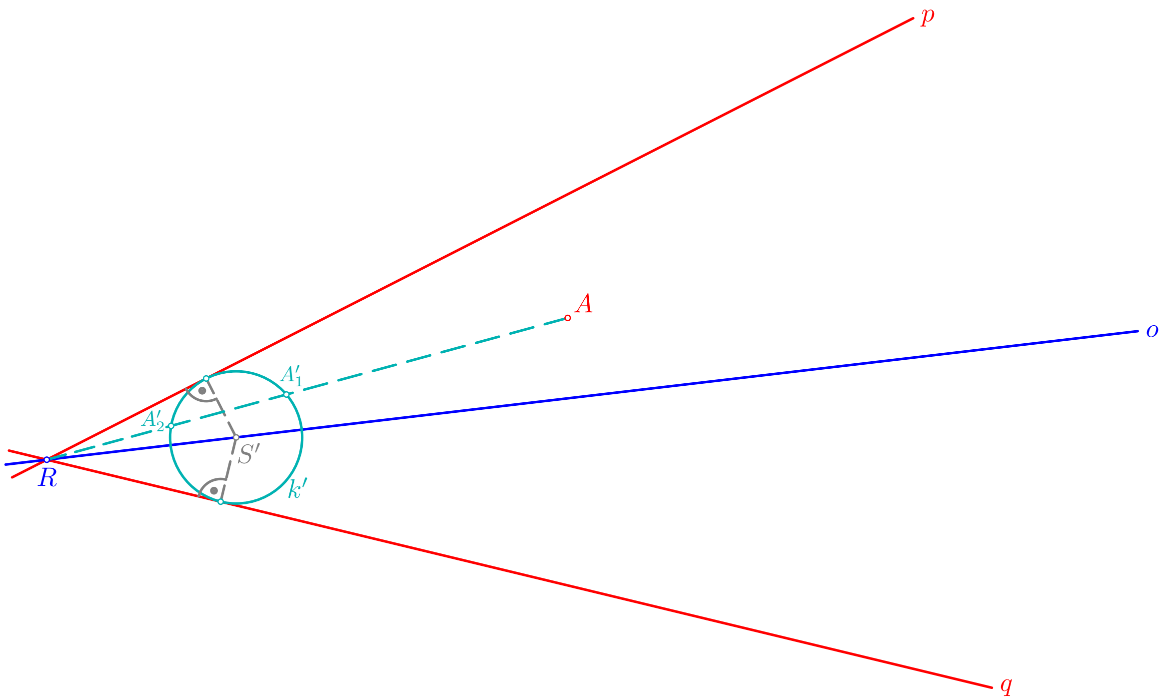
- nejprve veďme průsečíkem $R = p \cap q$ osu o toho z úhlů sevřených různoběžkami p, q, v němž leží bod A



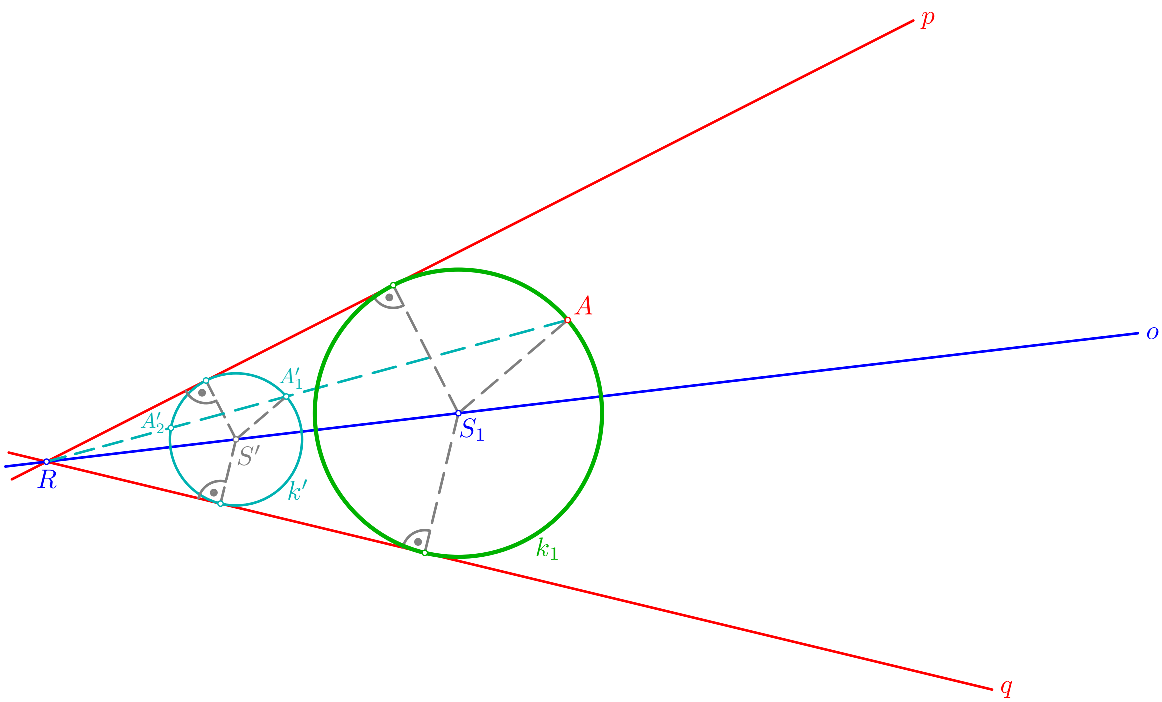
- na přímce o zvolme střed S' pomocné kružnice $k'(S', r' = |S'p|)$, která se dotýká různoběžek p, q



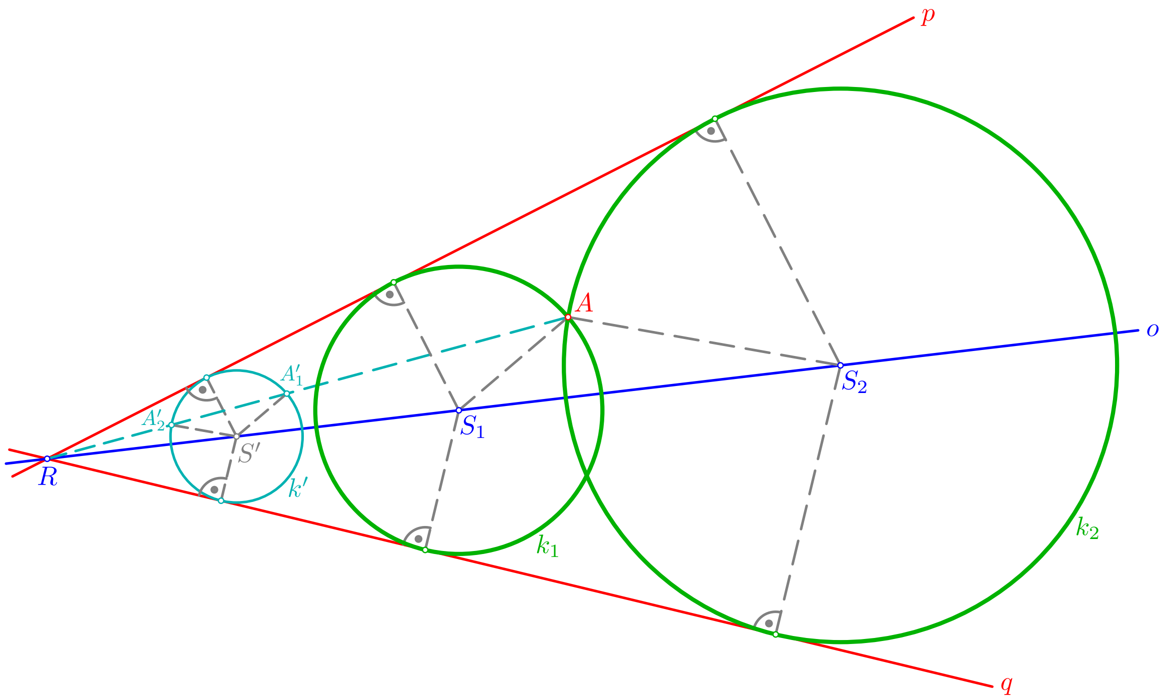
- přímka RA protíná kružnici k' v bodech A'_1, A'_2



- rovnoběžka s přímkou $S'A'_1$ vedená bodem A protíná osu o v bodě S_1, který je středem hledané kružnice $k_1(S_1, r_1 = |S_1A|)$



- podobně protíná rovnoběžka s přímkou $S'A_2'$ vedená bodem A osu o v bodě S_2, který je středem druhé hledané kružnice $k_2(S_2, r_2 = |S_2A|)$; obě kružnice k_1, k_2 procházejí daným bodem A a dotýkají se daných různoběžek p, q



□

Diskuze:

Pokud bod A splývá s průsečíkem $R = p \cap q$, nemá úloha žádné řešení; jinak má právě dvě řešení (pokud bod A leží na některé z přímek p nebo q, jedná se o tzv. Pappovu úlohu Bpp, kterou lze řešit jen pomocí množin všech bodů dané vlastnosti $M4$ a $M6$).

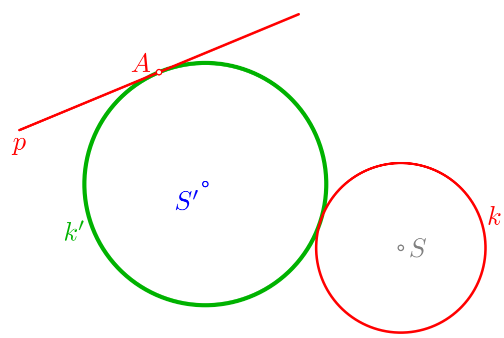
Pappova úloha Bpk

Řešené úlohy

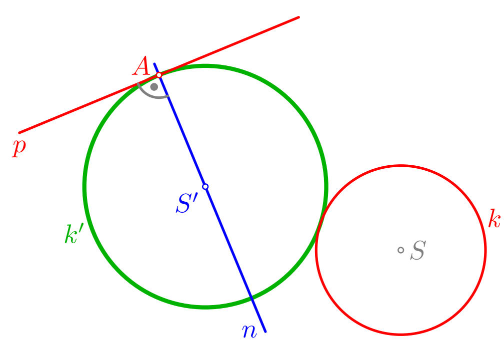
Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky p v jejím bodě A a dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:

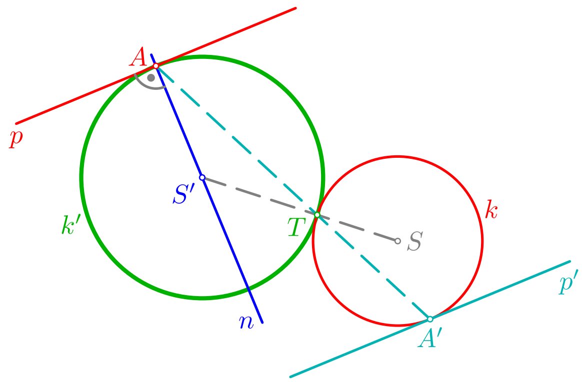
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici $k'(S', r')$, na ní zvolme bod A, v něm sestrojme tečnu p a doplňme kružnici $k(S, r)$, která se kružnice k' dotýká; nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít ...



- střed S' kružnice k' leží na přímce $n \perp p, A \in n$, tedy na tzv. normále přímky p v bodě A (viz množina M6 na straně 13 v přehledu množin všech bodů dané vlastnosti)



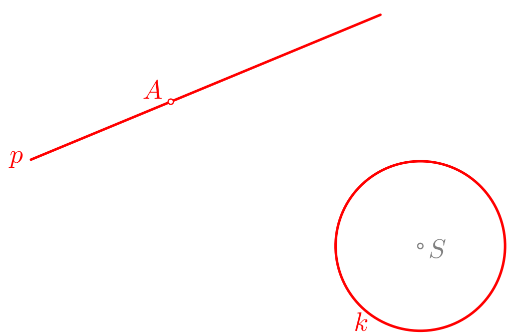
- kružnice k a k' si odpovídají ve stejnolehlosti se středem v bodě T jejich dotyku; v této stejnolehlosti se tečna p ke kružnici k' s bodem dotyku A zobrazí na tečnu p' ke kružnici k s bodem dotyku A', přičemž bude platit $p' \parallel p$; a toho využijeme pro řešení úlohy ...



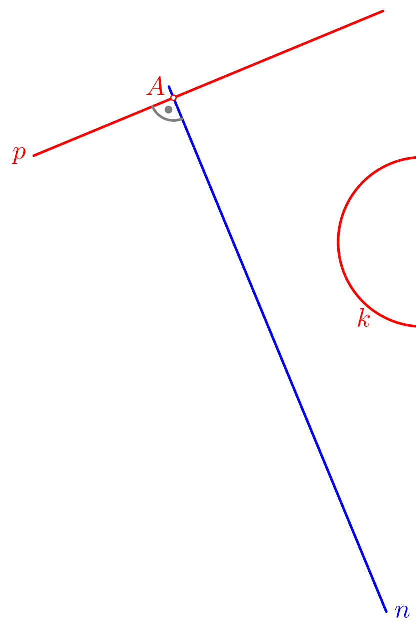
□

Konstrukce:

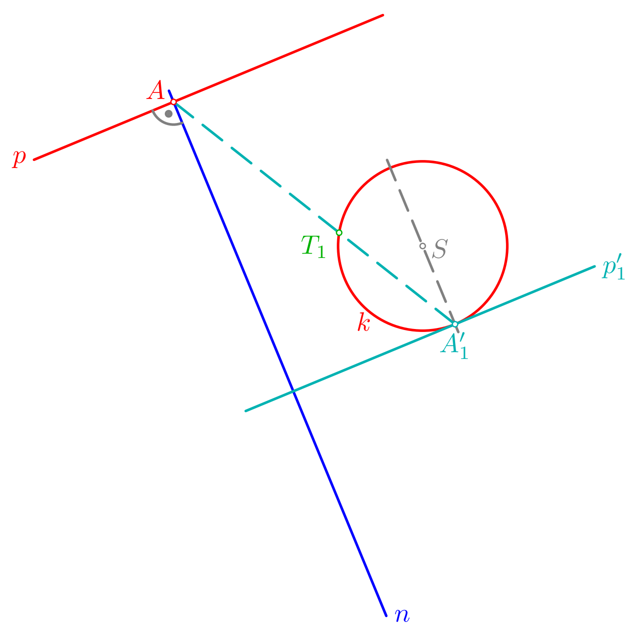
- zadání úlohy: přímka p, na ní bod $A \in p$ a kružnice $k(S, r)$



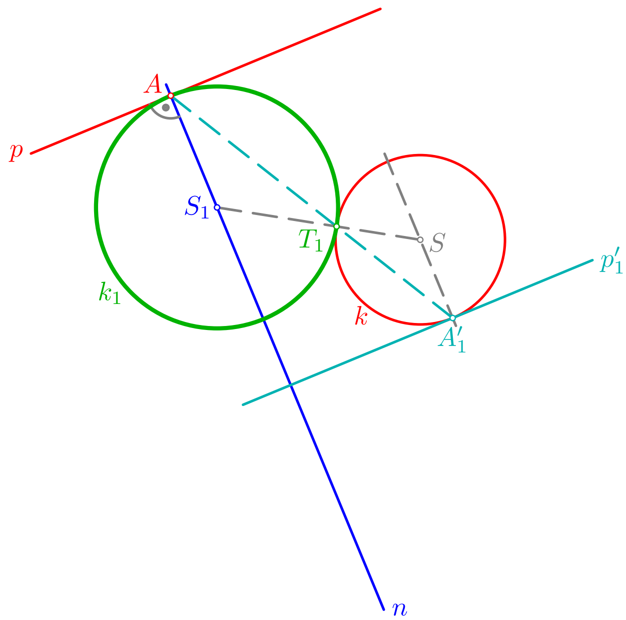
- nejprve veďme bodem A kolmici n k přímce p: $n \perp p, A \in n$



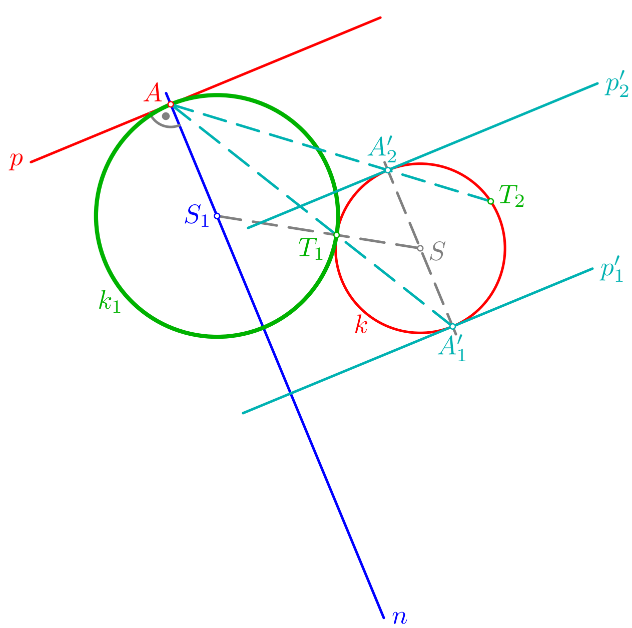
- dále sestrojme přímku p_1' jako jednu ze dvou tečen kružnice k rovnoběžných s přímkou p; přímka AA_1', kde A_1' je bodem dotyku přímky p_1' a kružnice k, protíná kružnici k ještě v bodě T_1; ten je bodem dotyku dané kružnice k a hledané kružnice k_1



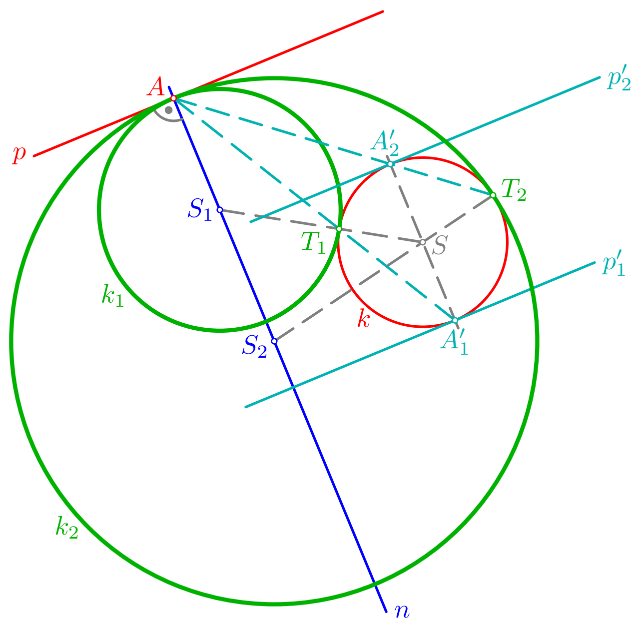
- bod $S_1 = n \cap ST_1$ je středem kružnice $k_1(S_1, r_1 = |S_1T_1| = |S_1A|)$, která se dotýká dané přímky p v jejím daném bodě A a také se dotýká dané kružnice k



- podobně sestrojme přímku p_2' jako druhou z tečen kružnice k rovnoběžných s přímkou p; přímka AA_2', kde A_2' je bodem dotyku přímky p_2' a kružnice k, protíná kružnici k ještě v bodě T_2, který je bodem dotyku dané kružnice k a hledané kružnice k_2



- kružnice $k_2(S_2, r_2 = |S_2T_2| = |S_2A|)$, kde $S_2 = n \cap ST_2$, je pak druhým řešením dané úlohy při tomto zadání



□

Diskuze:

Úloha může mít nekonečně mnoho, právě dvě, právě jedno nebo žádné řešení. Podrobnější diskuze je přenechána čtenáři jako cvičení.

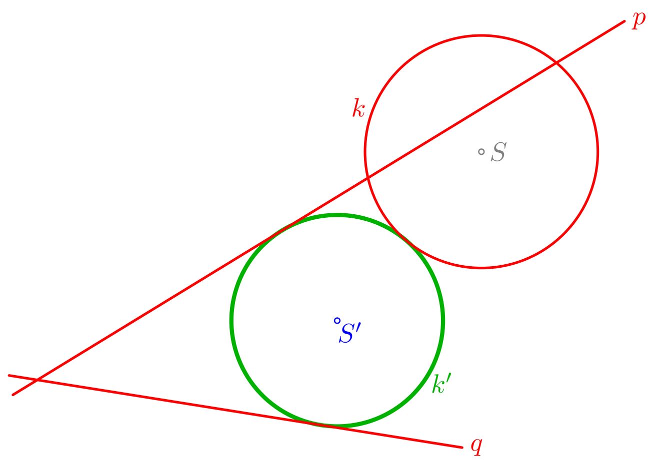
Varianta Apolloniovy úlohy ppk

Řešené úlohy

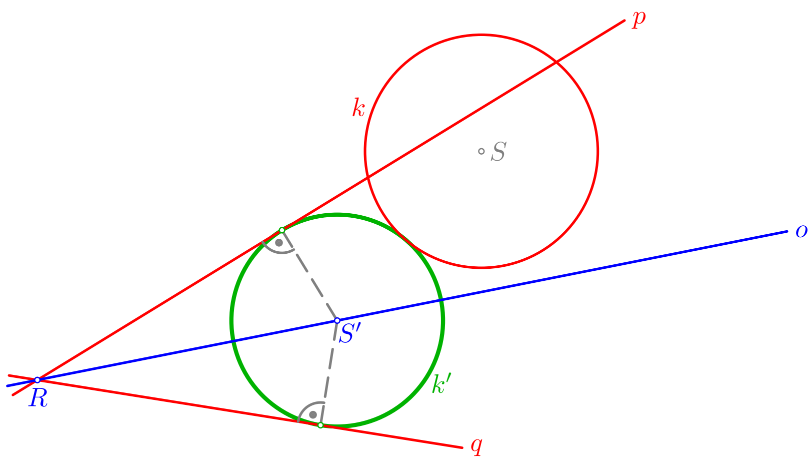
Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká daných různoběžných přímek p, q a dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:

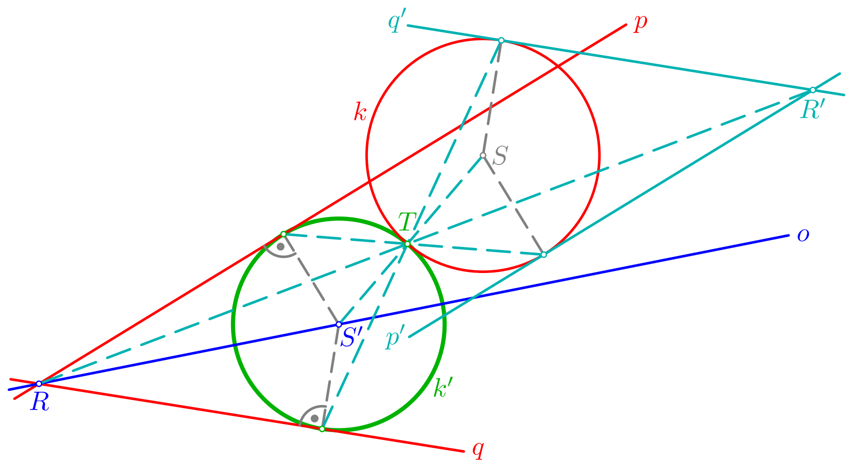
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici $k'(S', r')$, zvolme dvě její různoběžné tečny p, q, dotykovou kružnici $k(S, r)$ a nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít . . .



- střed S' kružnice k' musí ležet na ose o jednoho z úhlů sevřených různoběžkami p, q (viz množina $M4$ na straně 12 v přehledu množin všech bodů dané vlastnosti)



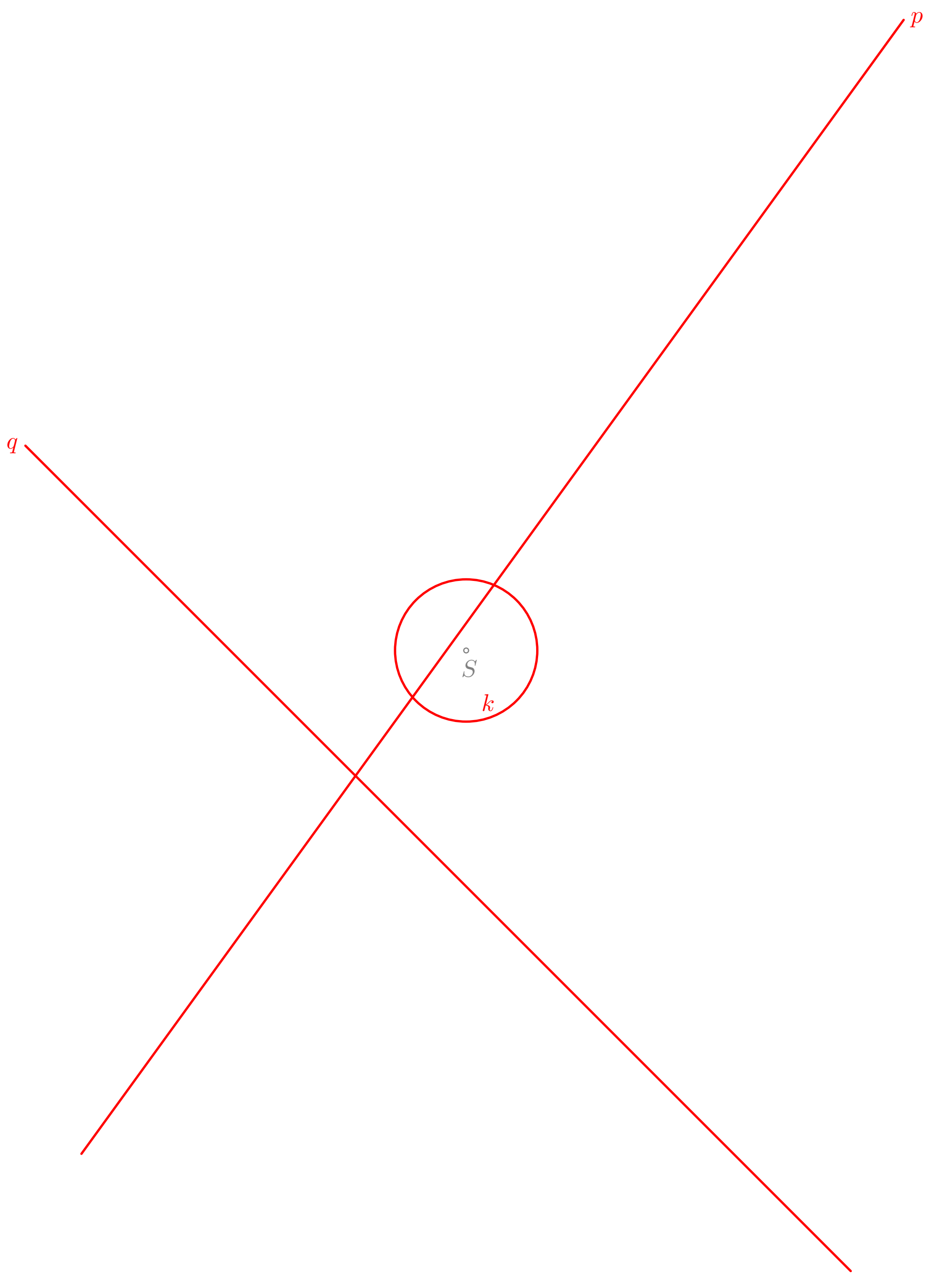
- kružnice k a k' jsou stejnolehlé podle středu T, který je jejich bodem dotyku; v této stejnolehlosti odpovídají tečnám p, q kružnice k' tečny p', q' kružnice k, přičemž platí $p' \parallel p$ a $q' \parallel q$; toho využijeme pro řešení dané úlohy . . .



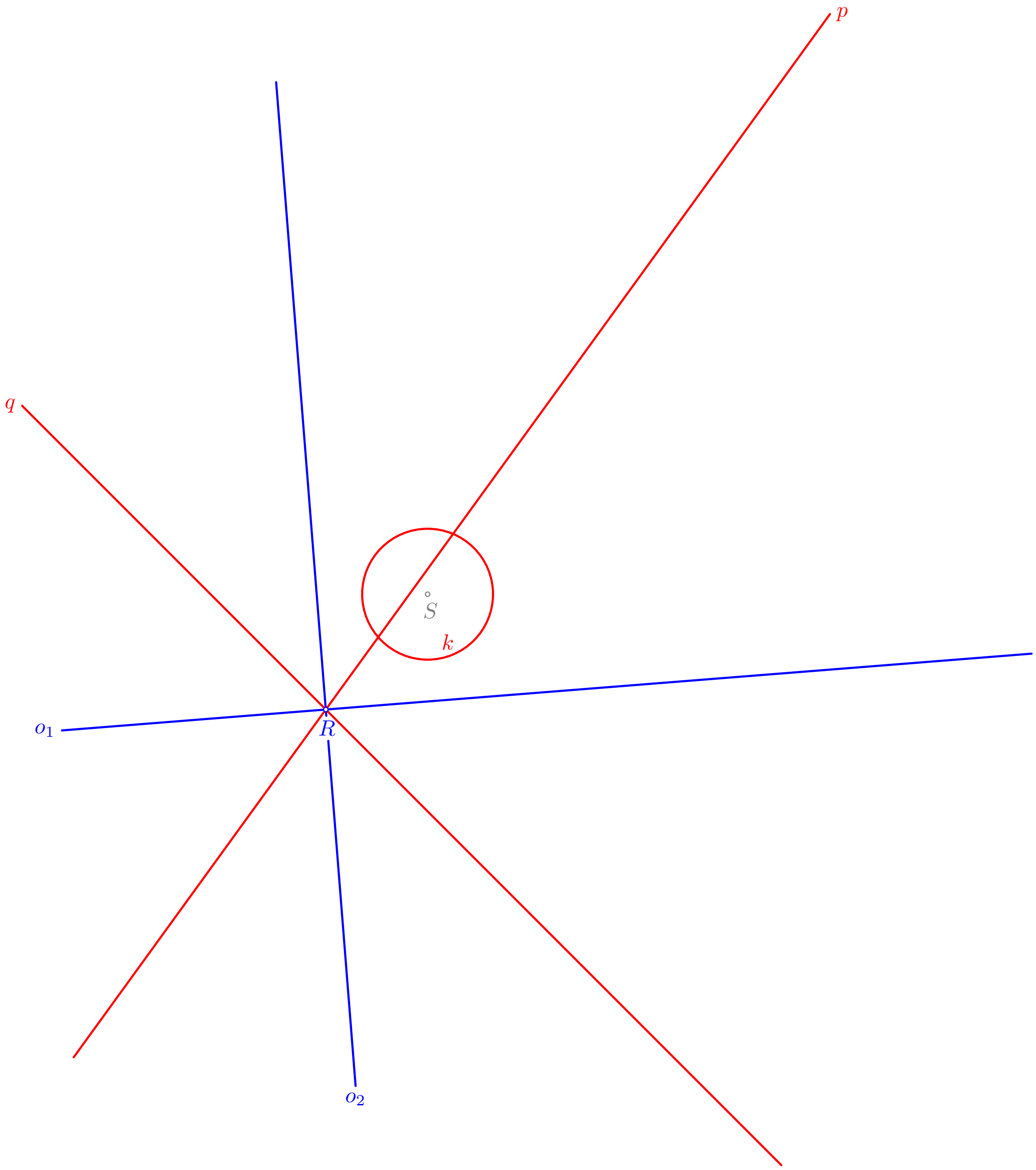
□

Konstrukce:

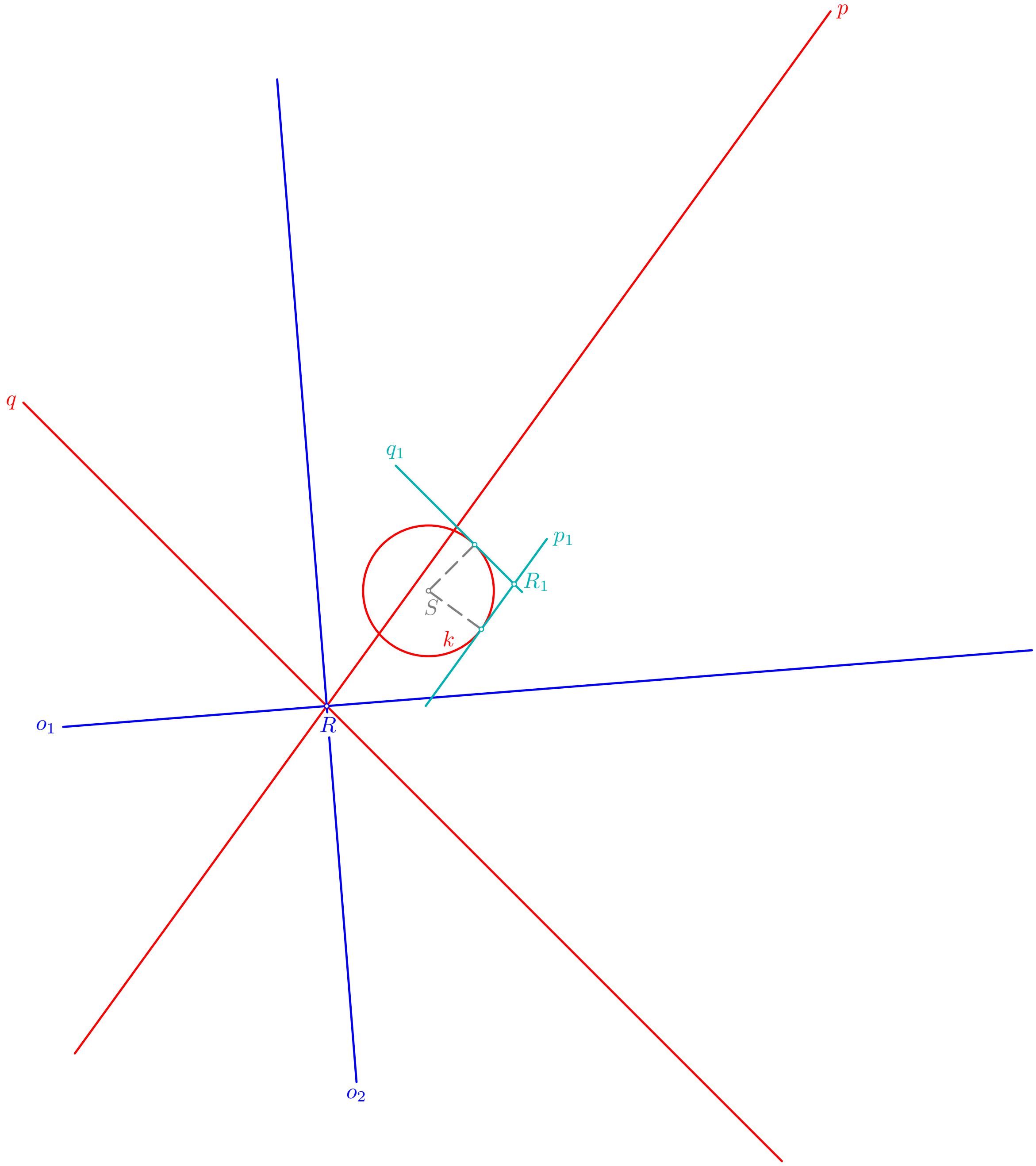
- zadání úlohy: dvě různé různoběžky p, q a kružnice $k(S, r)$



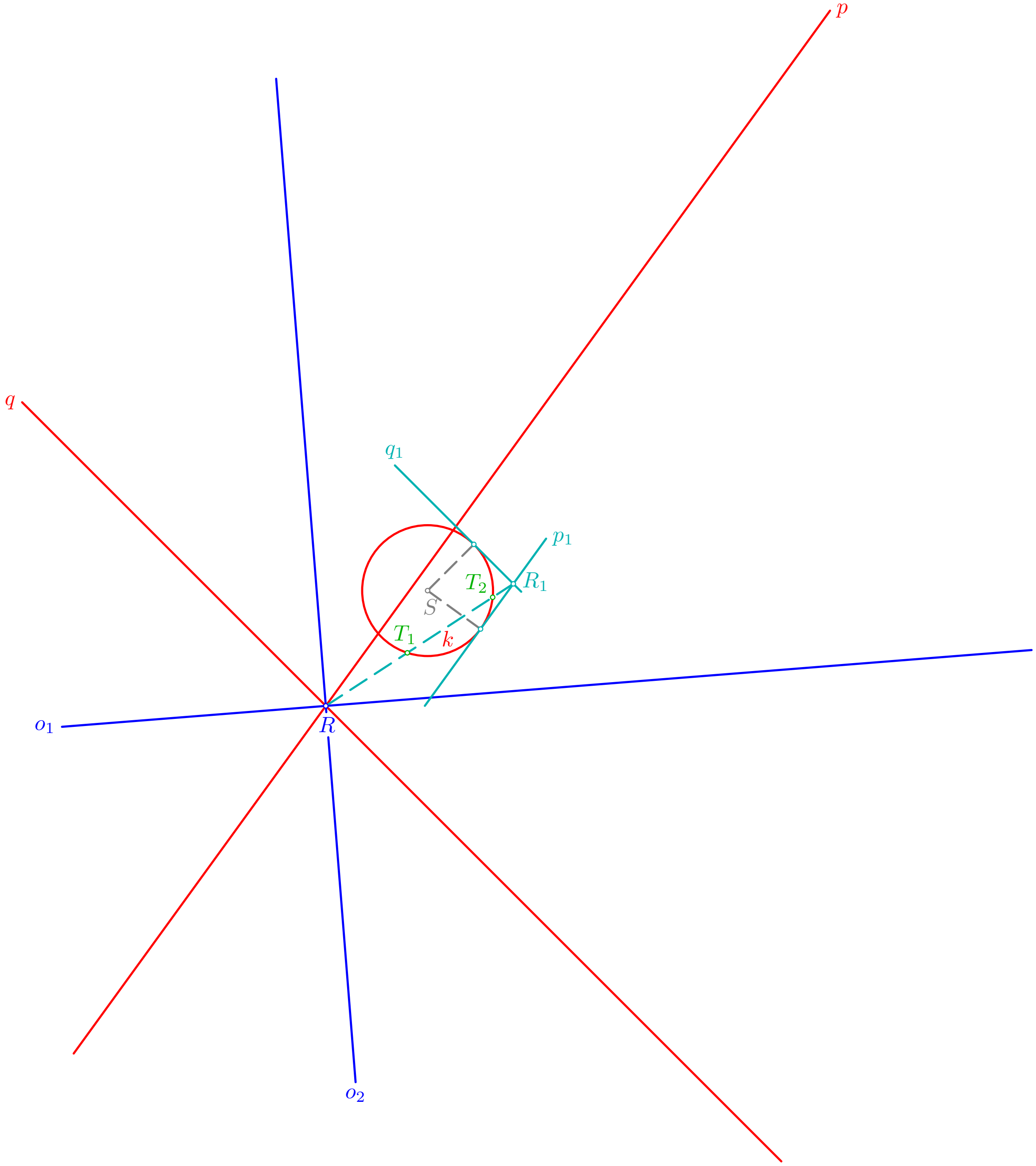
- nejprve veďme průsečíkem $R = p \cap q$ osy o_1, o_2 ($o_1 \perp o_2$) úhlů sevřených různoběžkami p, q



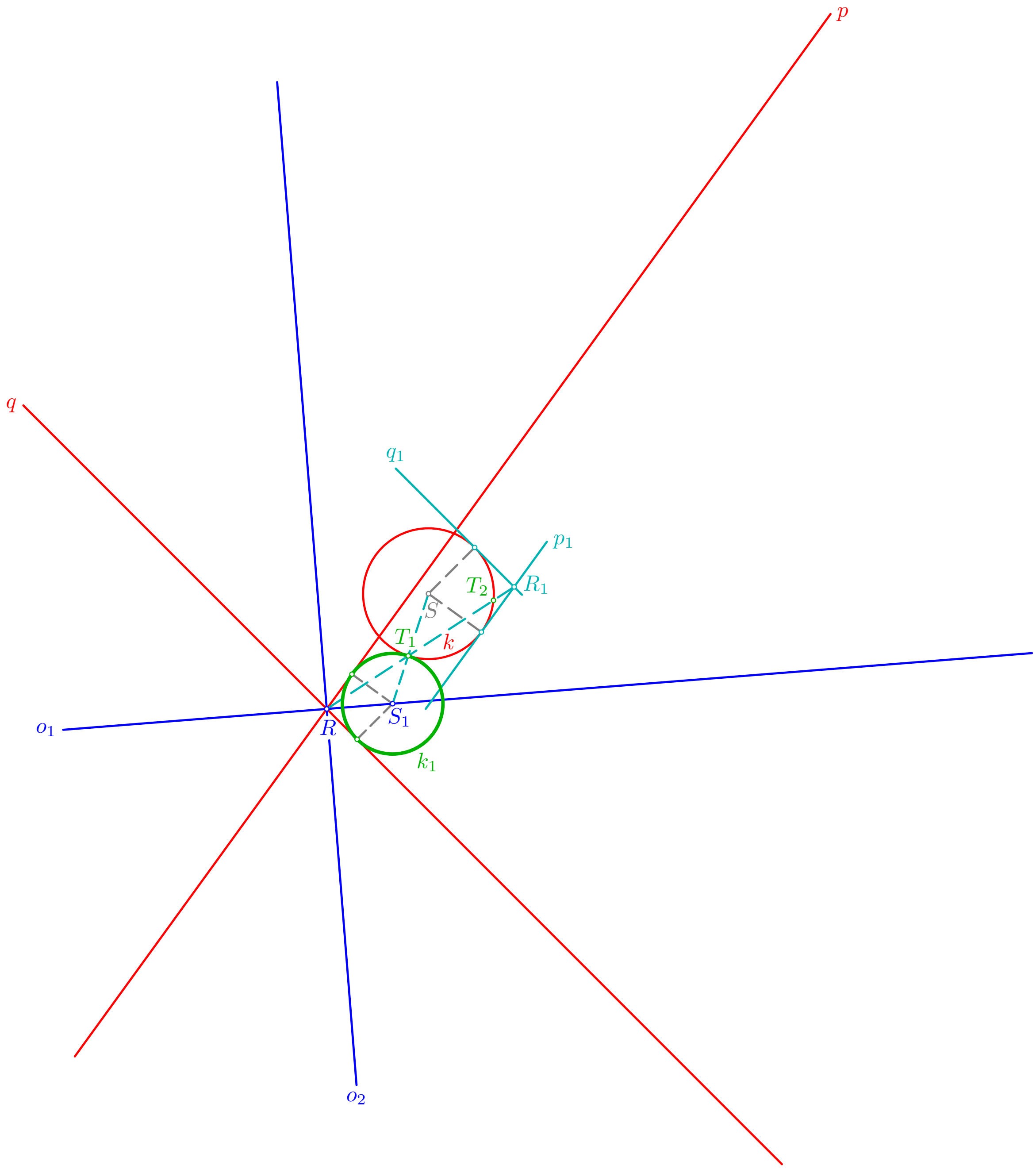
- ke kružnici k sestrojme tečny $p_1 \parallel p$ a $q_1 \parallel q$ a najděme jejich průsečík $R_1 = p_1 \cap q_1$



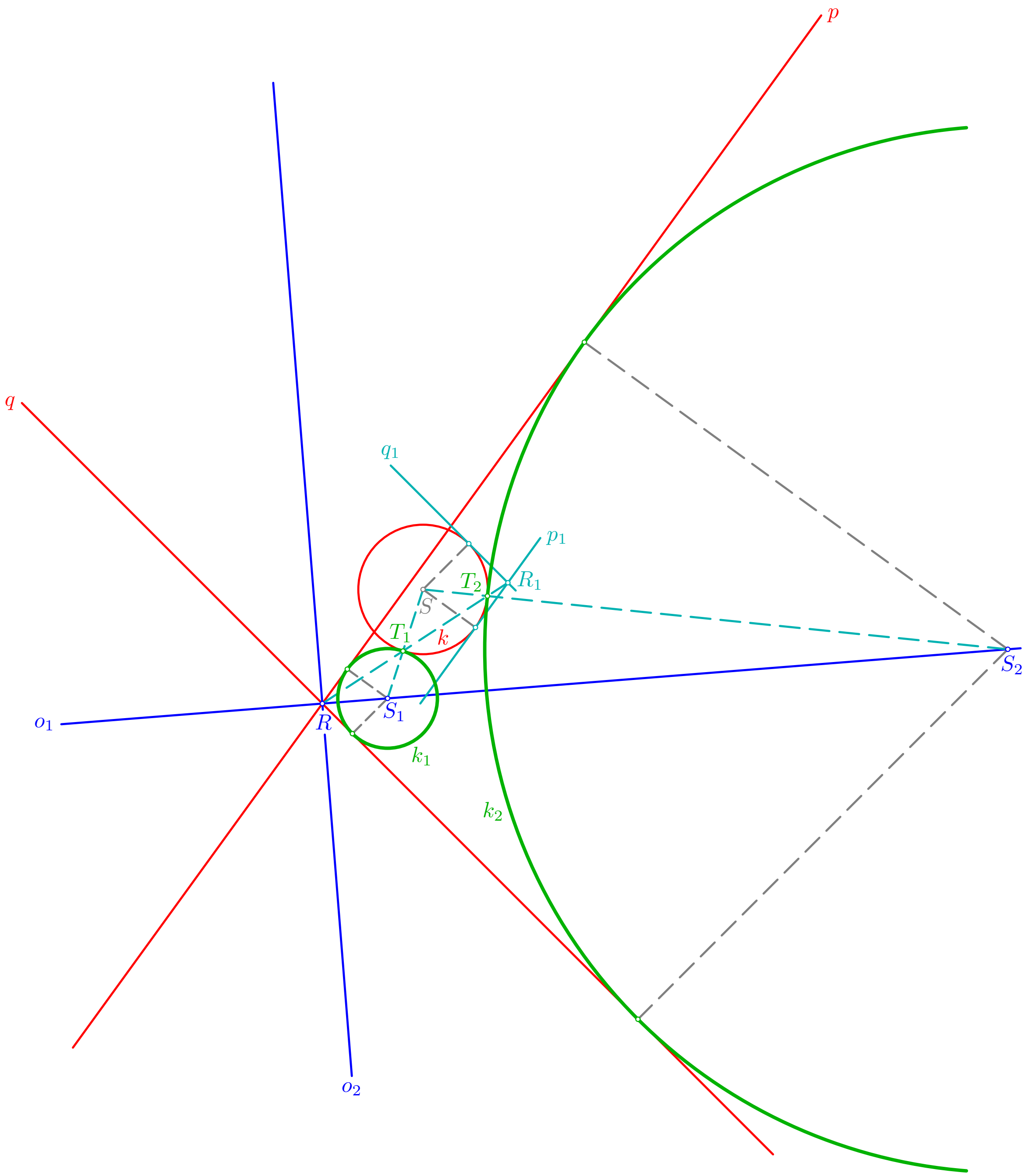
- přímka RR_1 protíná kružnici k v bodech T_1, T_2



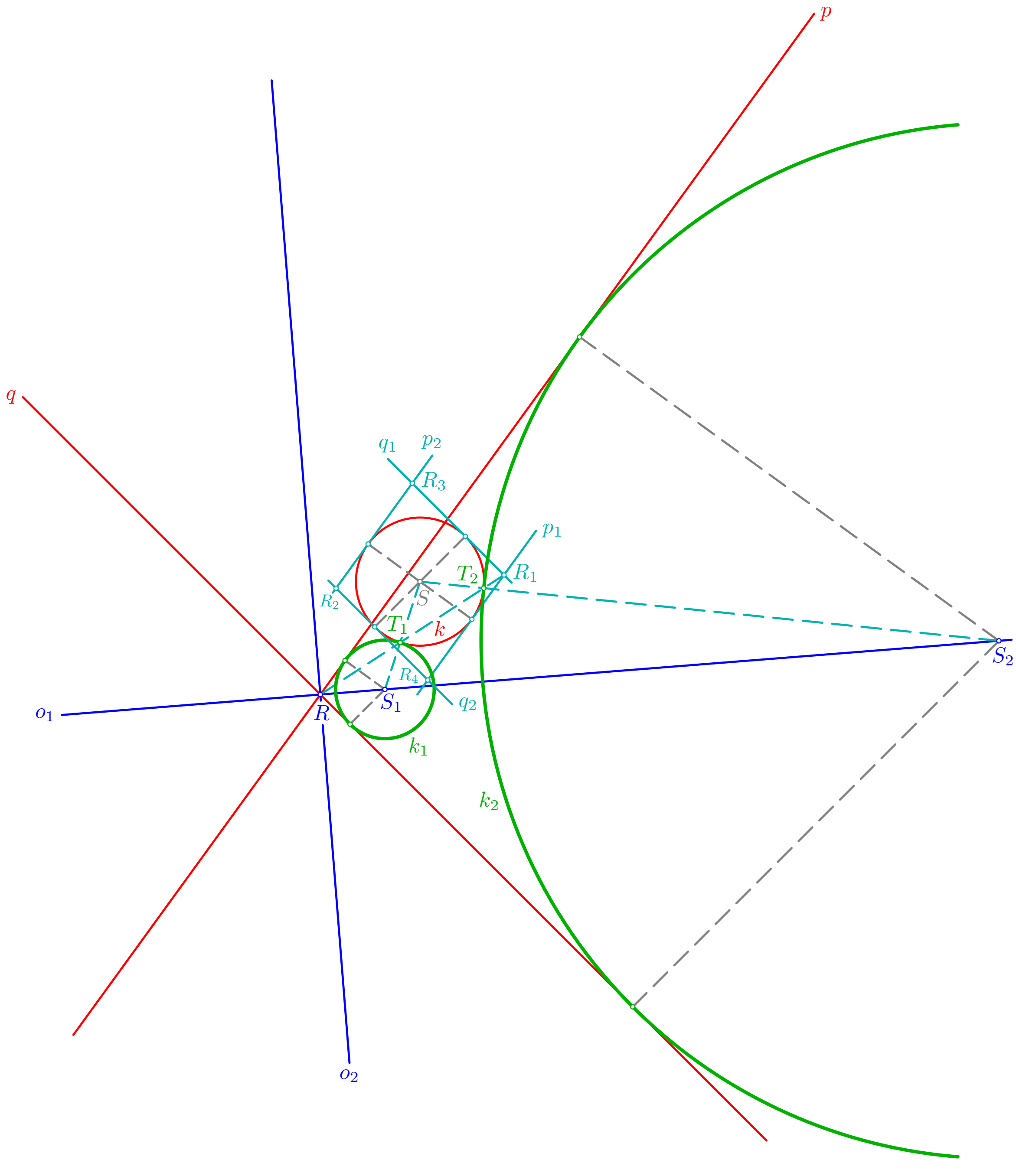
- bod T_1 je bodem dotyku dané kružnice k a hledané kružnice $k_1(S_1, r_1 = |S_1T_1|)$, pro jejíž střed S_1 platí $S_1 = ST_1 \cap o_1$



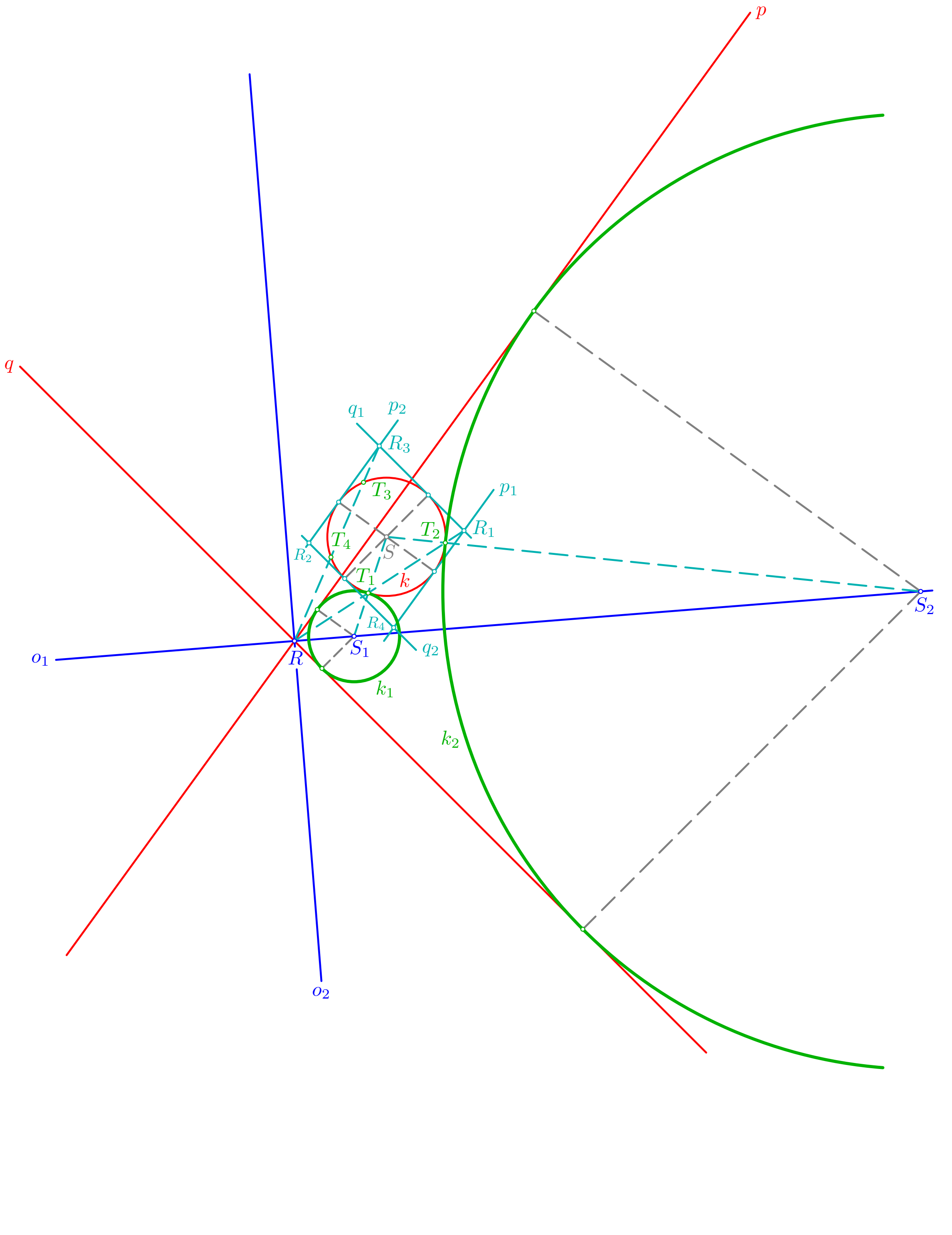
- podobně protíná přímka ST_2 osu o_1 v bodě S_2, který je středem hledané kružnice $k_2(S_2, r_2 = |S_2T_2|)$, jež se dotýká daných různoběžek p, q i dané kružnice k



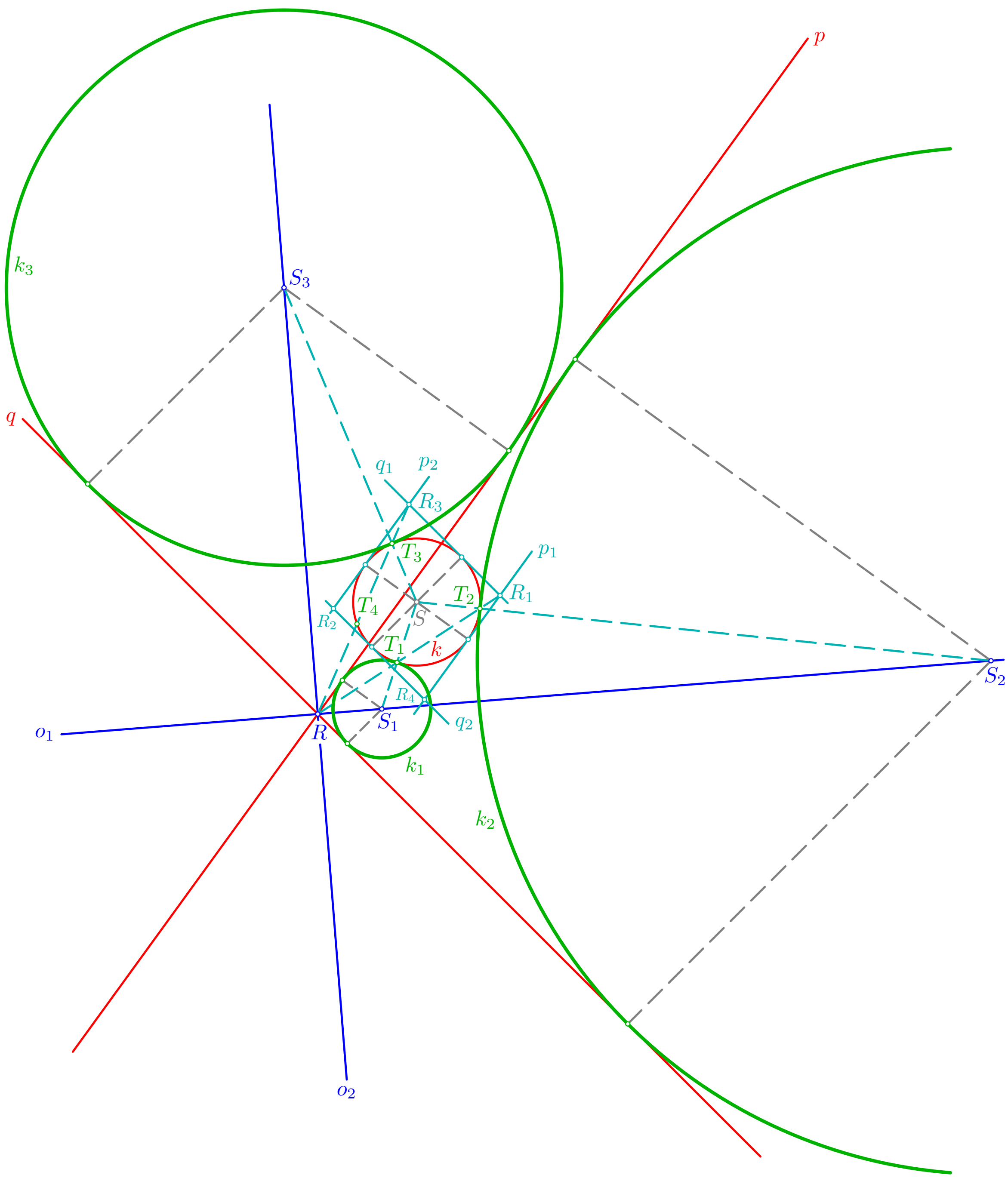
- ke kružnici k sestrojme zbývající dvě tečny $p_2 \parallel p, q_2 \parallel q$ a na nich označme zbývající vrcholy $R_2 = p_2 \cap q_2, R_3 = p_2 \cap q_1, R_4 = p_1 \cap q_2$ tečnového rovnoběžníka



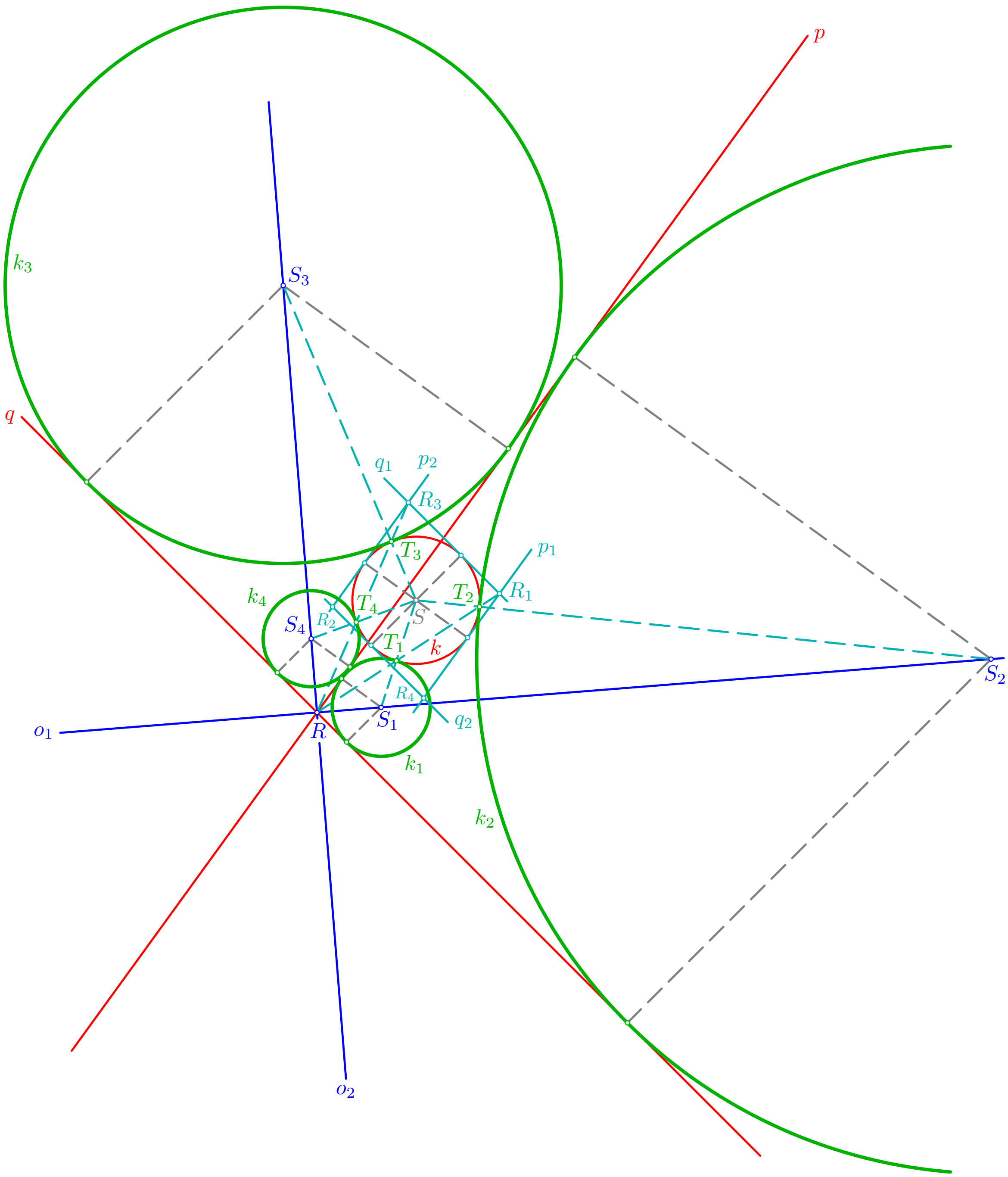
- z přímek RR_2, RR_3, RR_4 protíná při zvoleném zadání kružnici k už jen přímka RR_3 a to v bodech T_3, T_4



- bod T_3 je bodem dotyku kružnice k a kružnice $k_3(S_3, r_3 = |S_3T_3|)$, kde střed S_3 je průsečíkem přímky ST_3 s osou o_2



- podobně protíná přímka ST_4 osu o_2 v bodě S_4, který je středem hledané kružnice $k_4(S_4, r_4 = |S_4T_4|)$, jež se také dotýká daných různoběžek p, q i dané kružnice k



□

Diskuze:

Úloha může mít právě osm, právě šest, právě čtyři nebo právě dvě řešení. Podrobnější diskuze je přenechána čtenáři jako cvičení.

Stereometrie

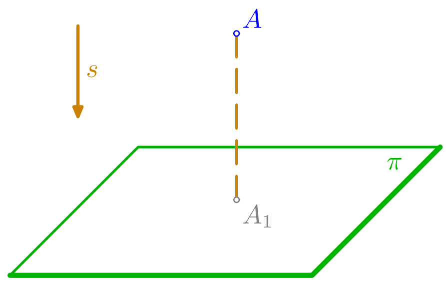
Tematický obsah

- Rovinné řezy hranatých těles
  - Osová afinita a Středová kolineace mezi dvěma rovinami, Řešené úlohy
- Průnik přímky s tělesem
  - Princip konstrukce, Řešené úlohy

Výklad

1. Užité pojmy a metody zobrazení

- v rámci tohoto studijního materiálu byly zpracovány zejména **řešené úlohy o průnicích roviny a přímky s daným tělesem**
- přitom se ve všech úlohách předpokládá, že dané těleso je postaveno na vodorovné rovině π, která se obvykle nazývá **půdorysna**
- pro dourčení polohy bodu v prostoru je pak možno použít jeho **půdorys**, tj. jeho **pravoúhlý průmět** do roviny π
- v následujícím obrázku je tedy bod A_1 půdorysem bodu A, tj. průsečíkem půdorysny π s přímkou vedenou bodem A kolmo k rovině π

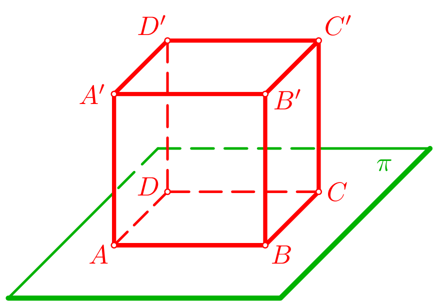


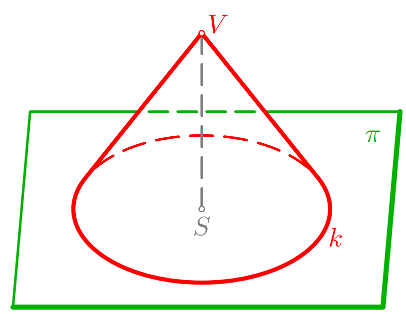
- zobrazováním prostorových útvarů do roviny se podrobněji zabývá praktická disciplína zvaná **deskriptivní geometrie**

- zde je pro zobrazení hranatých těles (krychle, hranol, jehlan) užito tzv. **volné rovnoběžné promítání** (viz krychle $ABCDA'B'C'D'$ na obrázku dole)

- u oblých těles (válec, kužel) je pak vhodnější použít zjednodušenou variantu tzv. **axonometrické projekce** (viz dole obrázek rotačního kužele)

- průsečnice obecné roviny ρ s půdorysnou π se v deskriptivní geometrii obvykle nazývá (půdorysná) **stopa** roviny ρ a značí se p^ρ





2. Rovinné řezy hranatých těles

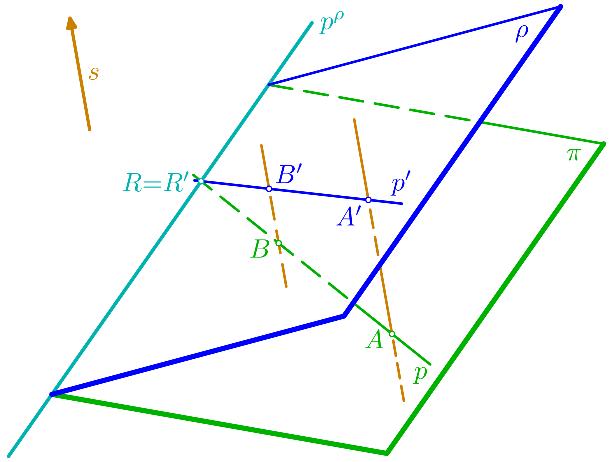
Výklad

- **rovinným řezem tělesa** rozumíme stanovení průniku dané roviny s daným tělesem, zejména jde o sestrojení hranice tohoto průniku

- v řešených úlohách jsou předvedeny konstrukce rovinných řezů pouze na hranatých tělesech, konkrétně na jehlanech a kolmých hranolech

- při těchto konstrukcích lze vypozorovat jisté vztahy mezi podstavou tělesa a sestrojeným řezem - jde o **osovou afinitu** a **středovou kolineaci mezi dvěma rovinami**

2.1. Prostorová osová afinita mezi dvěma rovinami



- mějme dány dvě různoběžné roviny π, ρ a směr s, který není se žádnou z nich rovnoběžný; pak **osovou afinitou mezi rovinami** π, ρ rozumíme zobrazení, které každému bodu $A \in \pi$ přiřazuje bod $A' \in \rho$ tak, že platí $AA' \parallel s$
- zjednodušeně řečeno se jedná o **rovnoběžné promítání bodů z jedné roviny do roviny druhé**
- průsečnici $p^\rho = \pi \cap \rho$ nazýváme **osou afinity**, daný směr s je **směrem afinity**
- odpovídající si přímky se protínají na ose afinity v tzv. **samodružných bodech**; viz obrázek a na něm přímky $p = AB$, $p' = A'B'$ a jejich průsečík $R = R'$
- vlastností osové afinity lze využít při konstrukcích **řezů na hranolech**; osou afinity je pak průsečnice roviny podstavy s rovinou řezu a směr udává některá boční hrana daného hranolu

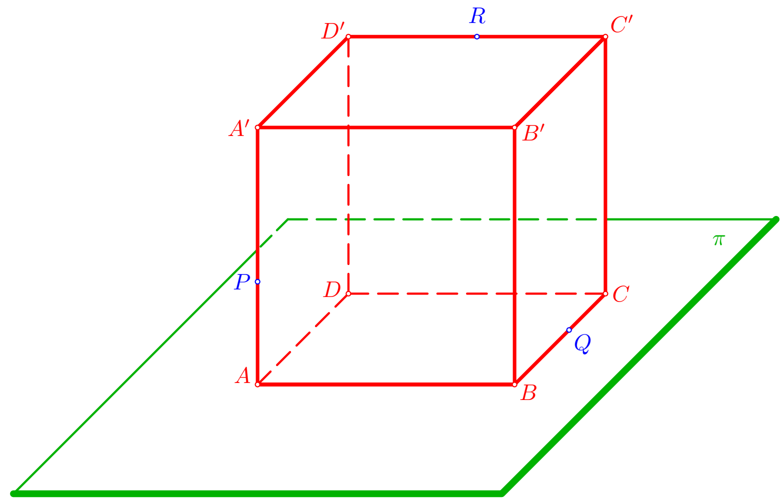
2.1.1. Řez krychle rovinou

Řešené úlohy

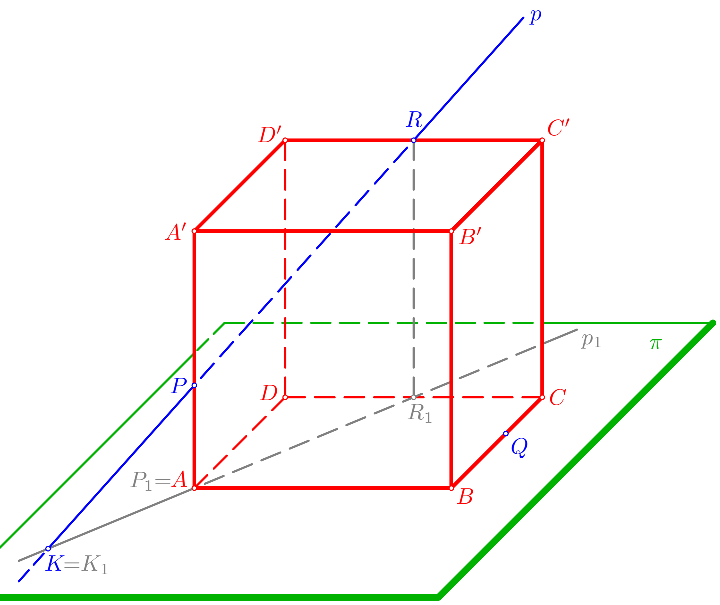
Příklad: Sestrojte řez krychle $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\rho = PQR$, přičemž platí $P \in AA'$, $Q \in BC$, $R \in C'D'$.

Konstrukce:

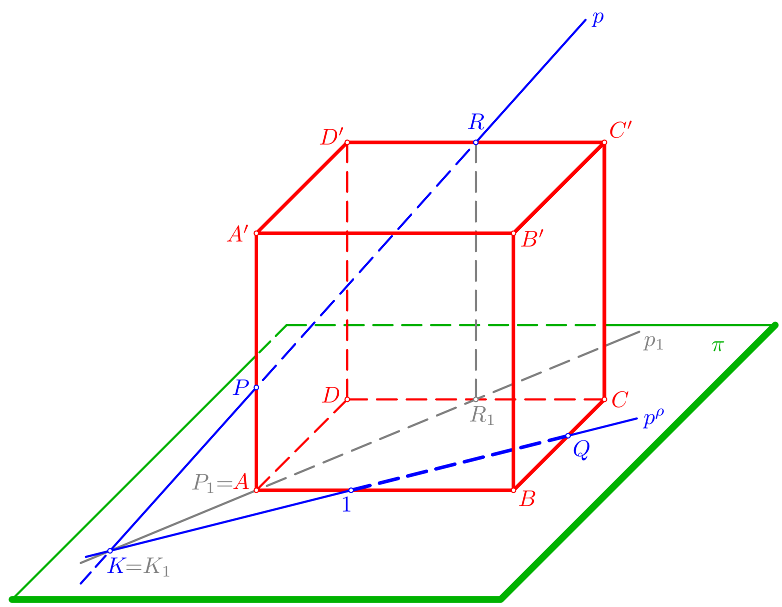
- zadání úlohy: krychle $ABCDA'B'C'D'$ stojí na vodorovné rovině (půdorysně) π, body P, Q, R určující rovinu ρ řezu leží na daných hranách



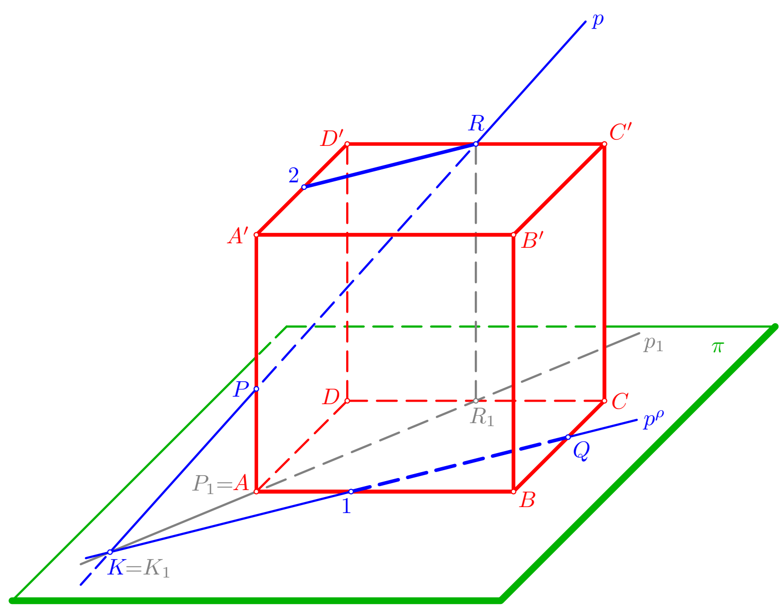
- nejprve sestrojme průsečík K přímky $p = PR$ s rovinou $\pi = ABC$: zřejmě platí $K = K_1 = p \cap p_1$, kde $p_1 = P_1R_1$ je půdorysem přímky p, tj. $P_1 = A$ a $R_1 \in CD$, $RR_1 \parallel AA'$



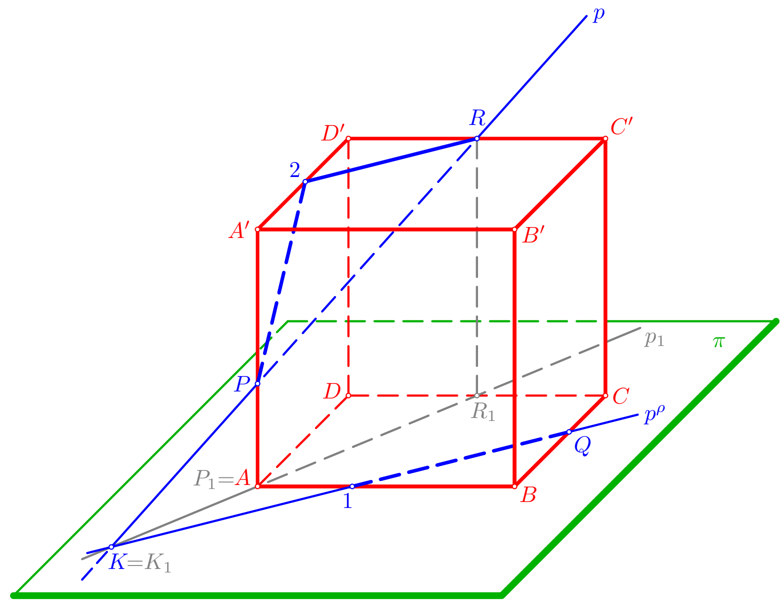
- přímka $p^\rho = KQ$ je pak půdorysnou stopou roviny ρ; tato stopa protíná hranu AB ve vrcholu 1 hledaného řezu



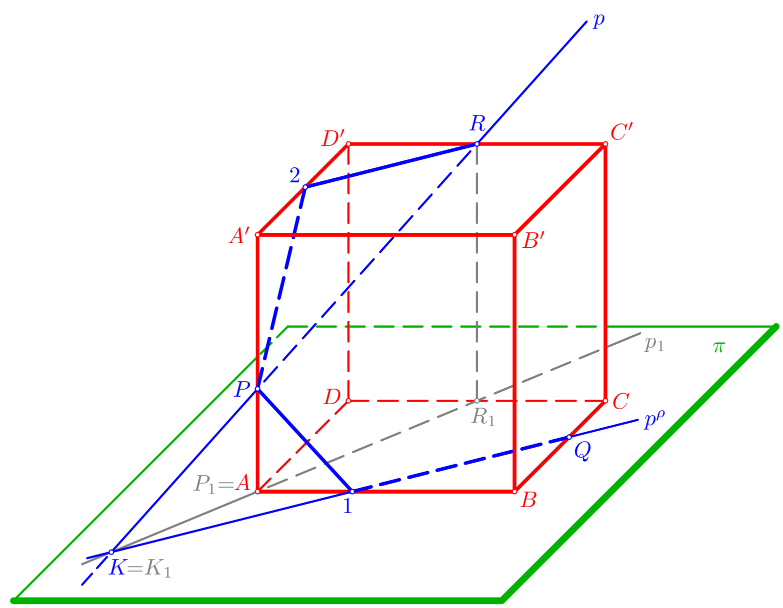
- rovina ρ protíná roviny π a $A'B'C'$ dolní a horní stěny v rovnoběžných přímkách a díky tomu je sestrojen další vrchol 2 řezu: $2 \in A'D', 2R \parallel p^\rho$



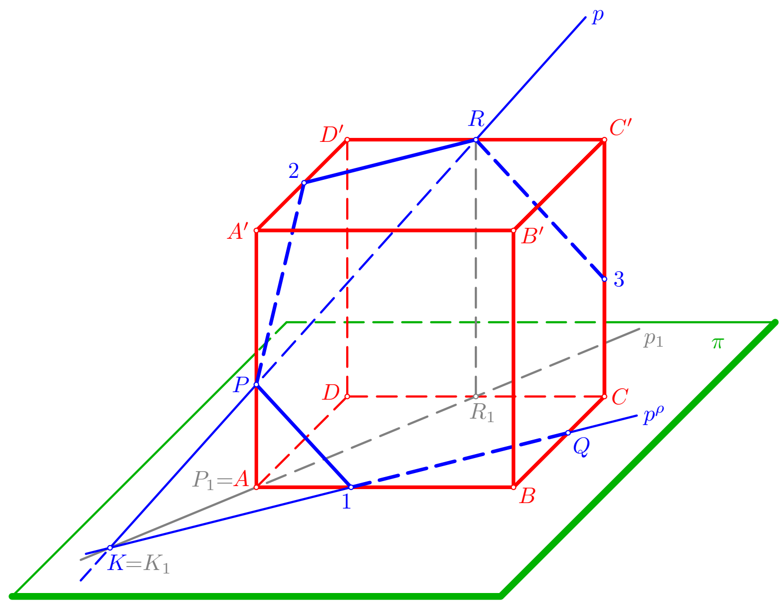
- v levé stěně $ADD'A'$ sestrojme stranu $2P$ řezu (leží ve stěně, do níž nevidíme, a bude tedy vytažena čárkovaně)



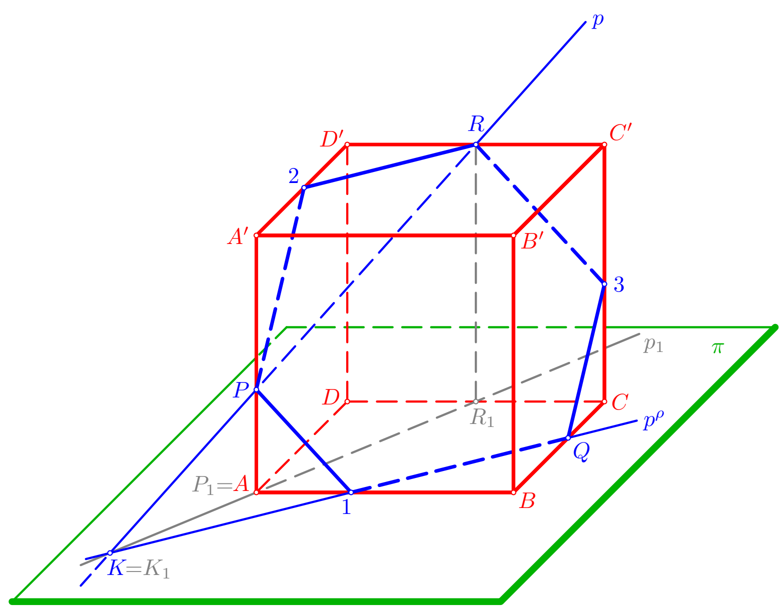
- podobně protíná rovina ρ přední stěnu $ABB'A'$ v úsečce $P1$



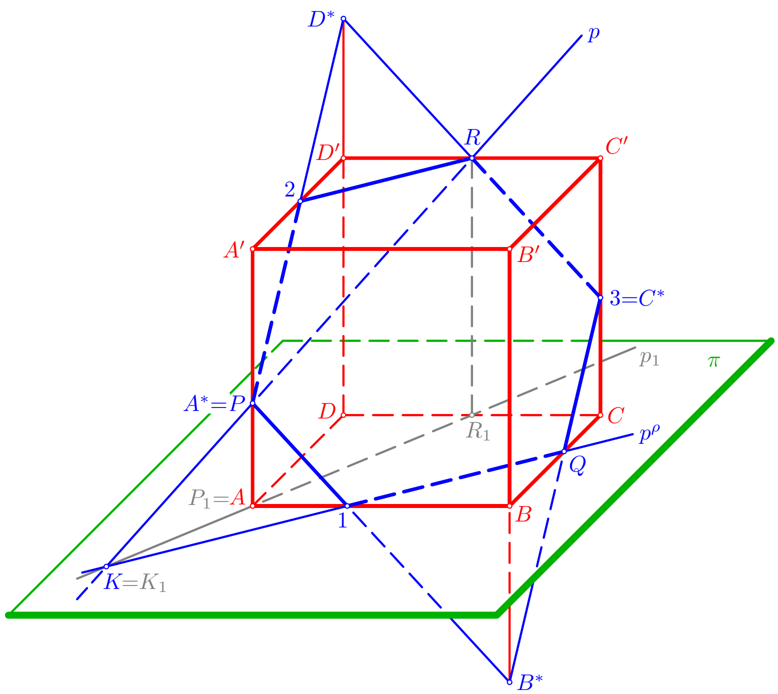
- poslední vrchol 3 řezu sestrojme na hraně CC', přičemž platí $R3 \parallel P1$



- řezem dané krychle rovinou ρ je tedy šestiúhelník $P1Q3R2$, jehož protější strany jsou rovnoběžné



- rovnoběžník $A^*B^*C^*D^*$, kde $A^* = P$, $C^* = 3$, $B^* = \rho \cap BB'$ a $D^* = \rho \cap DD'$, pak odpovídá čtverci $ABCD$ v prostorové osové afinitě mezi rovinami π a ρ; osou této afinity je stopa $p^\rho = \rho \cap \pi$ a její směr udává např. přímka AA'



□

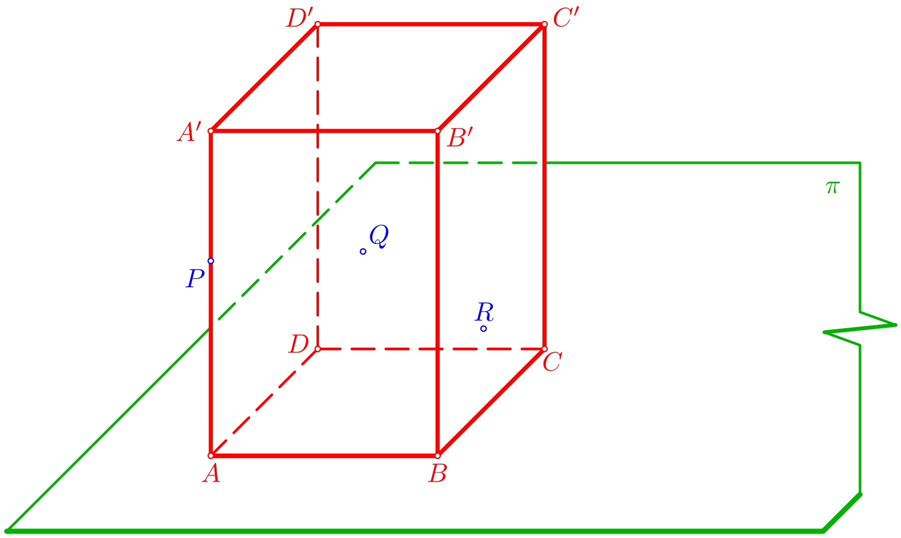
2.1.2. Řez kolmého čtyřbokého hranolu rovinou

Řešené úlohy

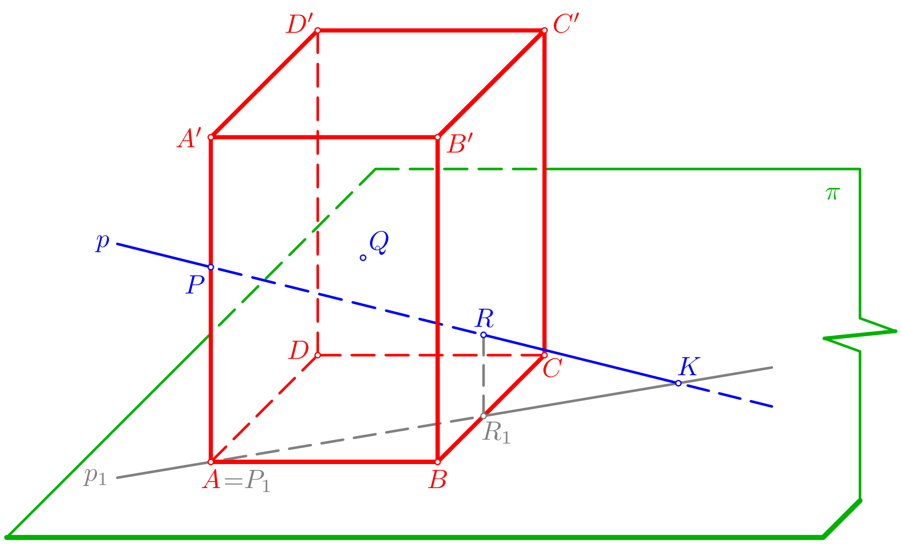
Příklad: Sestrojte řez kolmého čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\rho = PQR$, kde $P \in AA'$, $Q \in CDD'$ a $R \in BCC'$.

Konstrukce:

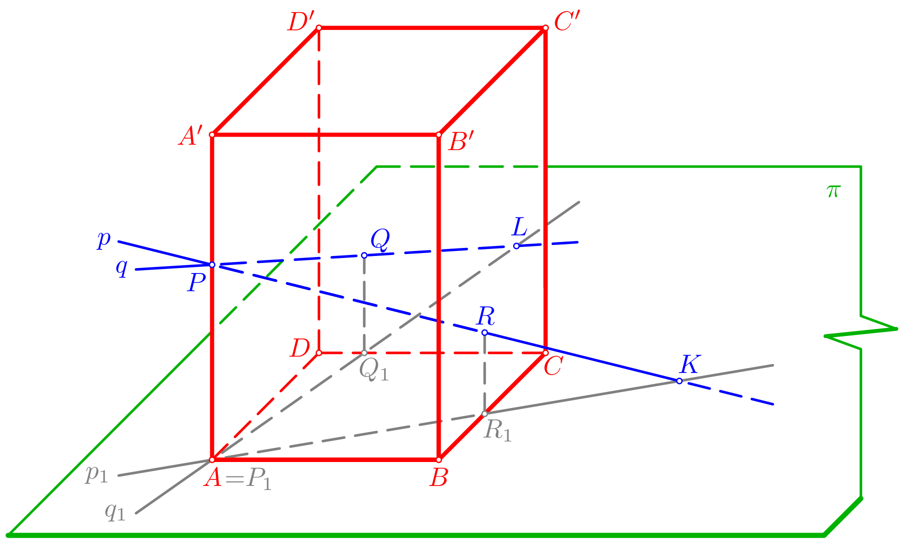
- zadání úlohy: kolmý čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$ s obdélníkovou podstavou stojí na vodorovné rovině (půdorysně) π, body P, Q, R určující rovinu ρ řezu leží na dané hraně a v daných stěnách



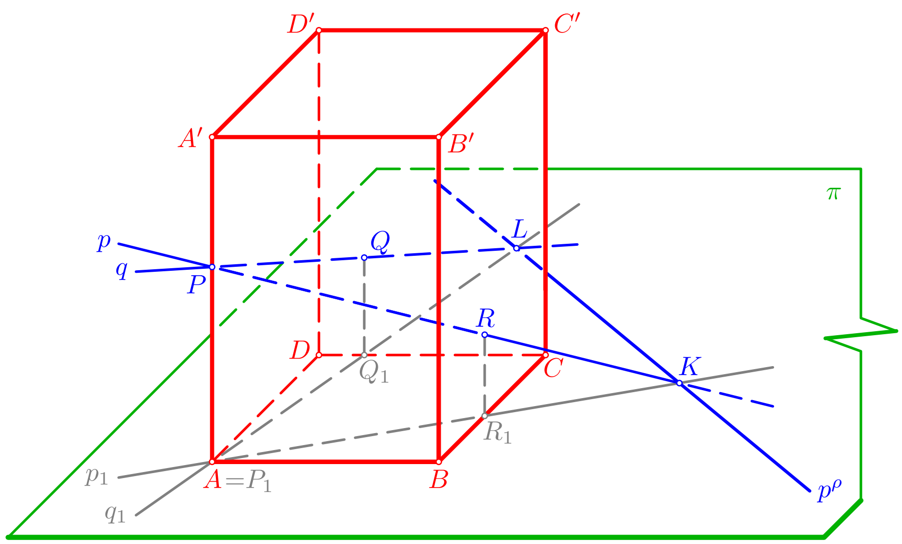
- nejprve sestrojme průsečík K přímky $p = PR$ s rovinou $\pi = ABC$: zřejmě platí $K = p \cap p_1$, kde $p_1 = P_1R_1$ je půdorysem přímky p, tj. $P_1 = A$ a $R_1 \in BC, RR_1 \parallel AA'$



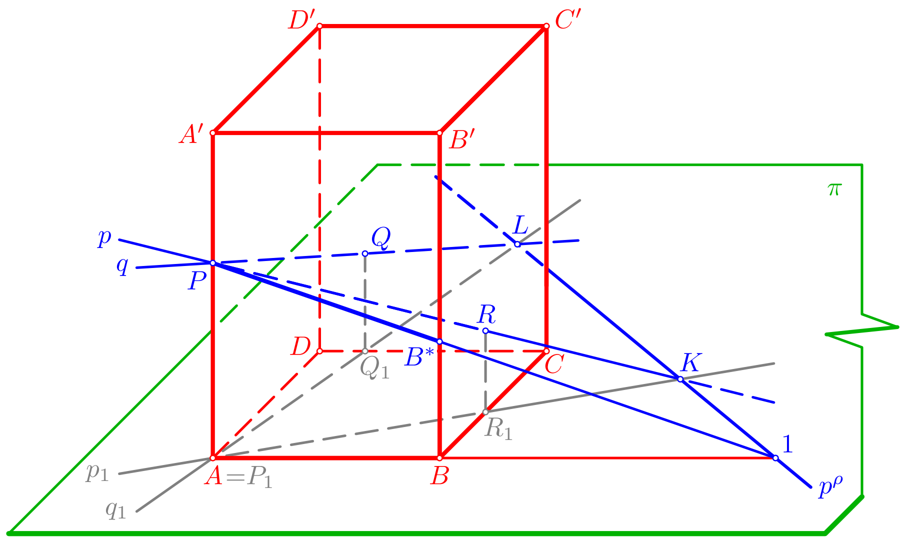
- podobně protíná přímka $q = PQ$ rovinu π v bodě L: $L = q \cap q_1$, kde $q_1 = P_1Q_1$ je půdorysem přímky q, tj. $Q_1 \in CD, QQ_1 \parallel AA'$



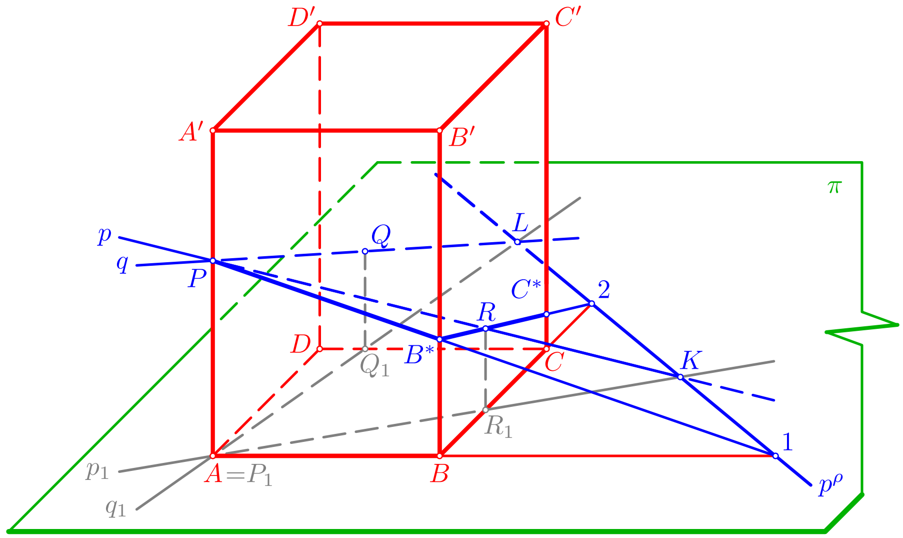
- přímka $p^\rho = KL$ je pak půdorysnou stopou roviny ρ a současně osou prostorové afinity mezi rovinami π, ρ; směr této afinity udává např. přímka AA'



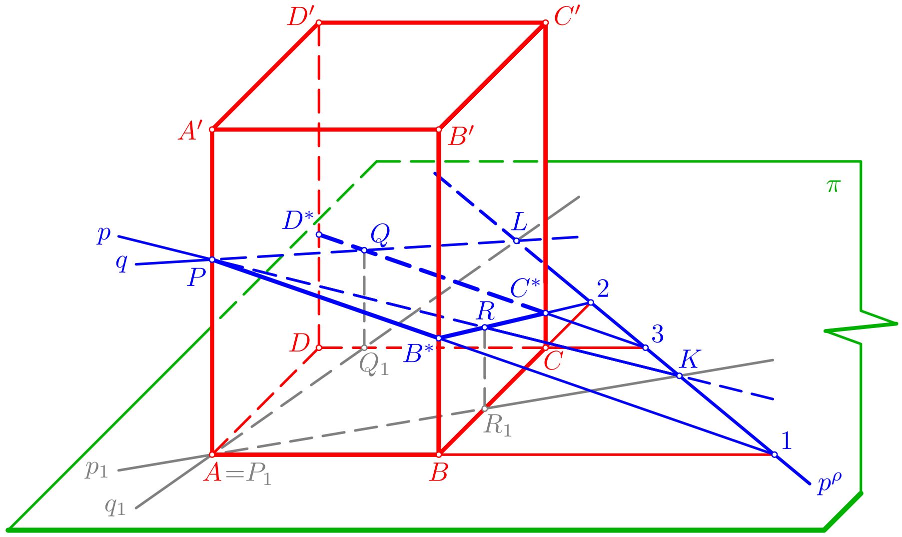
- sestrojme průsečík $1 = AB \cap p^\rho$; přímka $1P$ je potom průsečnicí roviny ρ s rovinou ABB' přední stěny a protíná hranu BB' ve vrcholu B^* řezu



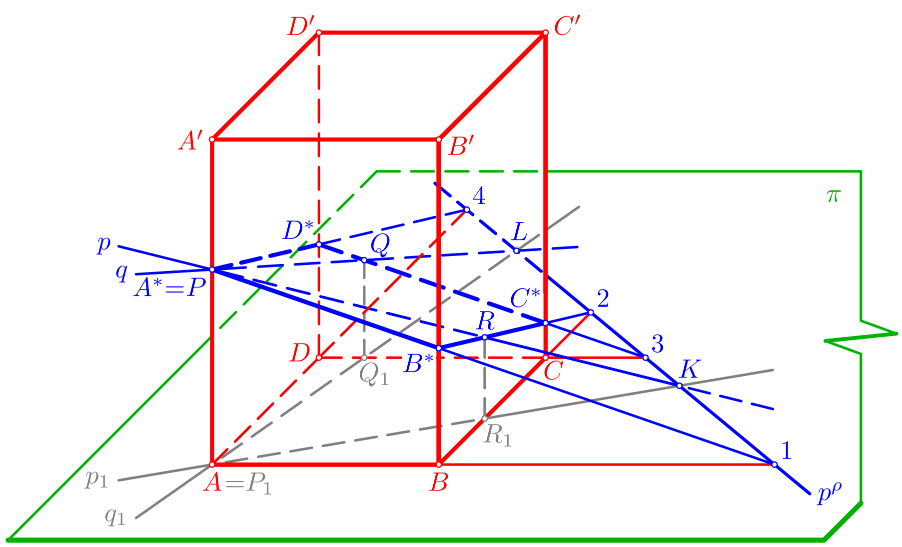
- podobně protíná rovina ρ rovinu BCC' pravé boční stěny v přímce $2B^*$, kde $2 = p^\rho \cap BC$; na přímce $2B^*$ zřejmě musí ležet také zadaný bod R a vrchol C^* řezu na hraně CC'



- analogicky sestrojíme průsečnici $3C^*$ roviny ρ s rovinou CDD' zadní stěny; bod 3 je průsečíkem přímky CD se stopou p^ρ, přímka $3C^*$ prochází zadaným bodem Q a protíná hranu DD' v posledním vrcholu D^* řezu



- na závěr je pro úplnost sestrojen také bod 4, v němž se protínají přímky p^ρ, AD, A^*D^*; řezem daného hranolu rovinou ρ je tedy rovnoběžník $A^*B^*C^*D^*$ (kde $A^* = P$), který odpovídá obdélníku $ABCD$ ve zmíněné prostorové osové afinitě mezi rovinami π, ρ, jejíž osou je stopa p^ρ a směr udává např. přímka AA'; body $1, 2, 3, 4$ jsou samodružnými body této afinity



□

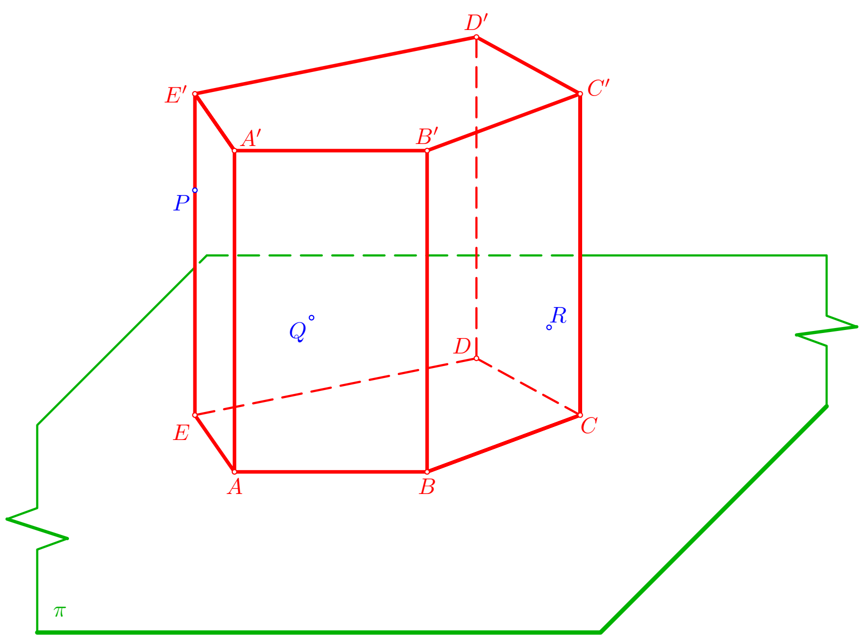
2.1.3. Řez kolmého pětibokého hranolu rovinou

Řešené úlohy

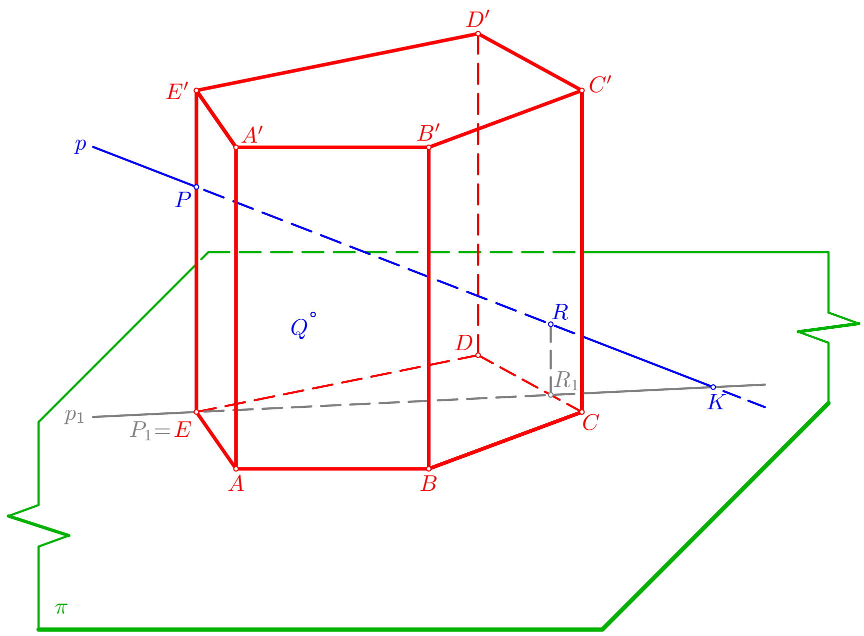
Příklad: Sestrojte řez kolmého pětibokého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\rho = PQR$, kde $P \in EE'$, $Q \in ABB'$ a $R \in CDD'$.

Konstrukce:

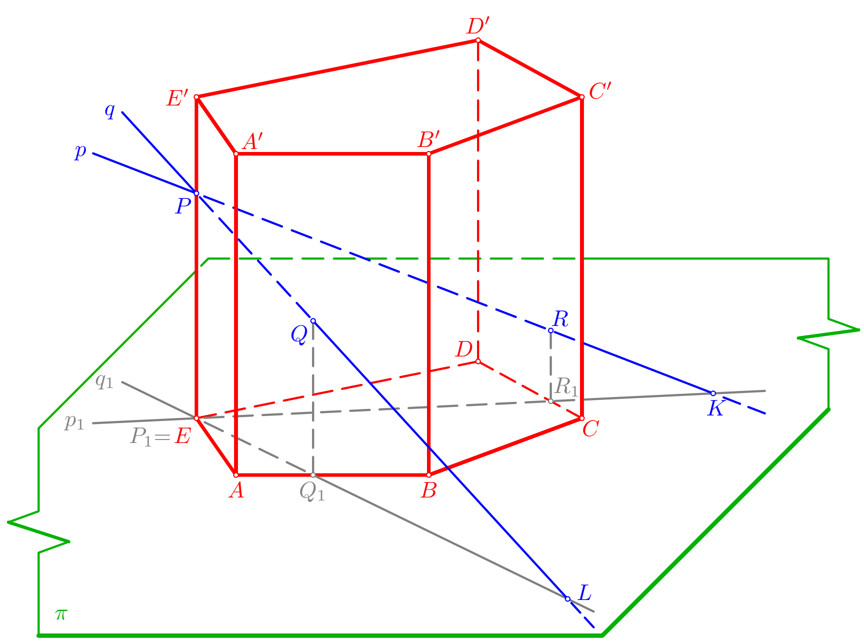
- zadání úlohy: kolmý pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ s podstavou ve tvaru obecného pětiúhelníka stojí na vodorovné rovině (půdorysně) π, body P, Q, R určující rovinu ρ řezu leží na dané hraně a v daných stěnách



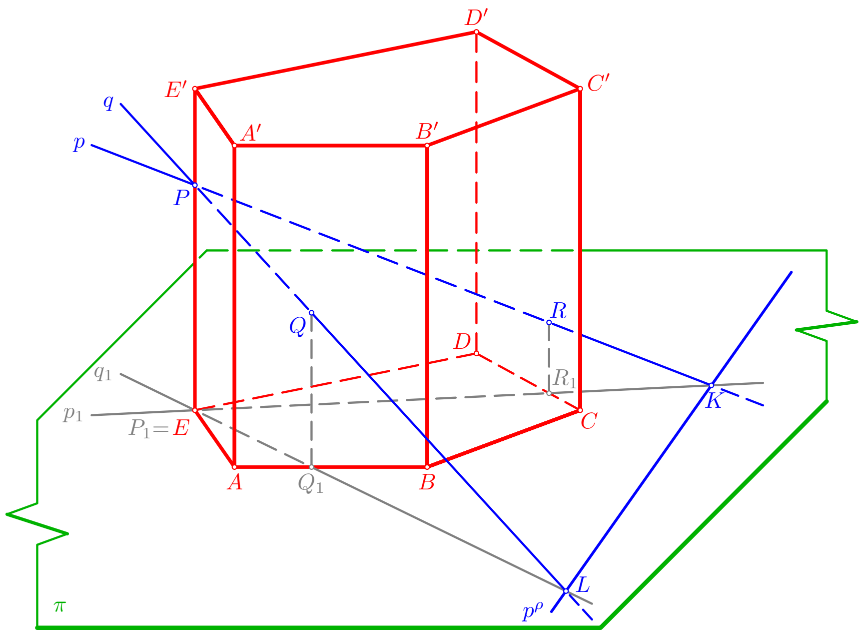
- nejprve sestrojme průsečík K přímky $p = PR$ s rovinou $\pi = ABC$: zřejmě platí $K = p \cap p_1$, kde $p_1 = P_1R_1$ je půdorysem přímky p, tj. $P_1 = E$ a $R_1 \in CD, RR_1 \parallel AA'$



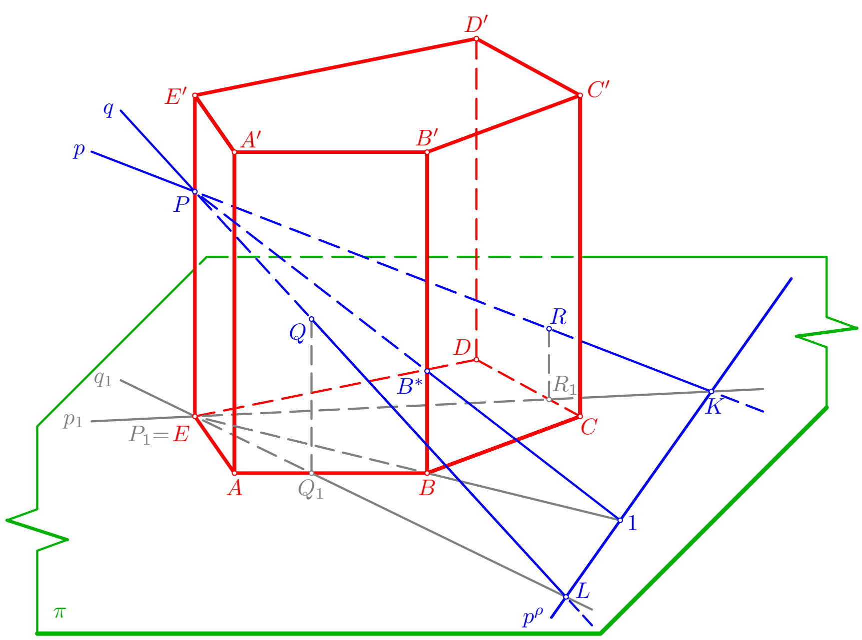
- podobně protíná přímka $q = PQ$ rovinu π v bodě L: $L = q \cap q_1$, kde $q_1 = P_1Q_1$ je půdorysem přímky q, tj. $Q_1 \in AB, QQ_1 \parallel AA'$



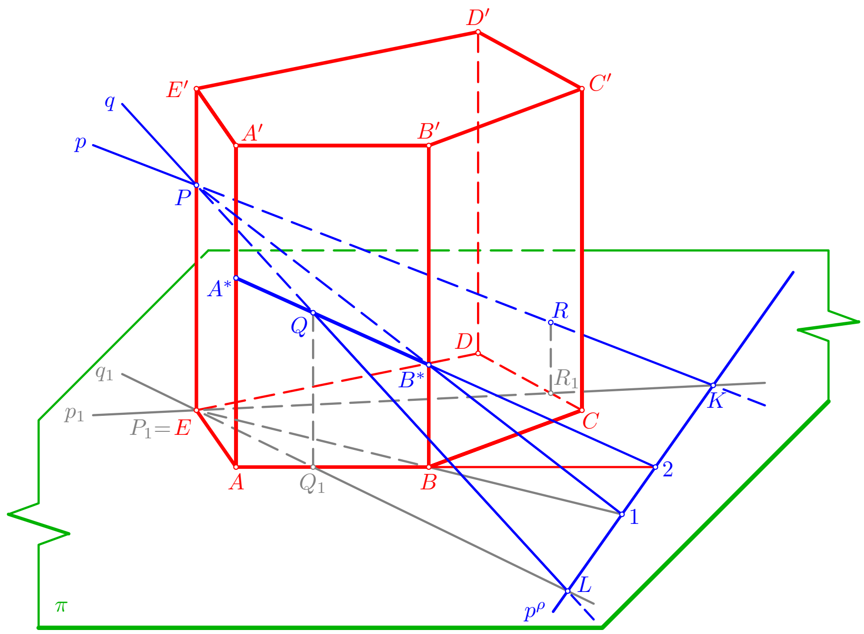
- přímka $p^\rho = KL$ je pak půdorysnou stopou roviny ρ a současně osou prostorové afinity mezi rovinami π, ρ; směr této afinity udává např. přímka AA'



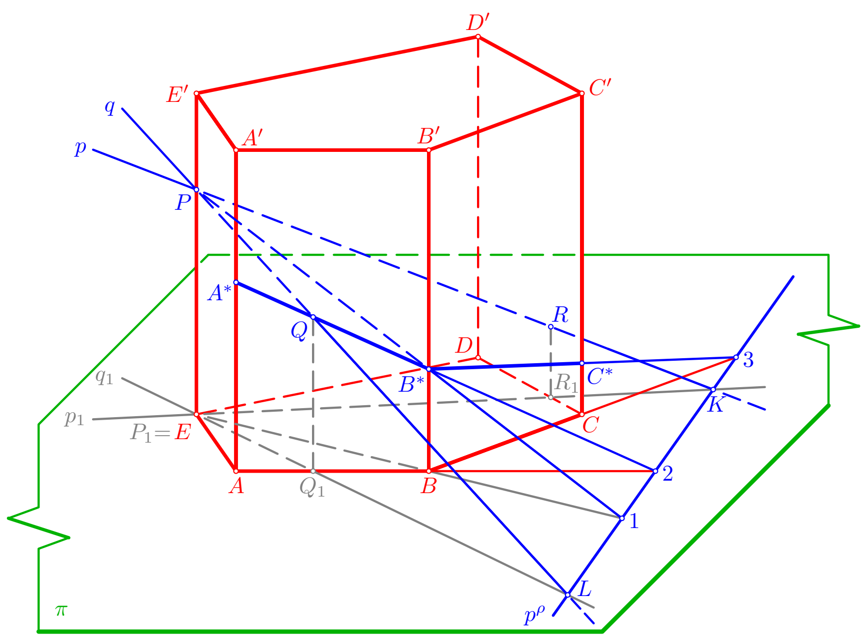
- sestrojme průsečík $1 = EB \cap p^\rho$; přímka $1P$ je potom průsečnicí roviny ρ s rovinou EBB' a protíná hranu BB' ve vrcholu B^* řezu



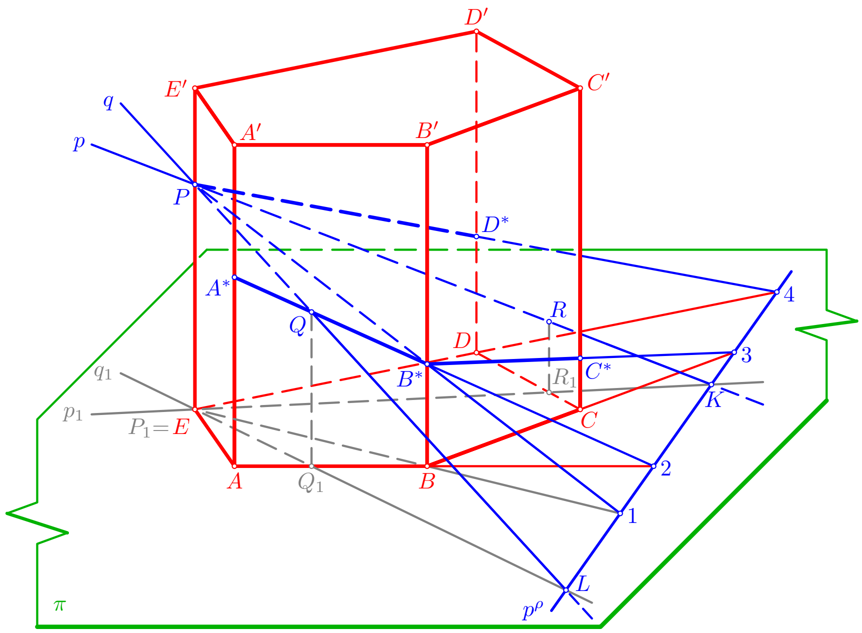
- podobně protíná rovina ρ rovinu ABB' stěny v přímce $2B^*$, kde $2 = p^\rho \cap AB$; na přímce $2B^*$ zřejmě musí ležet také zadaný bod Q a vrchol A^* řezu na hraně AA'



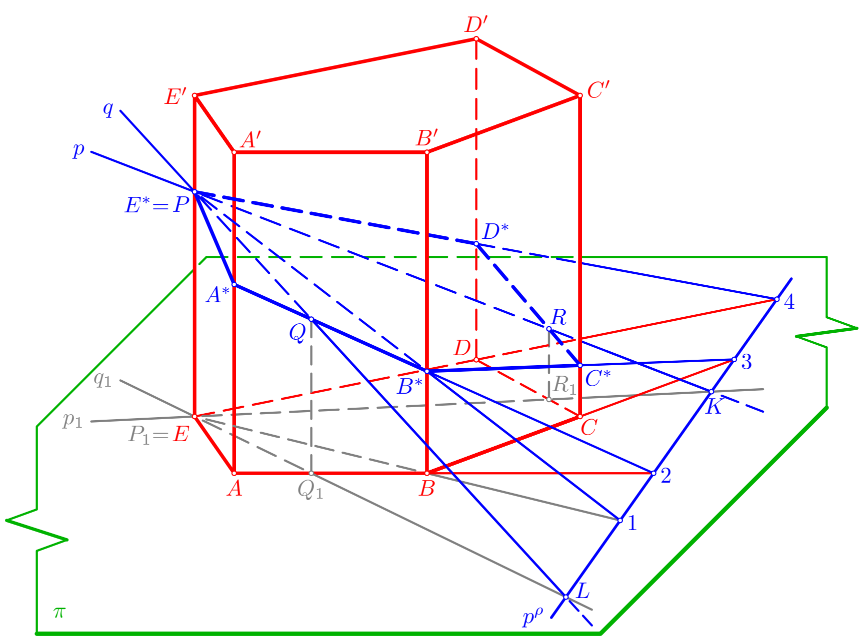
- analogicky sestrojíme průsečnici $3B^*$ roviny ρ s rovinou BCC'; bod 3 je průsečíkem přímky BC se stopou p^ρ a přímka $3B^*$ protíná hranu CC' v dalším vrcholu C^* řezu



- poslední vrchol D^* řezu je průsečíkem hrany DD' s přímkou $P4$, kde $4 = p^\rho \cap ED$

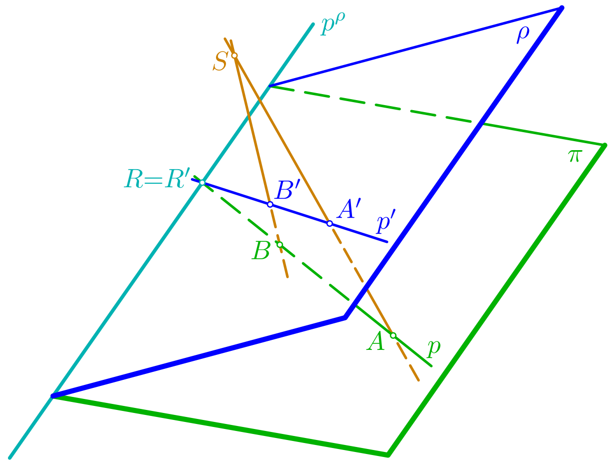


- na závěr doplňme zbývající strany PA^* a C^*D^* ($R \in C^*D^*$); řezem daného hranolu rovinou ρ je tedy pětiúhelník $A^*B^*C^*D^*E^*$ (kde $E^* = P$), který odpovídá pětiúhelníku $ABCDE$ podstavy v prostorové osové afinitě mezi rovinami π, ρ; osou této afinity je stopa p^ρ a směr udává např. přímka AA'



□

2.2. Prostorová středová kolineace mezi dvěma rovinami



- mějme dány dvě různoběžné roviny π, ρ a bod S, který neleží v žádné z nich; pak **středovou kolineací mezi rovinami** π, ρ rozumíme zobrazení, které každému bodu $A \in \pi$ přiřazuje bod $A' \in \rho$ tak, že platí $S \in AA'$
- zjednodušeně řečeno se jedná o **středové promítání bodů z jedné roviny do roviny druhé**
- průsečnici $p^\rho = \pi \cap \rho$ nazýváme **osou kolineace**, daný bod S je **středem kolineace**
- odpovídající si přímky se protínají na ose kolineace v tzv. **samodružných bodech**; viz obrázek a na něm přímky $p = AB$, $p' = A'B'$ a jejich průsečík $R = R'$
- vlastností středové kolineace lze využít při konstrukcích **řezů na jehlanech**; osou kolineace je pak průsečnice roviny podstavy s rovinou řezu a středem je hlavní vrchol daného jehlanu

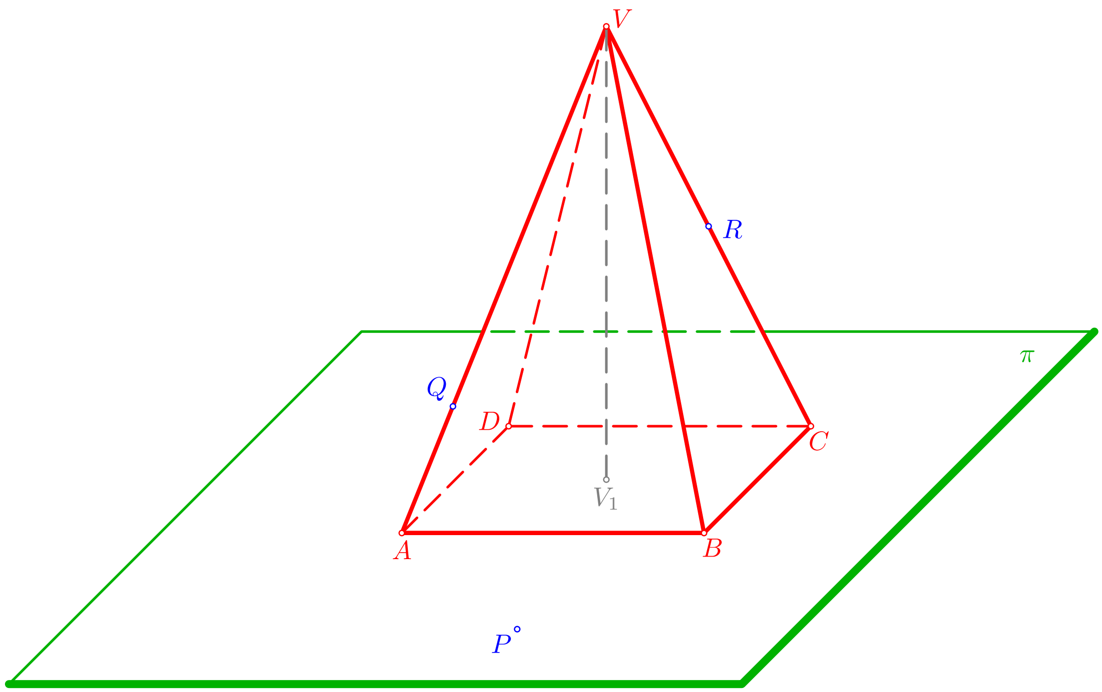
2.2.1. Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu rovinou

Řešené úlohy

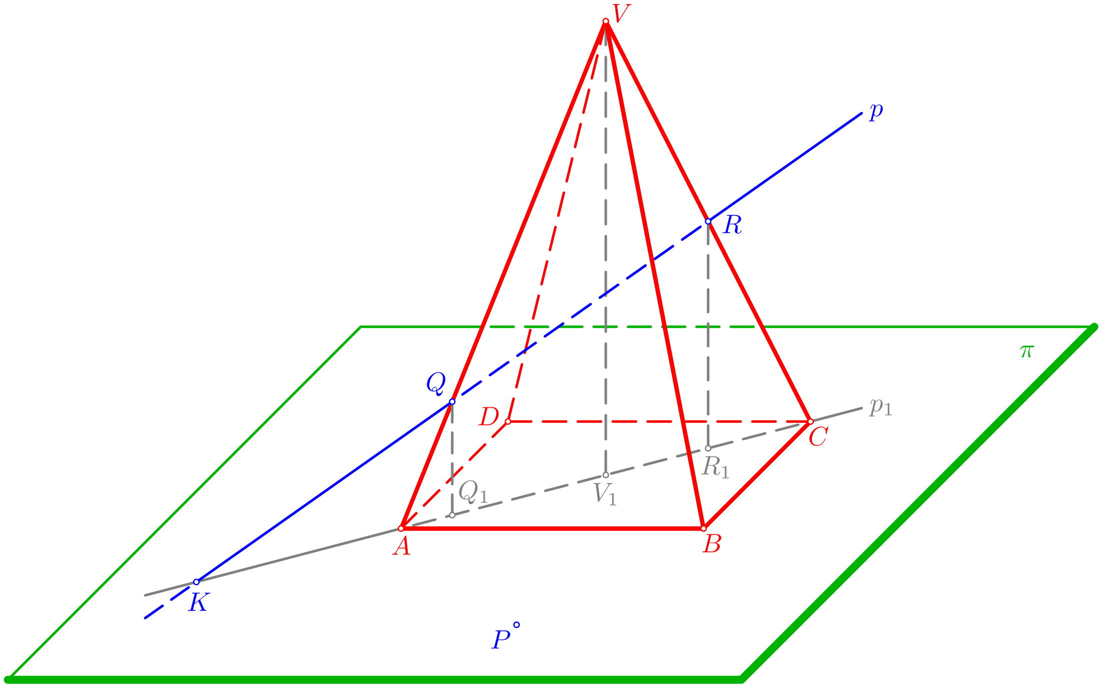
Příklad: Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou $\rho = PQR$, kde $P \in \pi$ $(\pi = ABC)$, $Q \in AV$ a $R \in CV$.

Konstrukce:

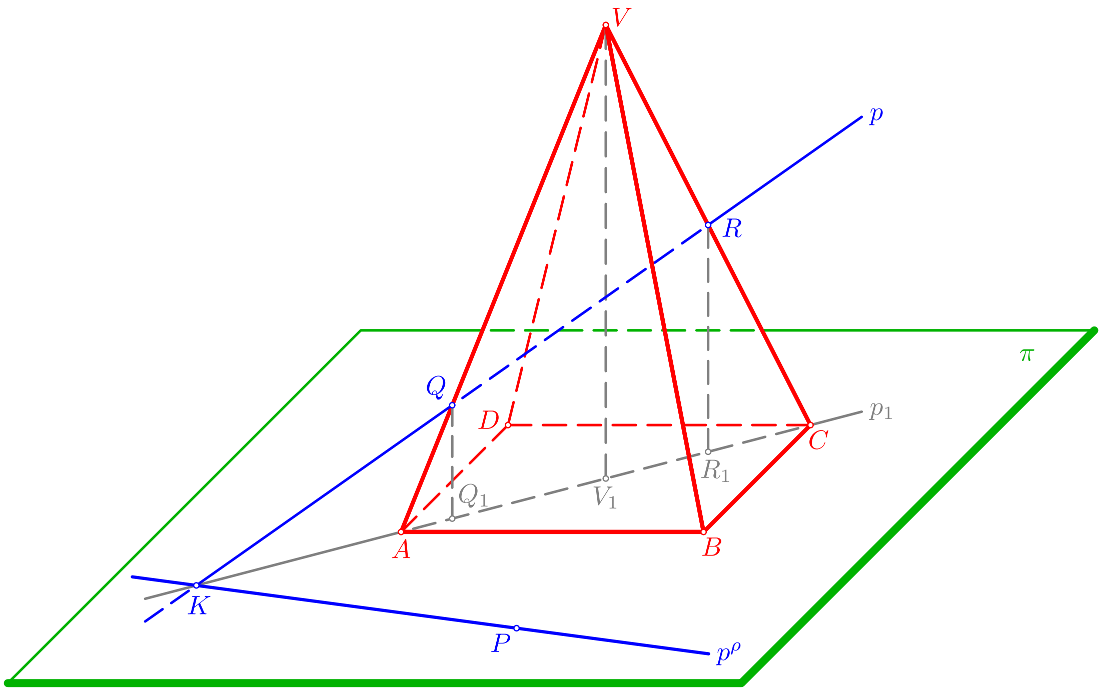
- zadání úlohy: pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ se čtvercovou podstavou stojí na vodorovné rovině (půdorysně) π, body P, Q, R určující rovinu ρ řezu leží v dané rovině a na daných hranách



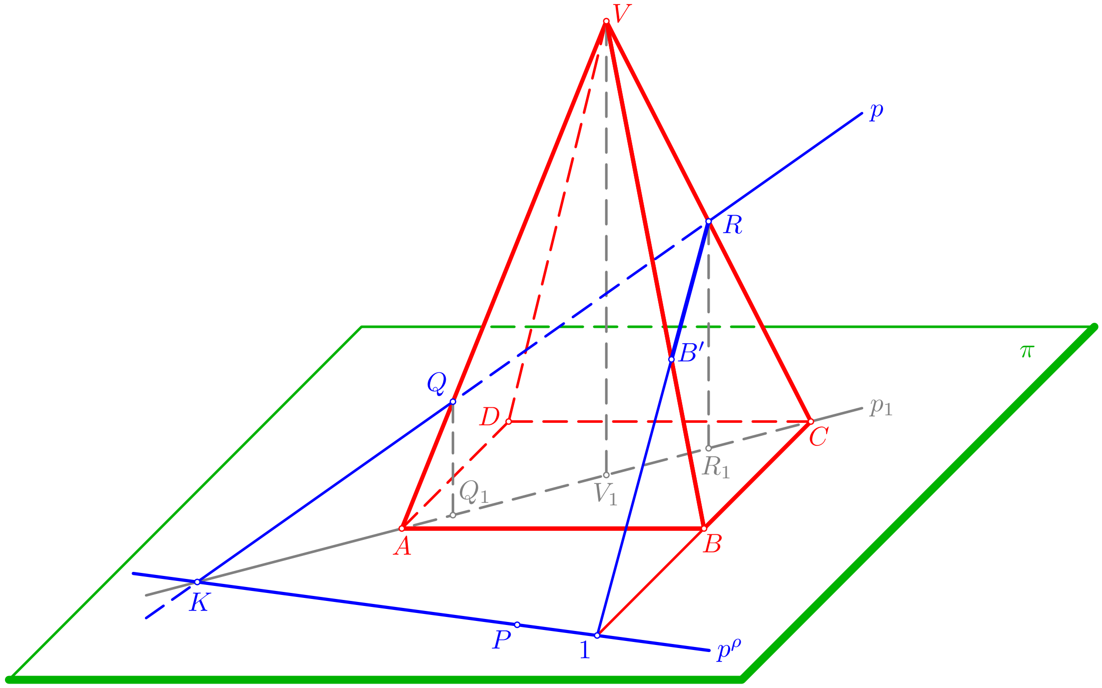
- nejprve sestrojme průsečík K přímky $p = QR$ s rovinou $\pi = ABC$: zřejmě platí $K = p \cap p_1$, kde $p_1 = Q_1R_1$ je půdorysem přímky p, tj. $p_1 = AC$



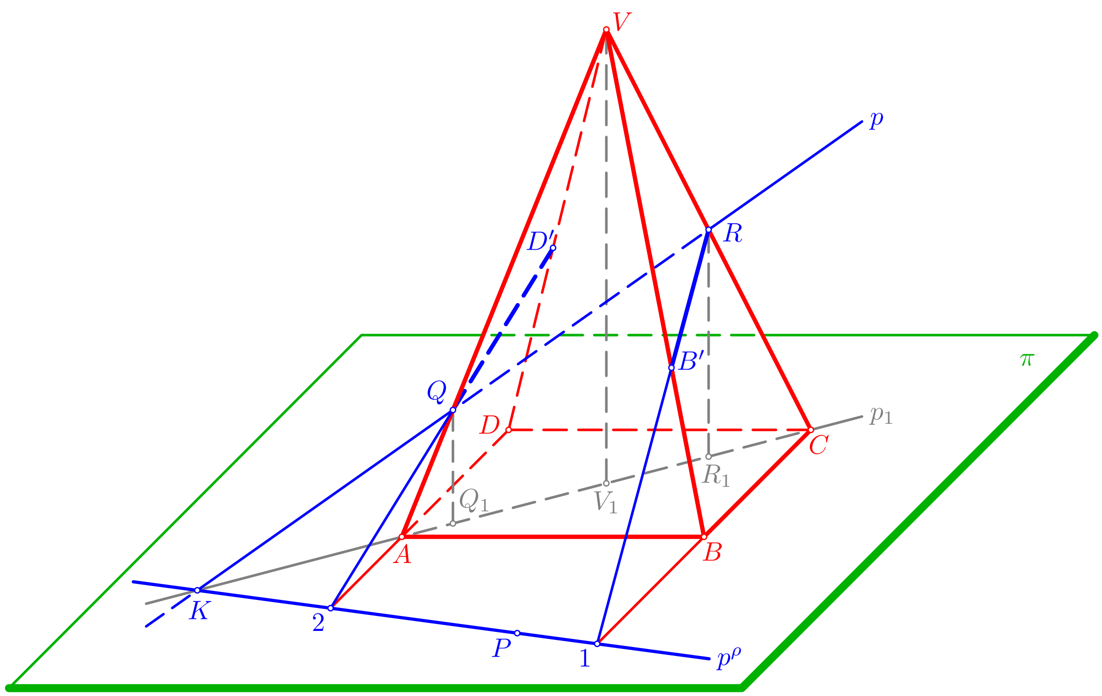
- přímka $p^\rho = PK$ je pak půdorysnou stopou roviny ρ a současně osou prostorové kolineace mezi rovinami π, ρ; středem této kolineace je hlavní vrchol V jehlanu



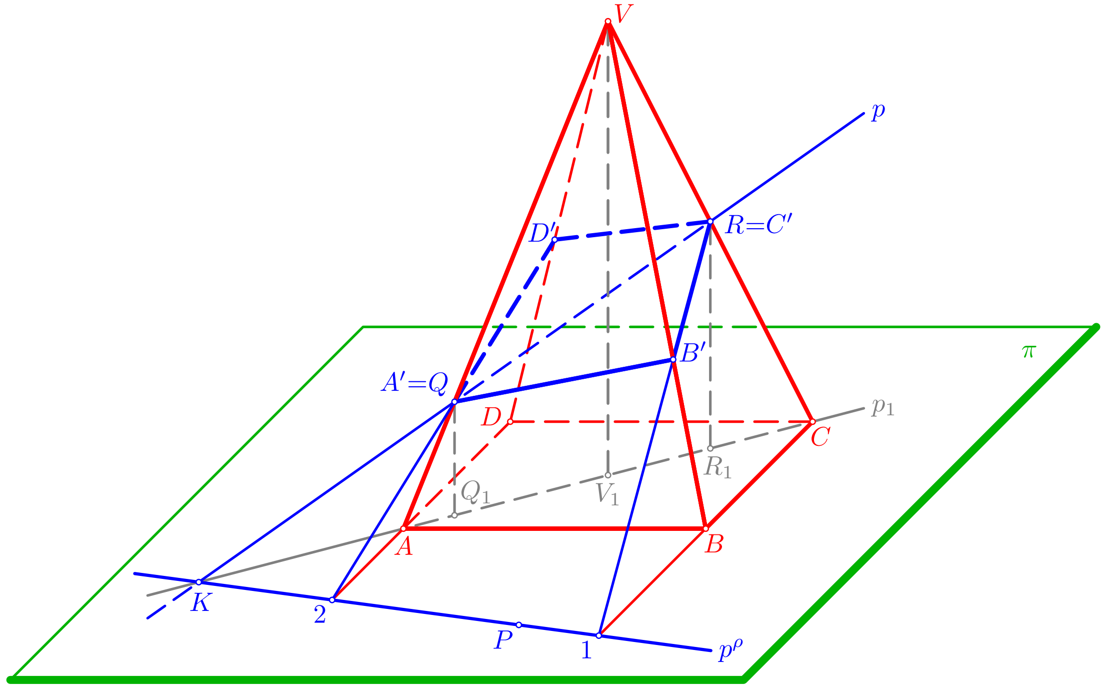
- sestrojme průsečík $1 = BC \cap p^\rho$; přímka $1R$ je potom průsečnicí roviny ρ s rovinou BCV pravé boční stěny a protíná hranu BV ve vrcholu B' řezu



- podobně protíná rovina ρ rovinu ADV levé boční stěny v přímce $2Q$, kde $2 = p^\rho \cap AD$; tak lze sestrojit poslední vrchol $D' = 2Q \cap DV$ hledaného řezu



- na závěr doplňme zbývající strany $A'B'$ a $C'D'$ řezu (kde $A' = Q$ a $C' = R$); tímto řezem je obecný čtyřúhelník $A'B'C'D'$, který odpovídá čtverci $ABCD$ v již zmíněné prostorové středové kolineaci mezi rovinami π, ρ, jejíž osou je stopa p^ρ a středem je hlavní vrchol V daného jehlanu



□

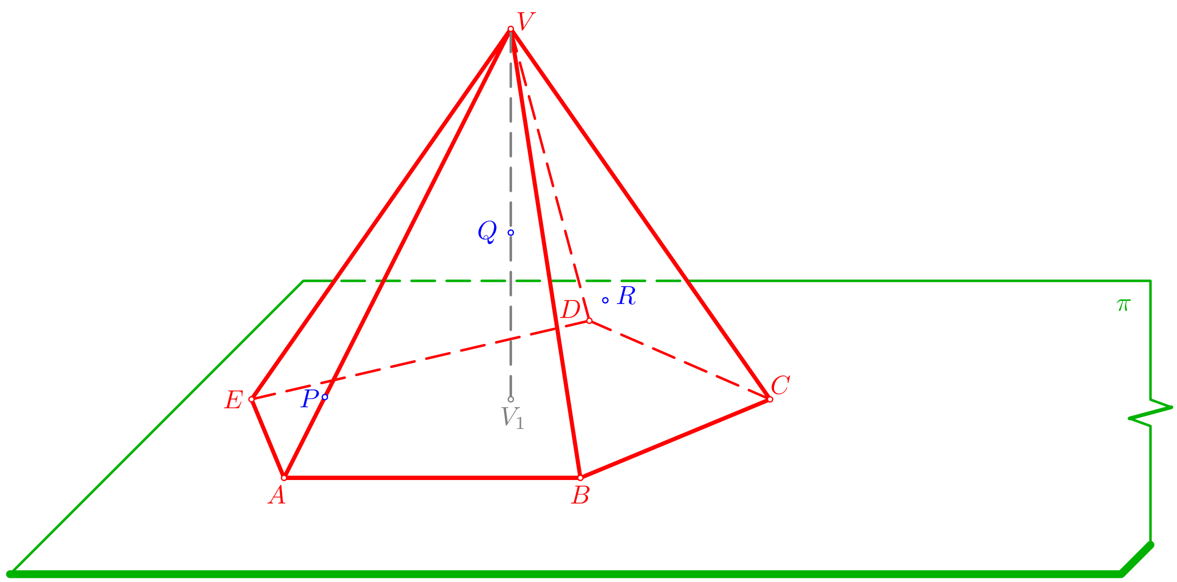
2.2.2. Řez pětibokého jehlanu rovinou

Řešené úlohy

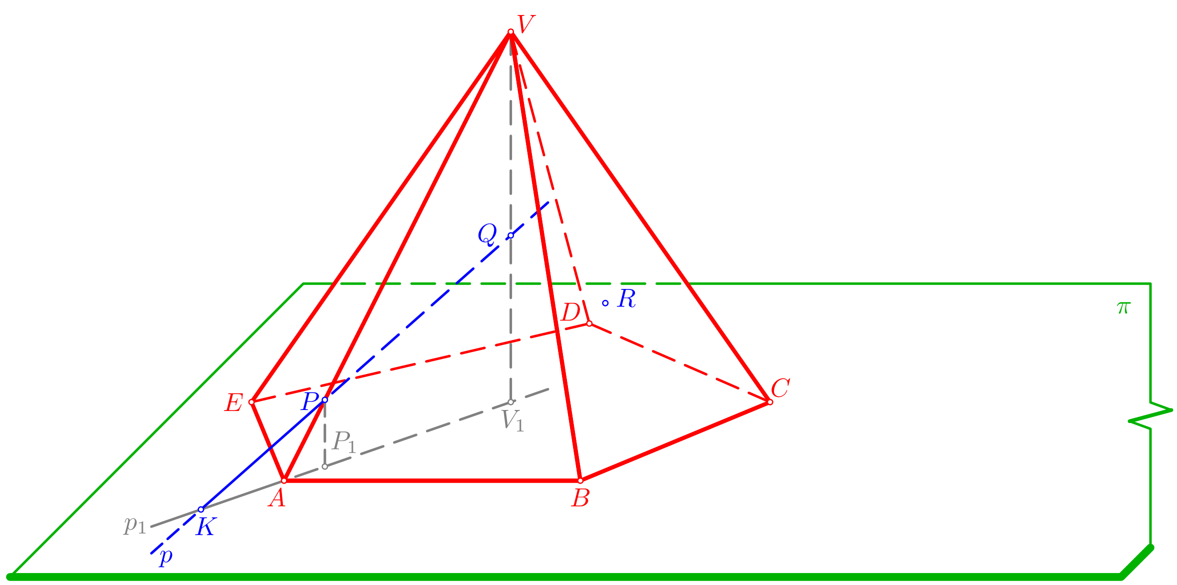
Příklad: Sestrojte řez obecného pětibokého jehlanu $ABCDEV$ rovinou $\rho = PQR$, jestliže $P \in AV$, $Q \in VV_1$ a $R \in BCV$.

Konstrukce:

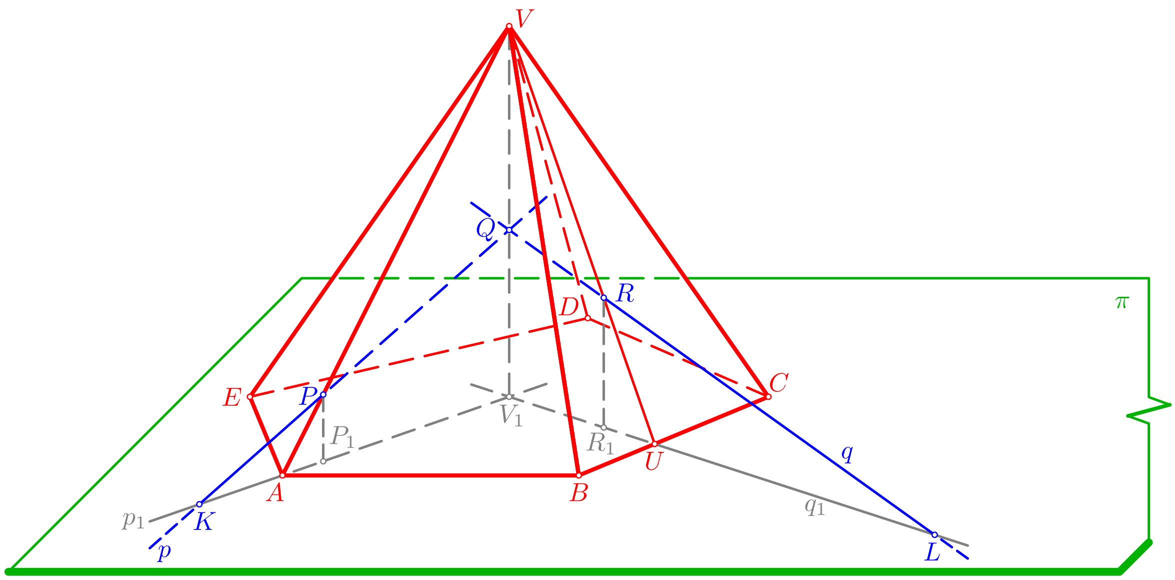
- zadání úlohy: obecný pětiboký jehlan $ABCDEV$ stojí na vodorovné rovině (půdorysně) π, body P, Q, R určující rovinu ρ řezu leží na dané hraně, na výšce a v dané stěně



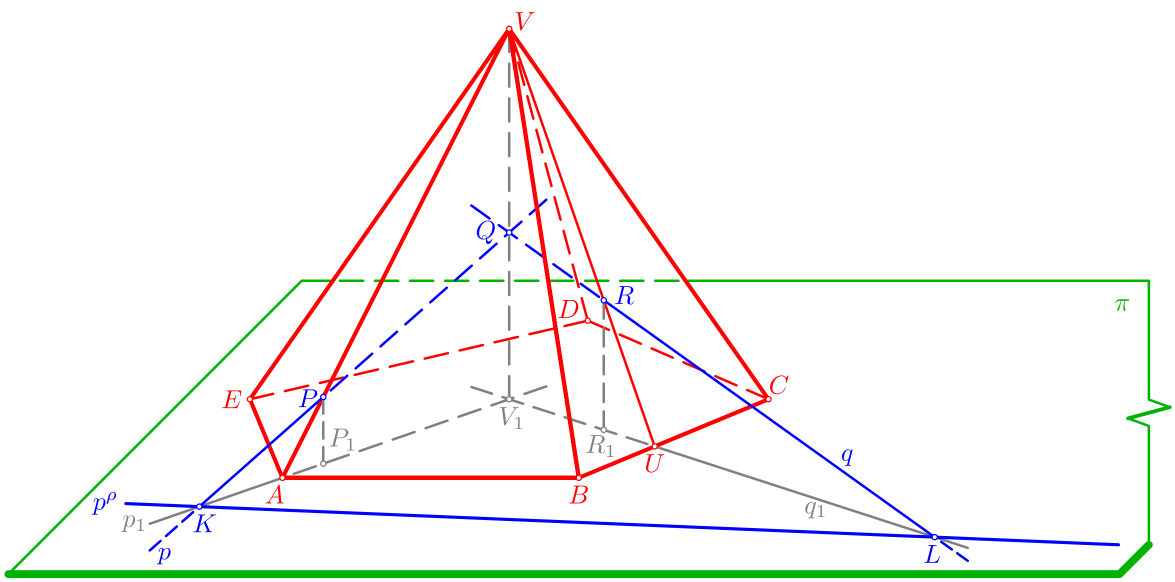
- nejprve sestrojme průsečík K přímky $p = PQ$ s rovinou $\pi = ABC$: zřejmě platí $K = p \cap p_1$, kde $p_1 = P_1Q_1$ je půdorysem přímky p, tj. $p_1 = AV_1$



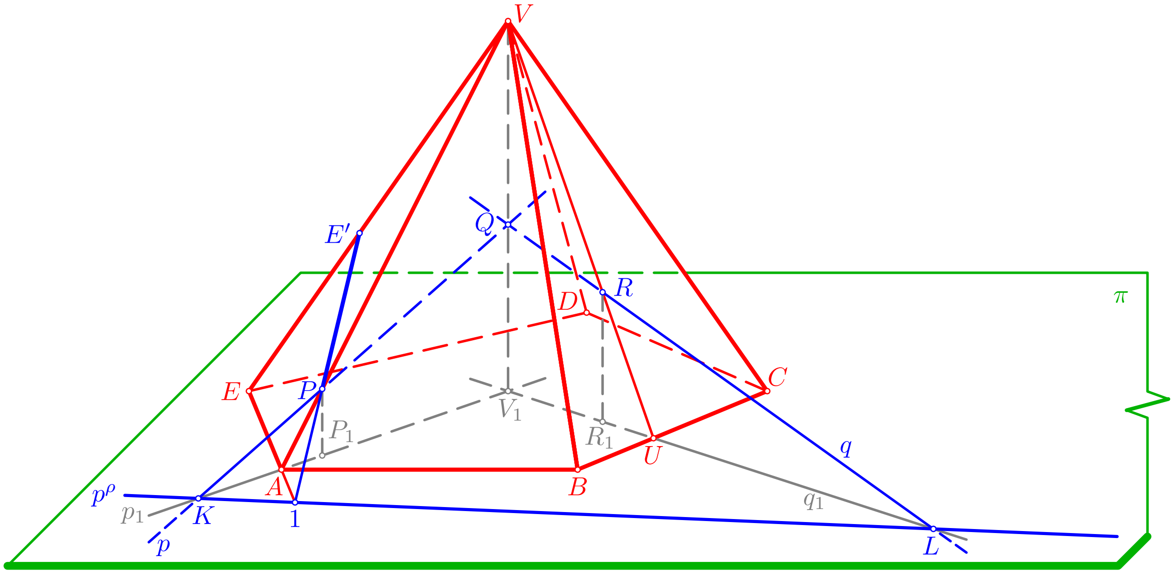
- podobně najdeme průsečík L přímky $q = QR$ s půdorysnou π: $q_1 = V_1U$, kde $U = BC \cap VR$, a $L = q \cap q_1$



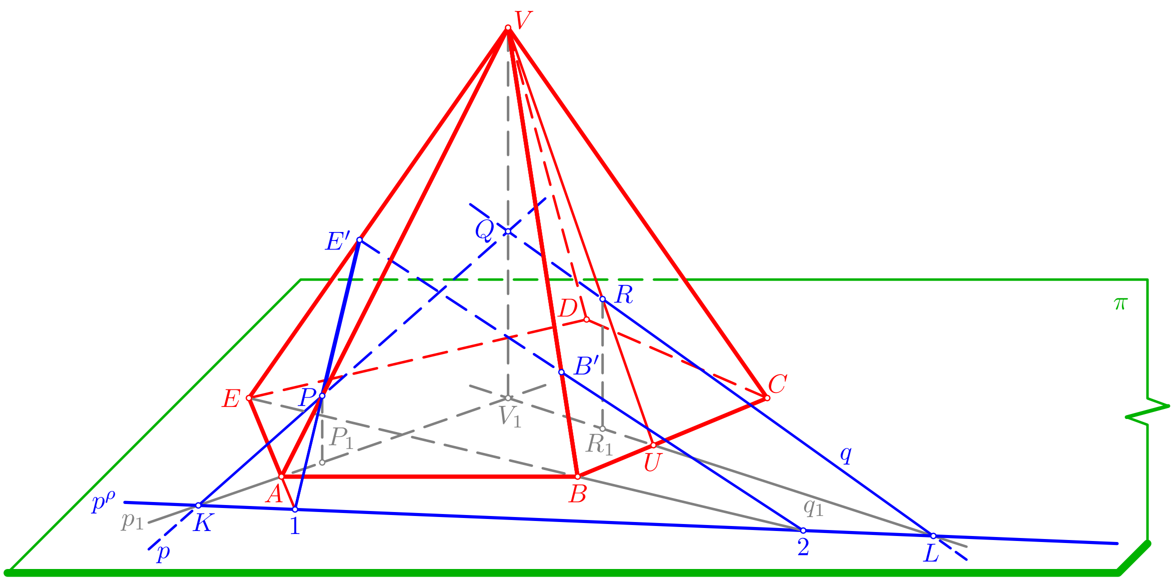
- přímka $p^\rho = KL$ je pak půdorysnou stopou roviny ρ a současně osou prostorové kolineace mezi rovinami π, ρ; středem této kolineace je hlavní vrchol V jehlanu



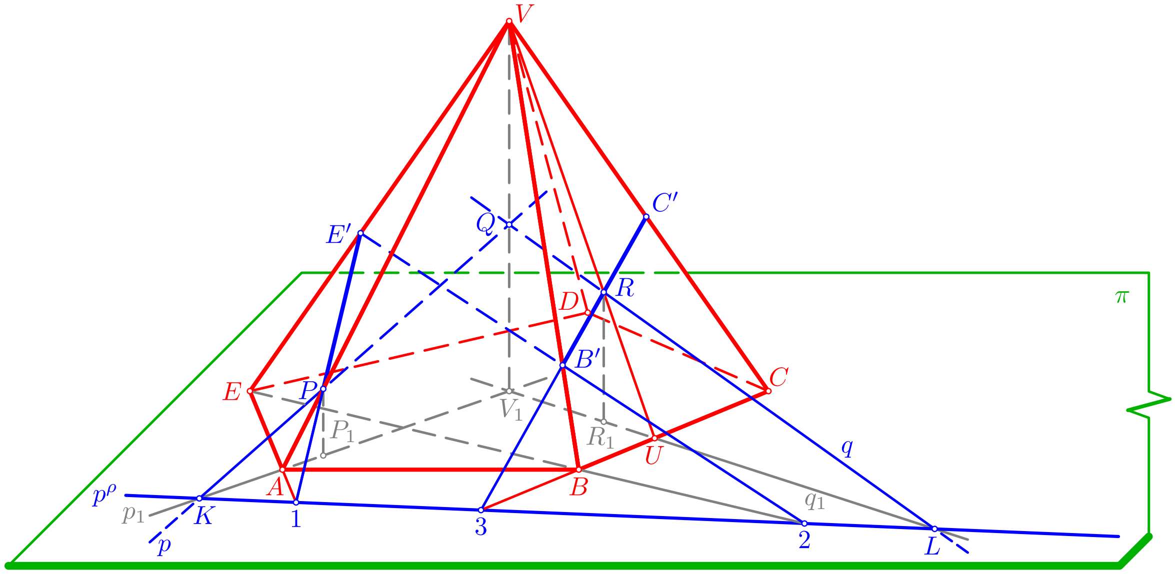
- sestrojme průsečík $1 = AE \cap p^\rho$; přímka $1P$ je potom průsečnicí roviny ρ s rovinou AEV a protíná hranu EV ve vrcholu E' řezu



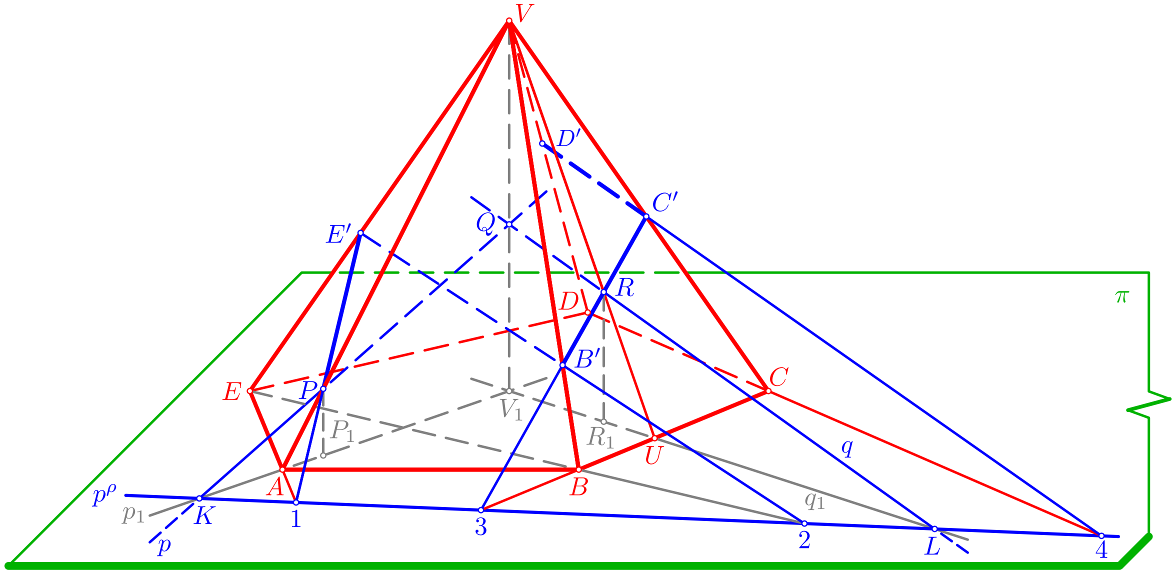
- podobně protíná rovina ρ rovinu EBV v přímce $2E'$, kde $2 = p^\rho \cap EB$; tak lze sestrojit další vrchol $B' = 2E' \cap BV$ hledaného řezu



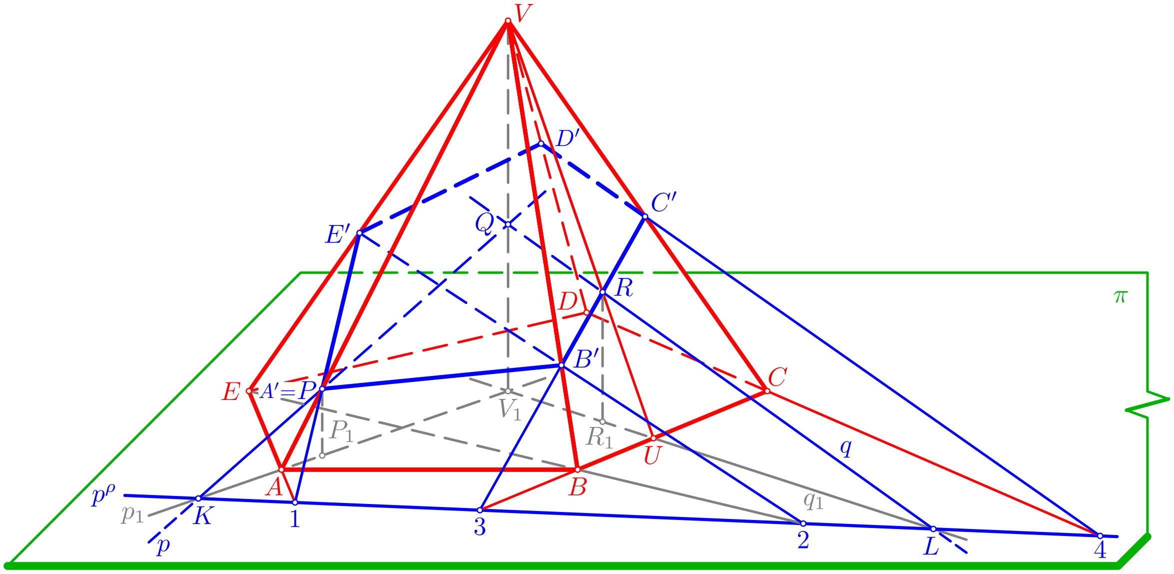
- analogicky sestrojíme vrchol $C' = CV \cap 3B'$, kde je $3 = p^\rho \cap BC$; na přímce $B'C'$ musí ležet také daný bod R



- konečně protíná přímka CD stopu p^ρ v bodě 4 a přímka $4C'$ protíná hranu DV v posledním vrcholu D' hledaného řezu



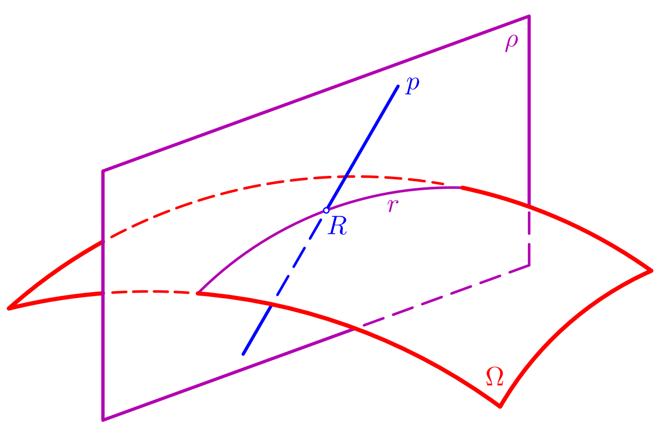
- na závěr doplňme zbývající strany $A'B'$ a $D'E'$ řezu (kde $A' = P$); tímto řezem je obecný pětiúhelník $A'B'C'D'E'$, který odpovídá podstavnému pětiúhelníku $ABCDE$ v již zmíněné prostorové středové kolineaci mezi rovinami π, ρ, jejíž osou je stopa p^ρ a středem je hlavní vrchol V daného jehlanu



□

3. Průnik přímky s tělesem

Výklad



- při **konstrukci průniku dané přímky** p **s daným objektem** Ω se používá tento obecný princip:

  1. přímkou p se vhodně proloží **pomocná rovina** ρ
  2. sestrojí se průnik r roviny ρ s daným objektem Ω
  3. průnik R útvaru r s danou přímkou p je pak hledaným průnikem přímky p a objektu Ω

3.1. Průnik přímky s hranolem, válcem, jehlanem a kuželem

- pro snadnou konstrukci průniku dané přímky s **hranolem** či **válcem** je vhodné proložit přímkou p pomocnou rovinu ρ tak, aby byla tzv. **směrová**, tj. **rovnoběžná s povrchovými úsečkami** daného hranolu či válce; řezem r roviny ρ na hranolu či válci je pak **rovnoběžník** (v případě kolmého hranolu či válce je to **obdélník**) a stačí určit jeho průnik s danou přímkou p

- podobně je pro snadnou konstrukci průniku dané přímky s **jehlanem** či **kuželem** vhodné proložit přímkou p pomocnou rovinu ρ tak, aby byla tzv. **vrcholová**, tj. aby **procházela (hlavním) vrcholem** daného jehlanu či kužele; řezem r roviny ρ na jehlanu či kuželi je pak **trojúhelník** a opět stačí určit jeho průnik s danou přímkou p

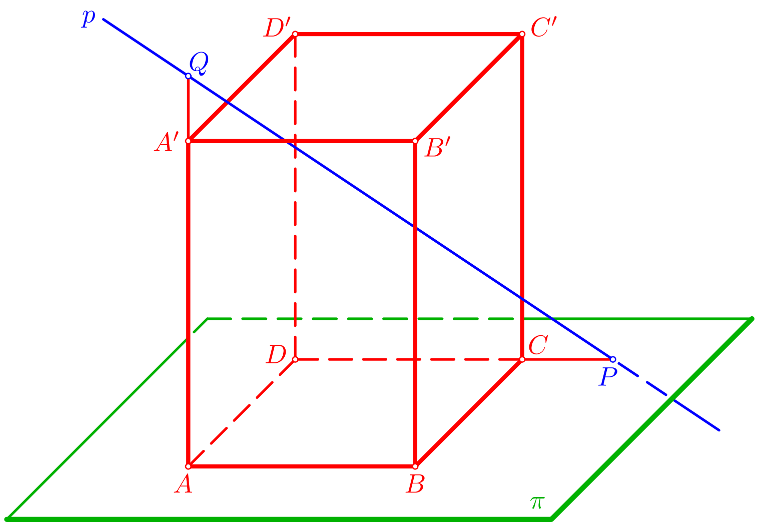
3.1.1. Průnik přímky s kolmým čtyřbokým hranolem

Řešené úlohy

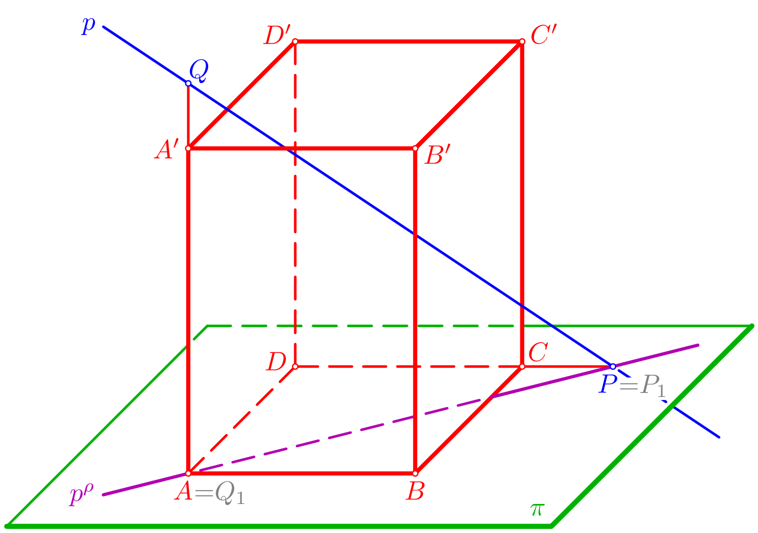
Příklad: Sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s kolmým čtyřbokým hranolem $ABCDA'B'C'D'$; přitom je $P \in CD$ a $Q \in AA'$.

Konstrukce:

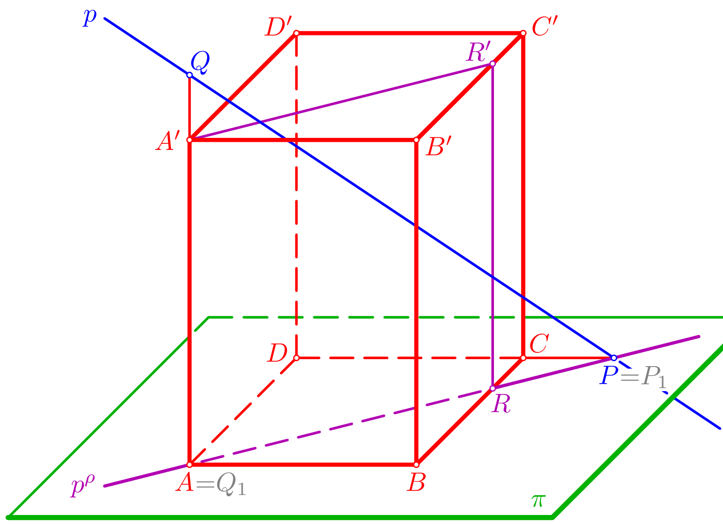
- zadání úlohy: kolmý čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$ s obdélníkovou podstavou stojí na vodorovné rovině (půdorysně) π, body P, Q určující přímku p leží na daných přímkách



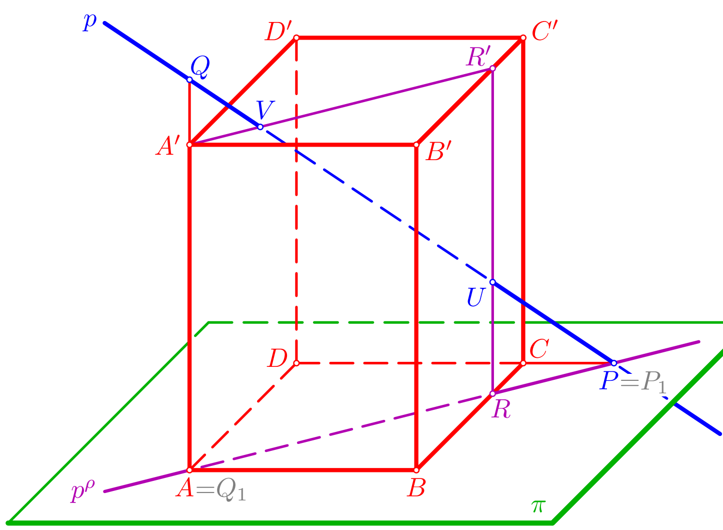
- přímkou $p = PQ$ proložme rovinu $\rho = PQA$, která je kolmá k půdorysně π a protíná ji v přímce $p^\rho = PA$



- dále sestrojme řez daného hranolu rovinou ρ; tím je obdélník $ARR'A'$, kde $R = p^\rho \cap BC$ a $R' \in B'C'$, $RR' \parallel AA'$



- přímka $p = PQ$ pak protíná hranici tohoto obdélníkového řezu v bodech U, V; ty jsou krajními body úsečky UV, která je hledaným průnikem dané přímky p s daným hranolem $ABCDA'B'C'D'$



$\square$

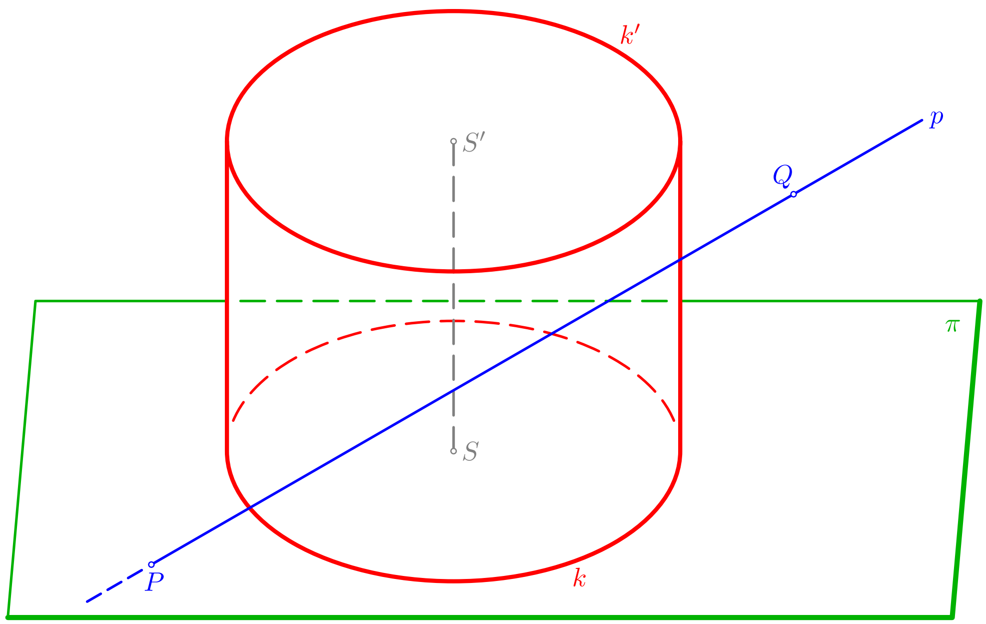
3.1.2. Průnik přímky s rotačním válcem

Řešené úlohy

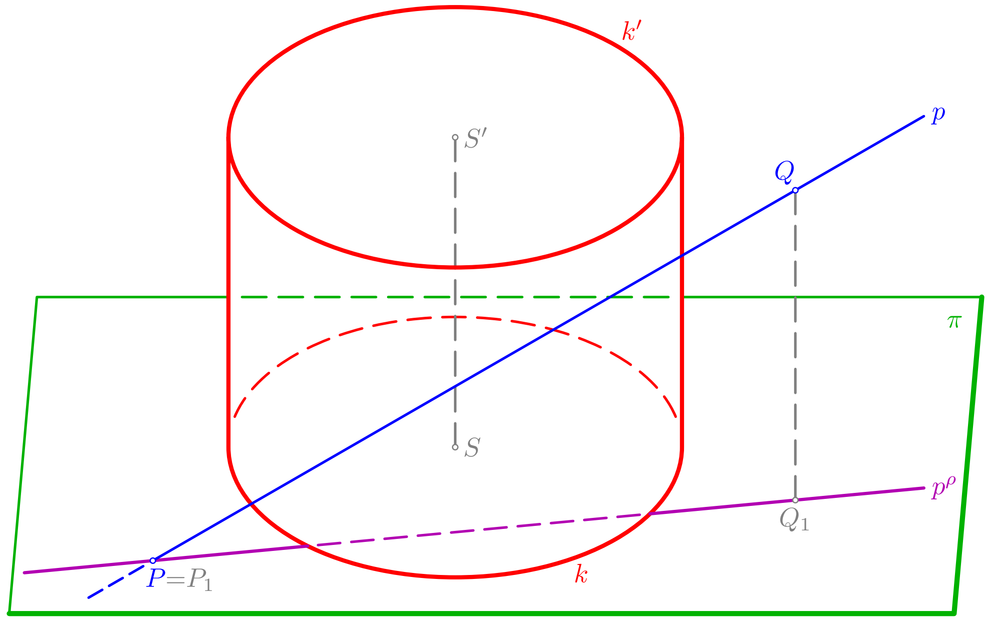
Příklad: Sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s rotačním válcem, jehož jedna podstavná kružnice $k(S, r)$ leží v půdorysně π; bod P leží v rovině dolní podstavy (tj. $P \in \pi$) a bod Q leží v rovině horní podstavy válce.

Konstrukce:

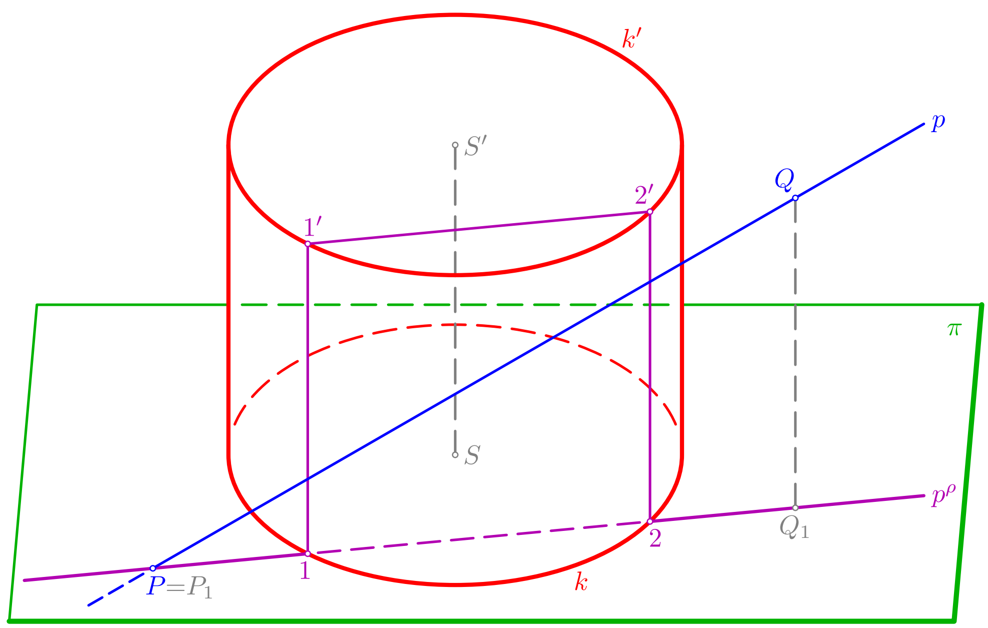
- zadání úlohy: rotační válec s podstavnou kružnicí $k(S, r)$ stojí na vodorovné rovině (půdorysně) π, body P, Q určující přímku p leží v daných rovinách



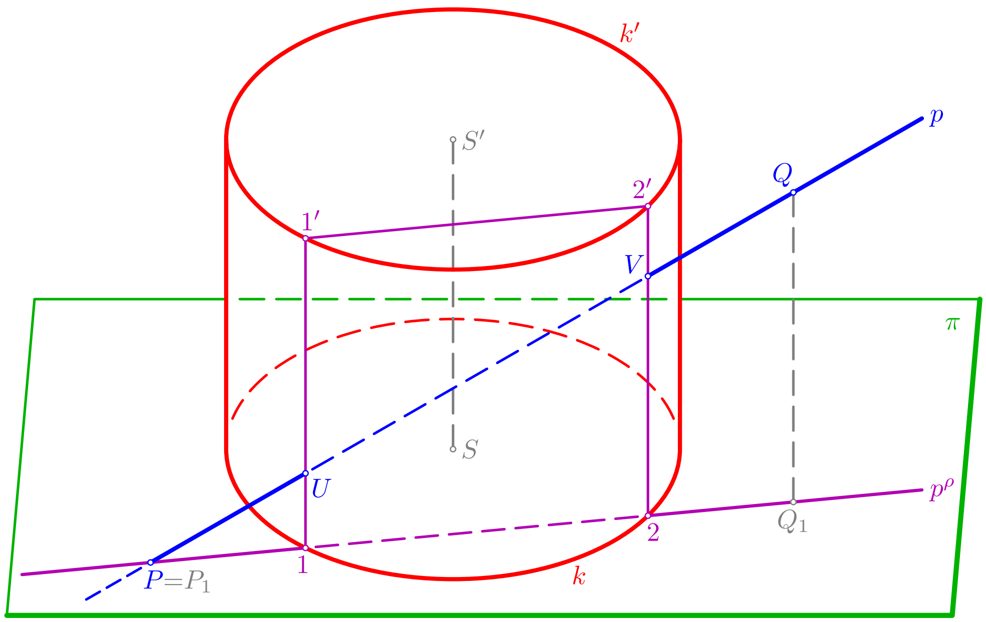
- přímkou $p = PQ$ proložme rovinu $\rho = PQQ_1$, která je kolmá k půdorysně π a protíná ji v přímce $p^\rho = PQ_1$, kde $Q_1Q \parallel SS'$ a $|Q_1Q| = |SS'|$



- dále sestrojme řez daného válce rovinou ρ; tím je obdélník $122'1'$, kde body $1, 2$ jsou průsečíky přímky p^ρ s podstavnou kružnicí k a body $1', 2'$ leží na horní podstavné kružnici $k'(S', r)$



- přímka $p = PQ$ pak protíná hranici tohoto obdélníkového řezu v bodech U, V; ty jsou krajními body úsečky UV, která je hledaným průnikem dané přímky p s daným rotačním válcem



□

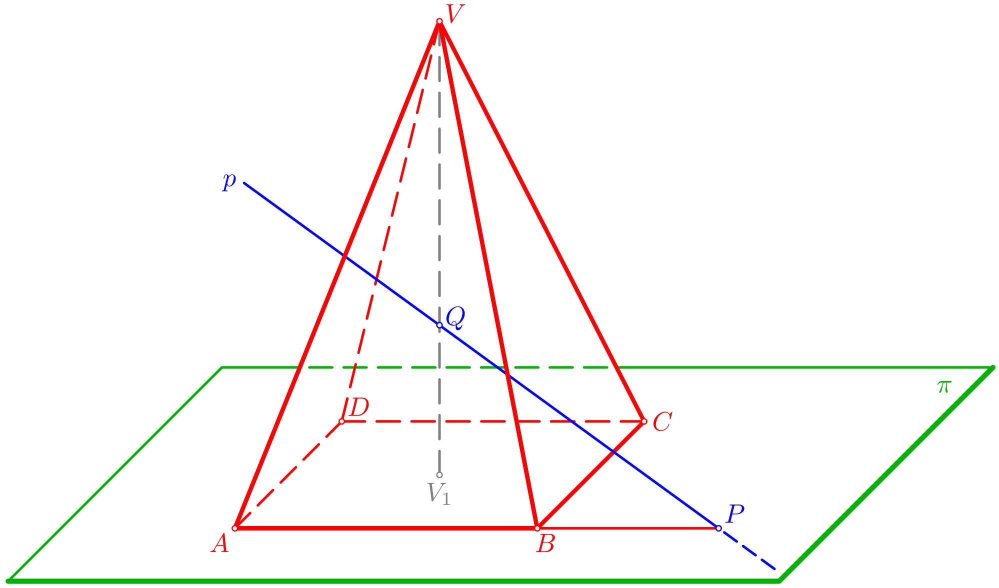
3.1.3. Průnik přímky s pravidelným čtyřbokým jehlanem

Řešené úlohy

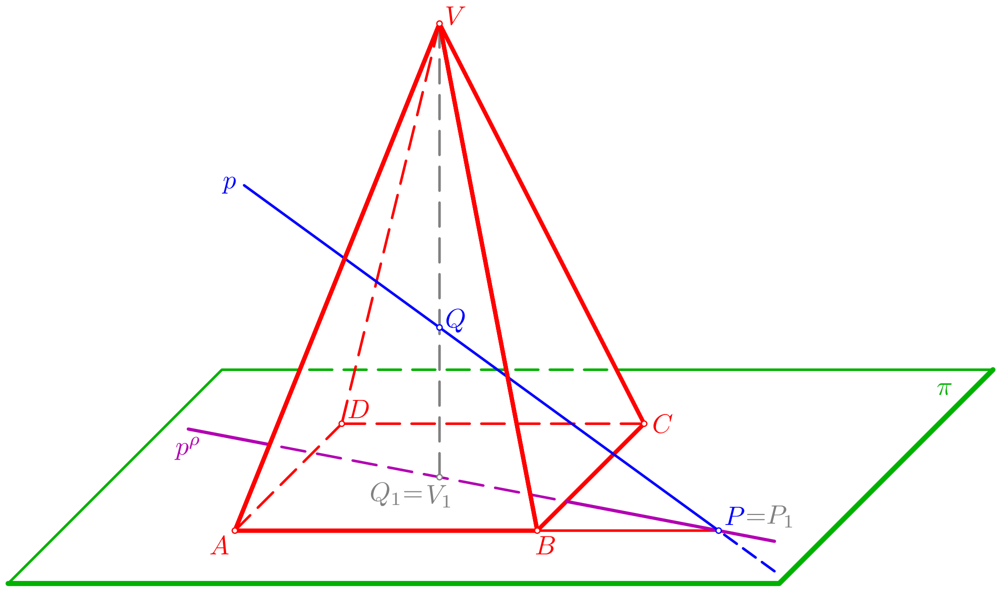
Příklad: Sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$; přitom je $P \in AB$ a $Q \in VV_1$.

Konstrukce:

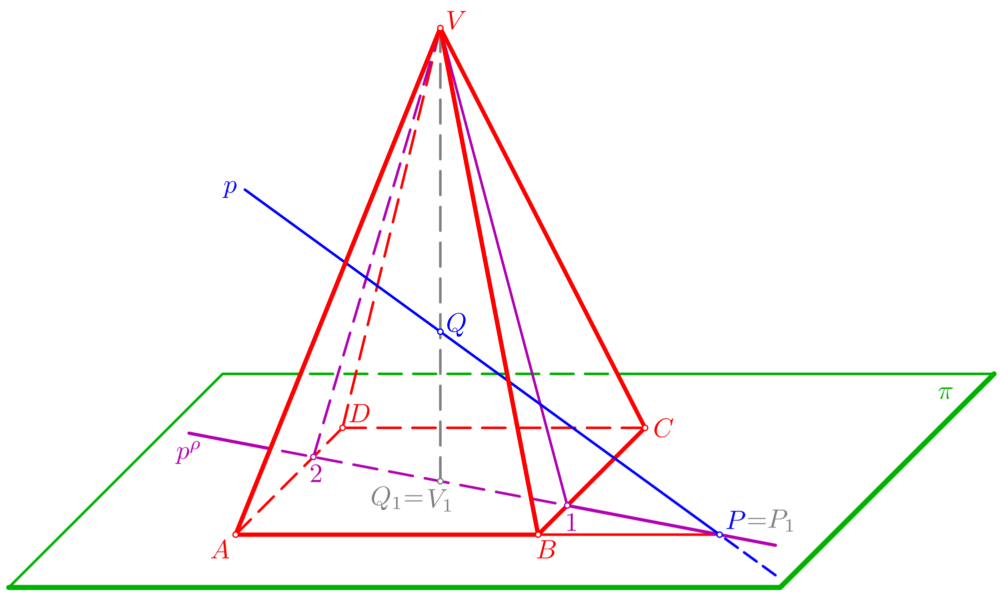
- zadání úlohy: pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ se čtvercovou podstavou stojí na vodorovné rovině (půdorysně) π, body P, Q určující přímku p leží na daných přímkách



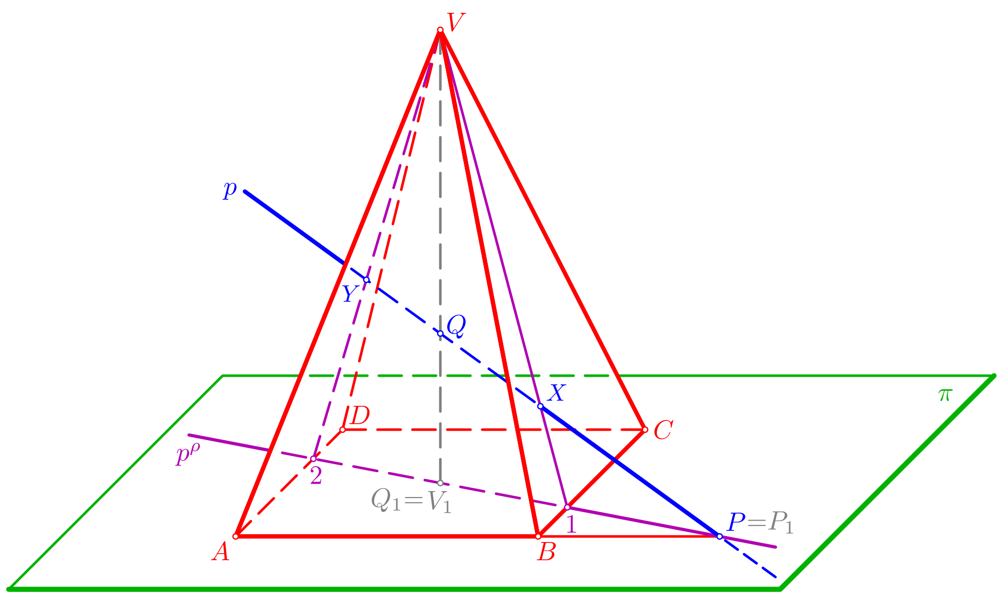
- přímkou $p = PQ$ proložme vrcholovou rovinu $\rho = PQV$, která je kolmá k půdorysně π a protíná ji v přímce $p^\rho = PV_1$



- dále sestrojme řez daného jehlanu rovinou ρ; tím je trojúhelník $12V$, kde $1 = p^{\rho} \cap BC$ a $2 = p^{\rho} \cap AD$



- přímka $p = PQ$ pak protíná hranici tohoto trojúhelníkového řezu v bodech X, Y; ty jsou krajními body úsečky XY, která je hledaným průnikem dané přímky p s daným jehlanem $ABCDV$



□

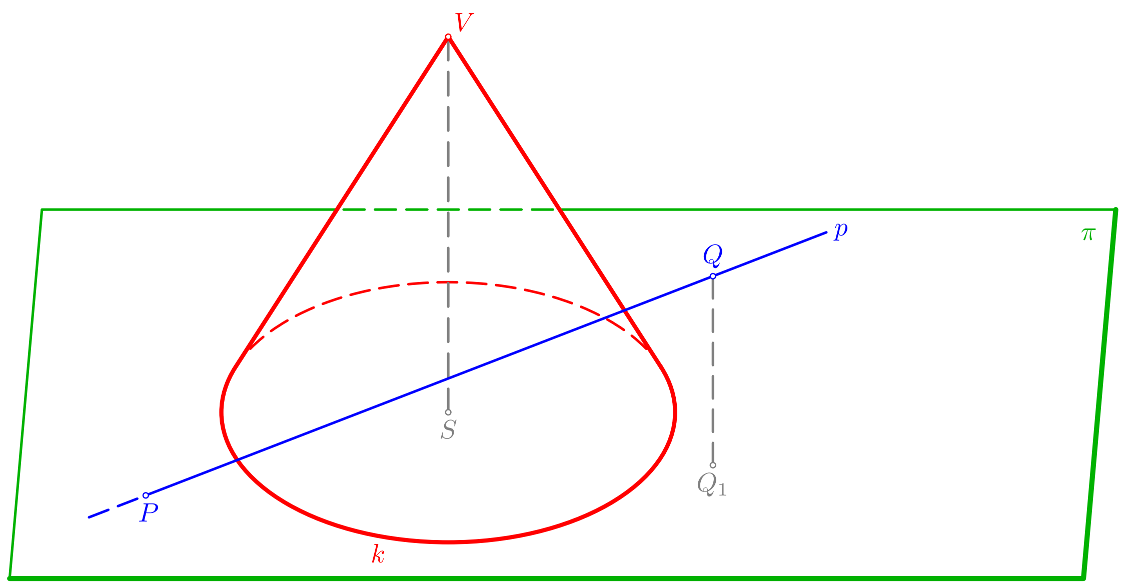
3.1.4. Průnik přímky s rotačním kuželem

Řešené úlohy

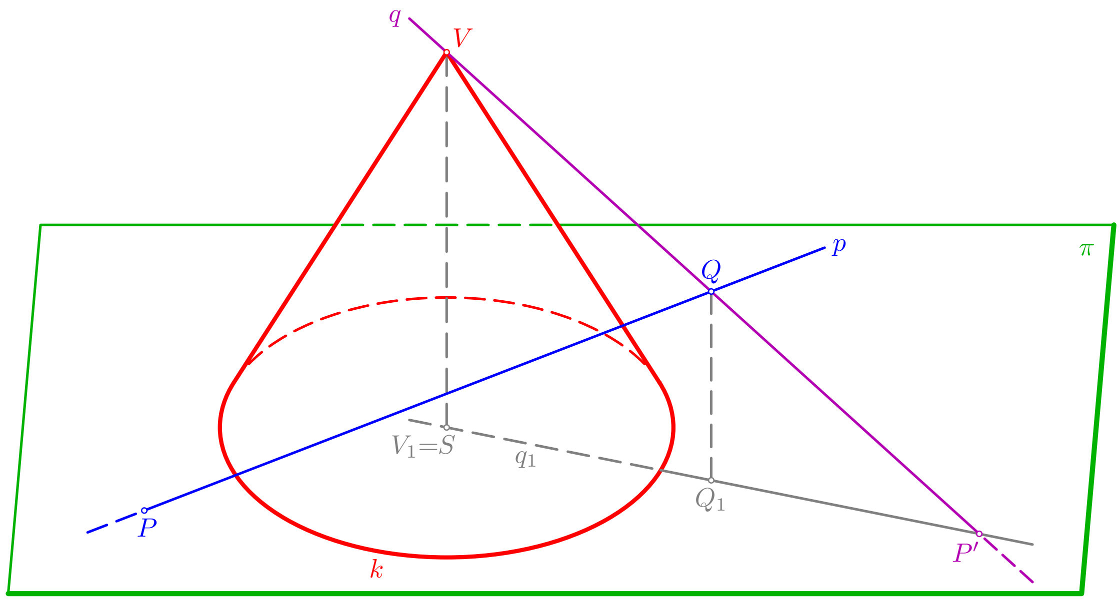
Příklad: Sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s rotačním kuželem, jehož podstavná kružnice $k(S,r)$ leží v půdorysně π; bod P leží v rovině podstavy (tj. $P \in \pi$) a bod Q je dourčen svým půdorysem Q_1.

Konstrukce:

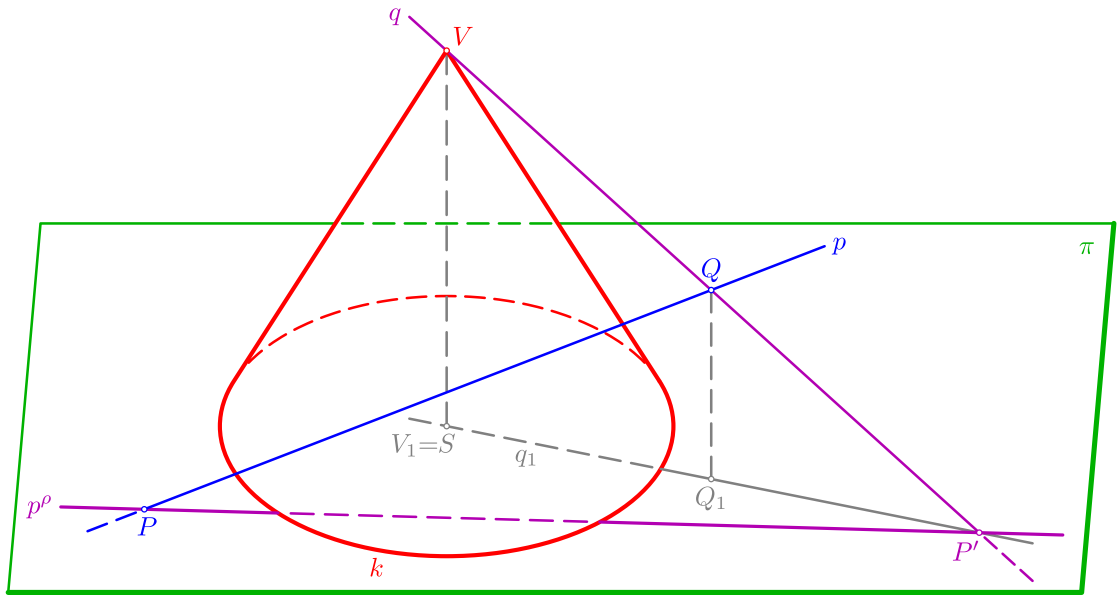
- zadání úlohy: rotační kužel s podstavnou kružnicí $k(S,r)$ stojí na vodorovné rovině (půdorysně) π, body P, Q určující přímku p jsou zoleny dle zadání



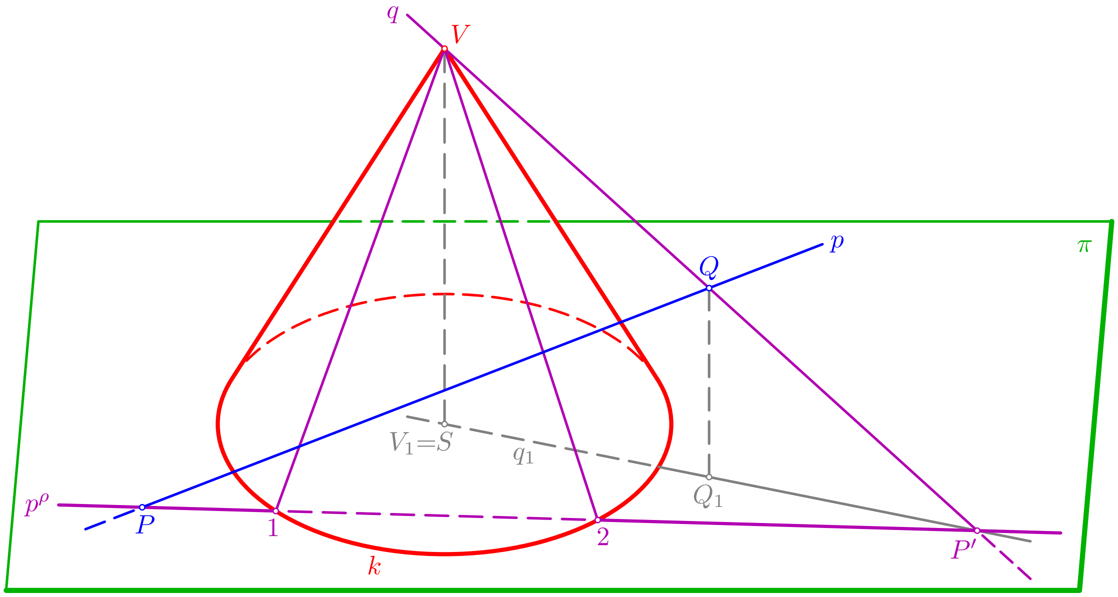
- nejprve sestrojme přímku $q = QV$ a najděme její průsečík P' s rovinou π: platí $P' = q \cap q_1$, kde $q_1 = Q_1V_1$ (přitom je $V_1 = S$)



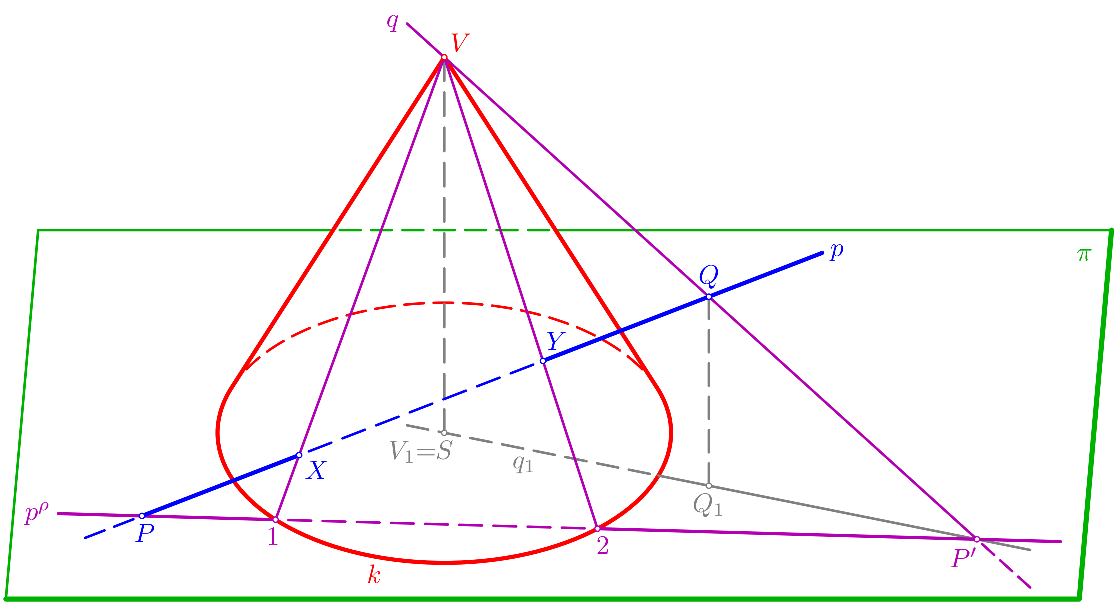
- přímka $p^\rho = PP'$ je pak průsečnicí vrcholové roviny $\rho = PQV$ s půdorysnou π



- dále sestrojme řez daného kužele rovinou ρ; tím je trojúhelník $12V$, kde body $1, 2$ jsou průsečíky přímky p^ρ s podstavnou kružnicí k



- přímka $p = PQ$ pak protíná hranici tohoto trojúhelníkového řezu v bodech X, Y; ty jsou krajními body úsečky XY, která je hledaným průnikem dané přímky p s daným rotačním kuželem



□

Pracovní listy

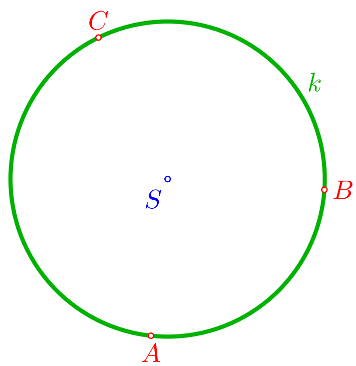
- v tomto dodatku jsou sebrána zadání všech úloh řešených ve dvou předchozích kapitolách
- slouží tak jako pracovní listy k samostatnému procvičení uvedených úloh
- u každé úlohy je připojeno číslo stránky, na níž lze najít příslušné řešení.

Seznam úloh

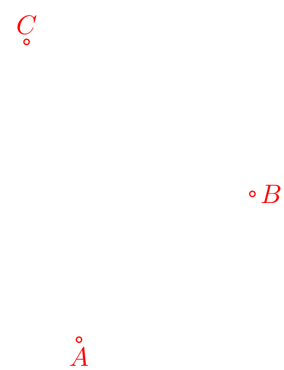
Apolloniova úloha BBB

Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází třemi danými navzájem různými body A, B, C.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

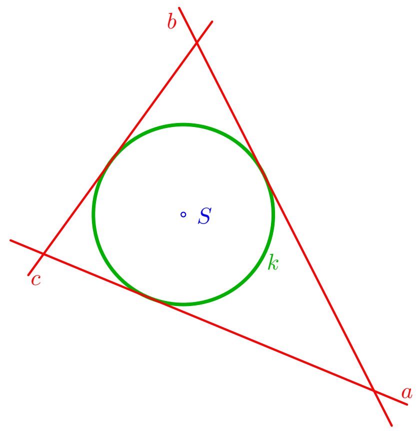


Řešení této úlohy hledejte na straně 15 . . .

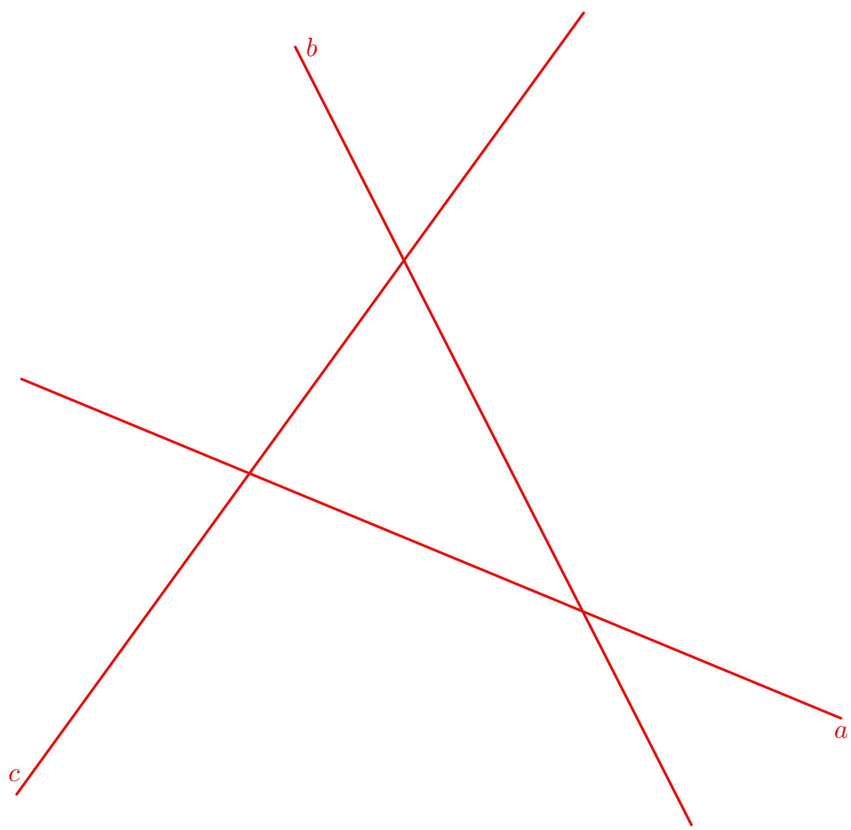
Apolloniova úloha ppp

Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká tří daných navzájem různých přímek a, b, c.

Rozbor úlohy:



Konstrukce **(dosti náročná na přesnost rýsování):**

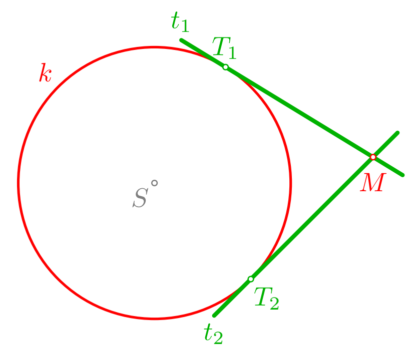


Řešení této úlohy hledejte na straně 18 . . .

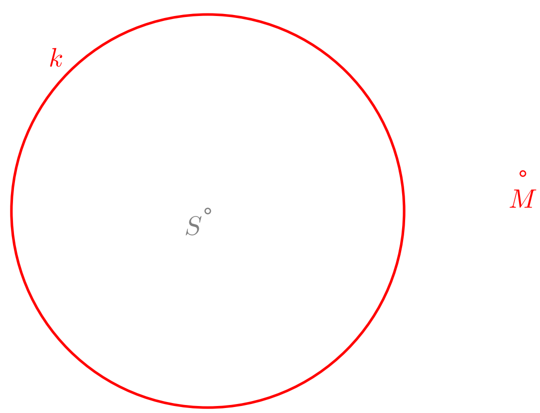
Tečny z bodu ke kružnici

Příklad: Daným bodem M veďte tečny k dané kružnici $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

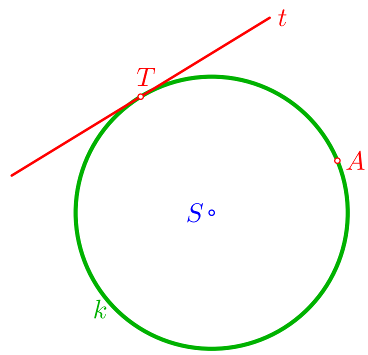


Řešení této úlohy hledejte na straně 28 . . .

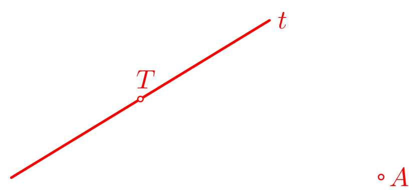
Pappova úloha BBp

Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a dotýká se dané přímky t v daném bodě T.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

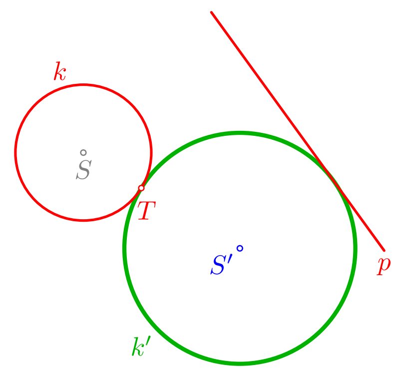


Řešení této úlohy hledejte na straně 31 . . .

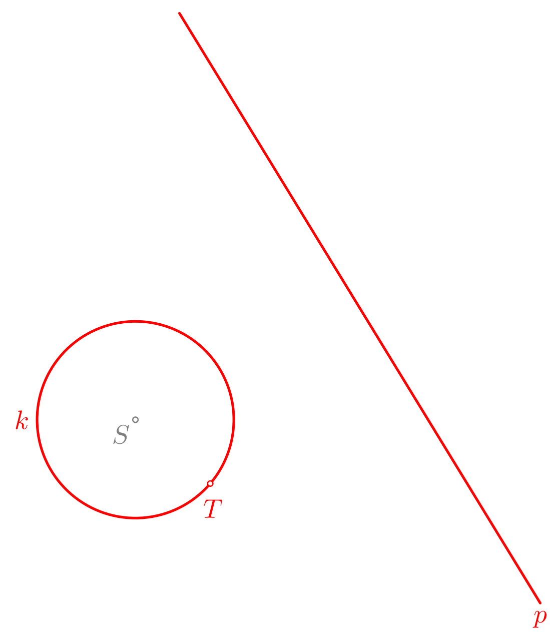
Pappova úloha Bkp

Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S, r = |ST|)$ v daném bodě T a dané přímky p.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

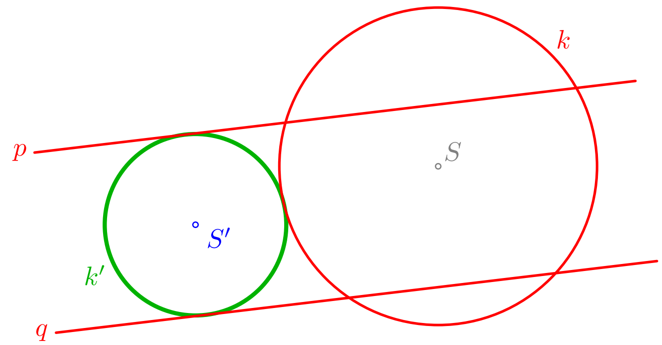


Řešení této úlohy hledejte na straně 34...

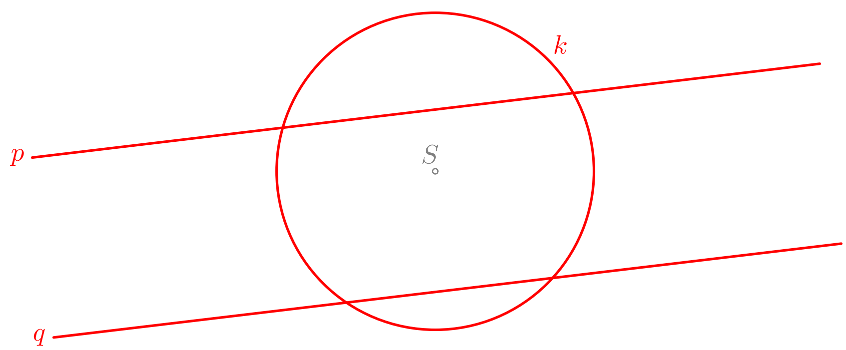
Varianta Apolloniovy úlohy ppk – rovnoběžky

Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou daných různých rovnoběžných přímek p, q $(p \parallel q, p \neq q)$ a dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

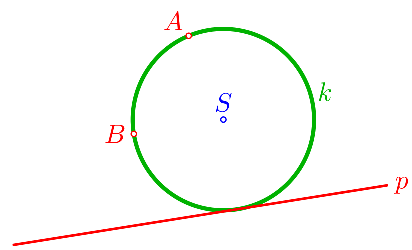


Řešení této úlohy hledejte na straně 39 . . .

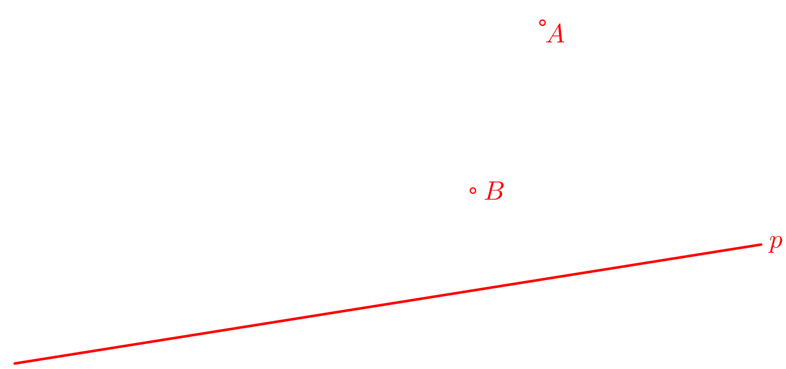
Apolloniova úloha BBp

Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází danými různými body A, B a dotýká se dané přímky p.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

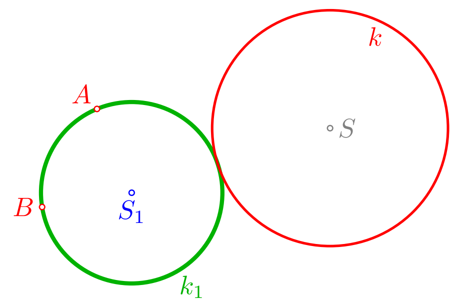


Řešení této úlohy hledejte na straně 46 . . .

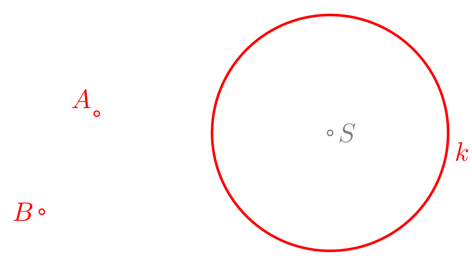
Apolloniova úloha BBk

Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází danými různými body A, B a dotýká se dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

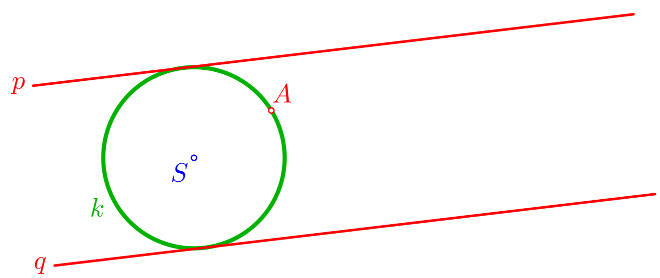


Řešení této úlohy hledejte na straně 51 . . .

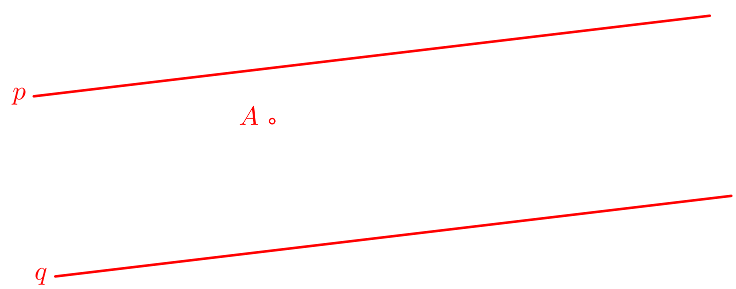
Varianta Apolloniovy úlohy Bpp – rovnoběžky

Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a dotýká se daných různých rovnoběžných přímek p, q ($p \parallel q, p \neq q$).

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

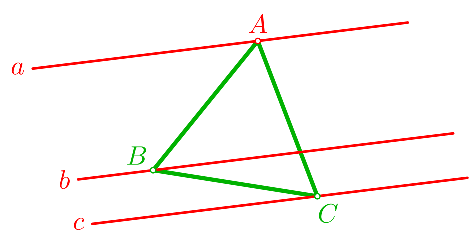


Řešení této úlohy hledejte na straně 59 . . .

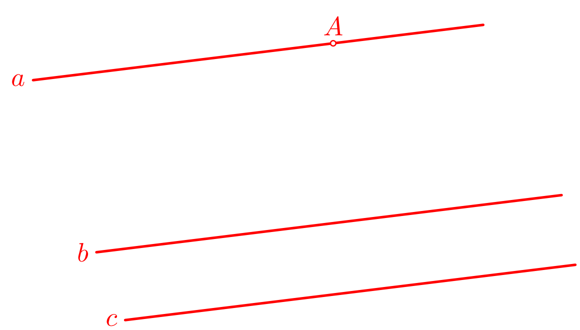
Konstrukce rovnostranného trojúhelníka z daných prvků

Příklad: Jsou dány tři navzájem různé rovnoběžné přímky a, b, c ($a \parallel b \parallel c$) a bod $A \in a$; sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby byl $B \in b$ a $C \in c$.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

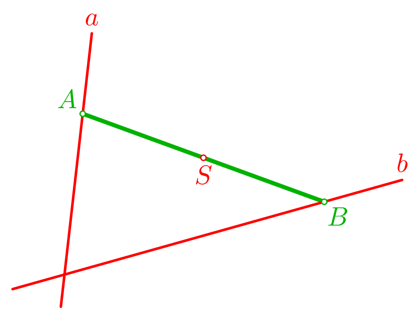


Řešení této úlohy hledejte na straně 64 . . .

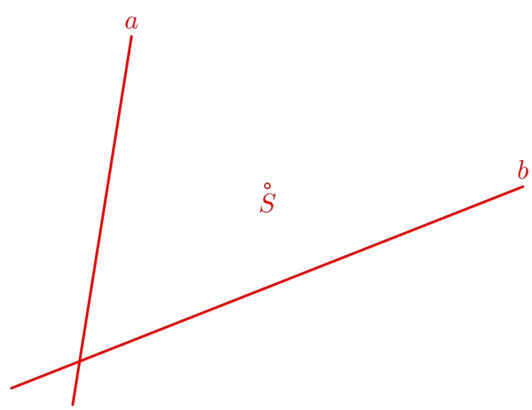
Konstrukce úsečky z daných prvků

Příklad: Jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a bod S, kde $S \notin a, S \notin b$; sestrojte úsečku AB tak, aby měla střed v bodě S a aby platilo $A \in a, B \in b$.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

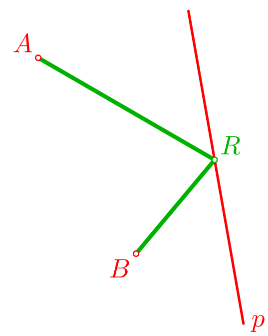


Řešení této úlohy hledejte na straně 69 . . .

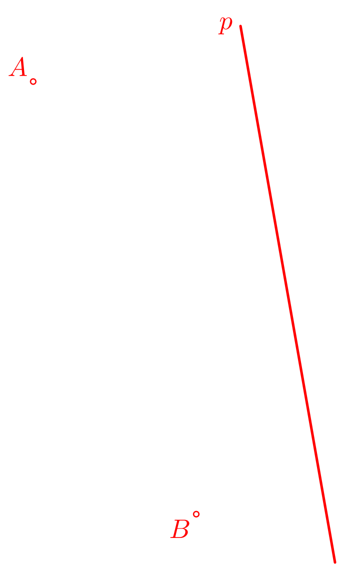
Konstrukce bodu dané vlastnosti

Příklad: Je dána přímka p a dva různé body A, B ($A \neq B$) ležící uvnitř jedné poloroviny s hraniční přímkou p; sestrojte na přímce p bod R, v němž se odrazí paprsek vyslaný z bodu A do bodu B.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

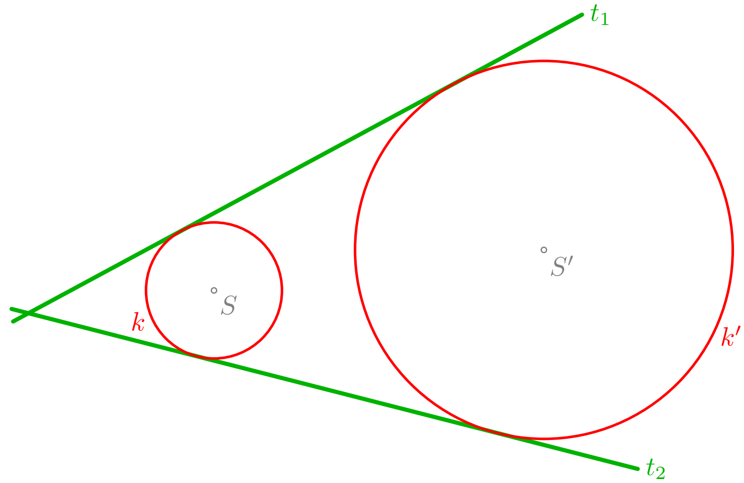


Řešení této úlohy hledejte na straně 73 . . .

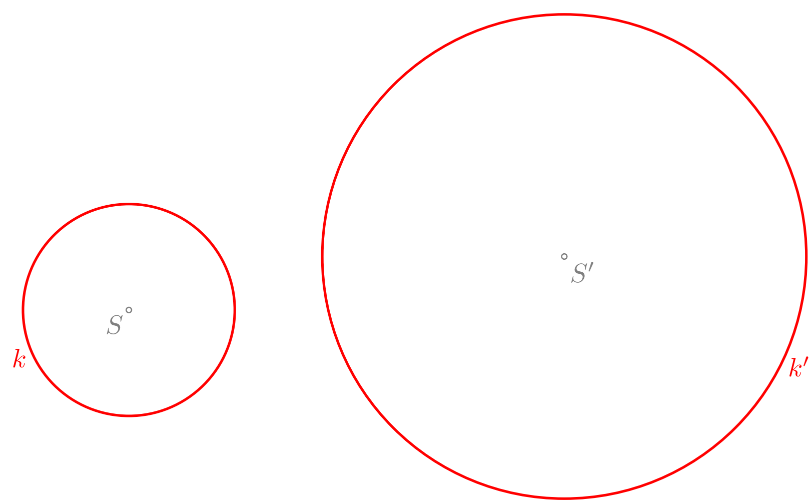
Společné tečny dvou kružnic s různými poloměry

Příklad: Sestrojte společné tečny dvou daných kružnic $k(S,r)$ a $k'(S',r')$, kde $r \neq r'$.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

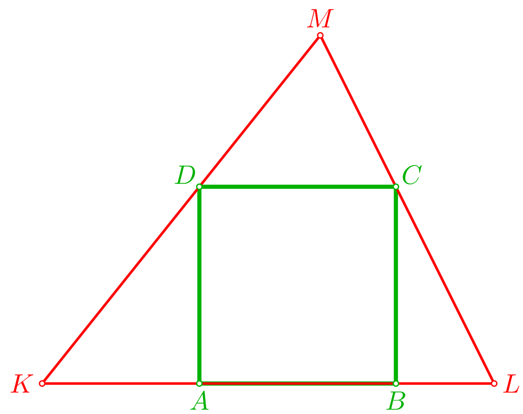


Řešení této úlohy hledejte na straně 79...

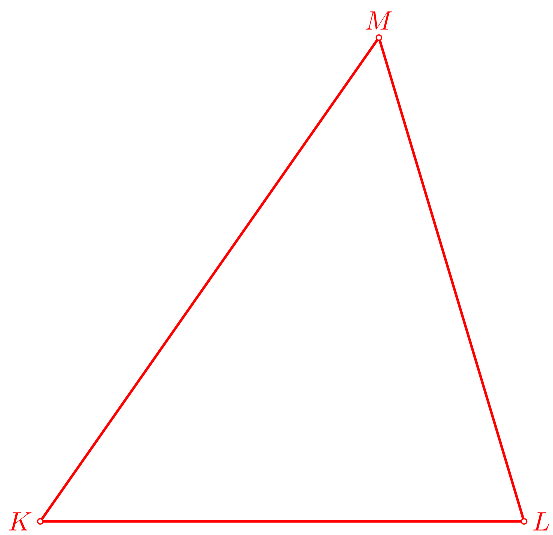
Čtverec vepsaný do ostroúhlého trojúhelníka

Příklad: Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby jeho vrcholy A, B ležely na straně KL, vrchol C ležel na straně LM a vrchol D na straně KM daného ostroúhlého trojúhelníka KLM.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

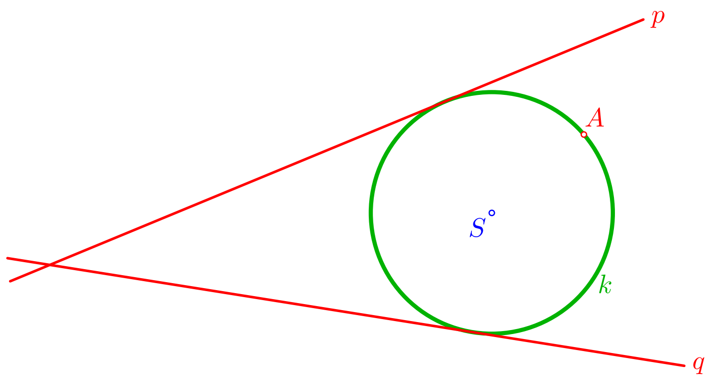


Řešení této úlohy hledejte na straně 83 . . .

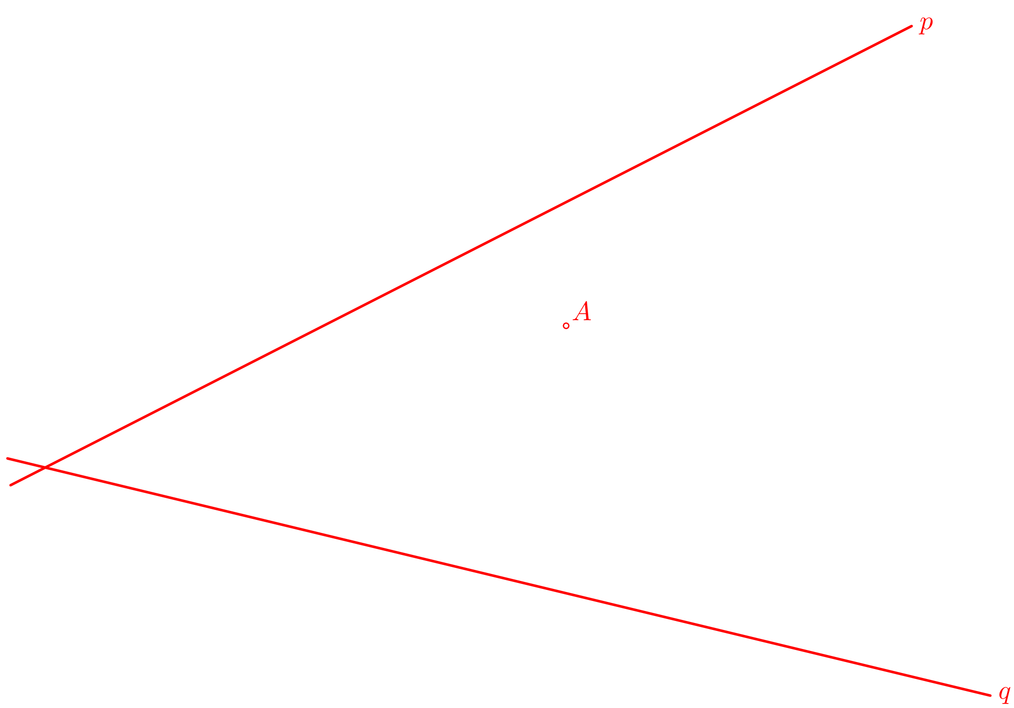
Varianta Apolloniovy úlohy Bpp – různoběžky

Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a dotýká se daných různoběžných přímek p, q.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

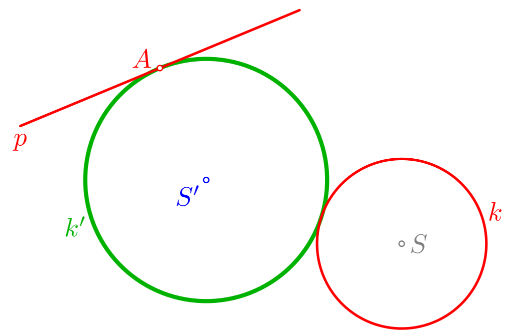


Řešení této úlohy hledejte na straně 87 . . .

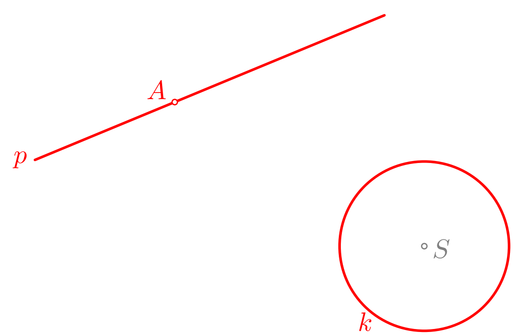
Pappova úloha Bpk

Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky p v jejím bodě A a dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

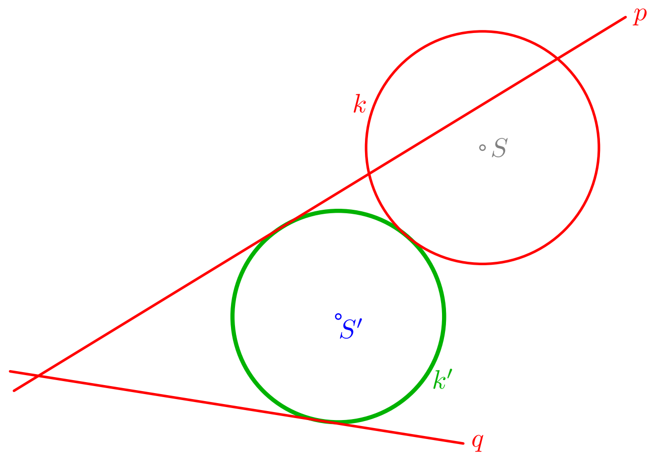


Řešení této úlohy hledejte na straně 91 ...

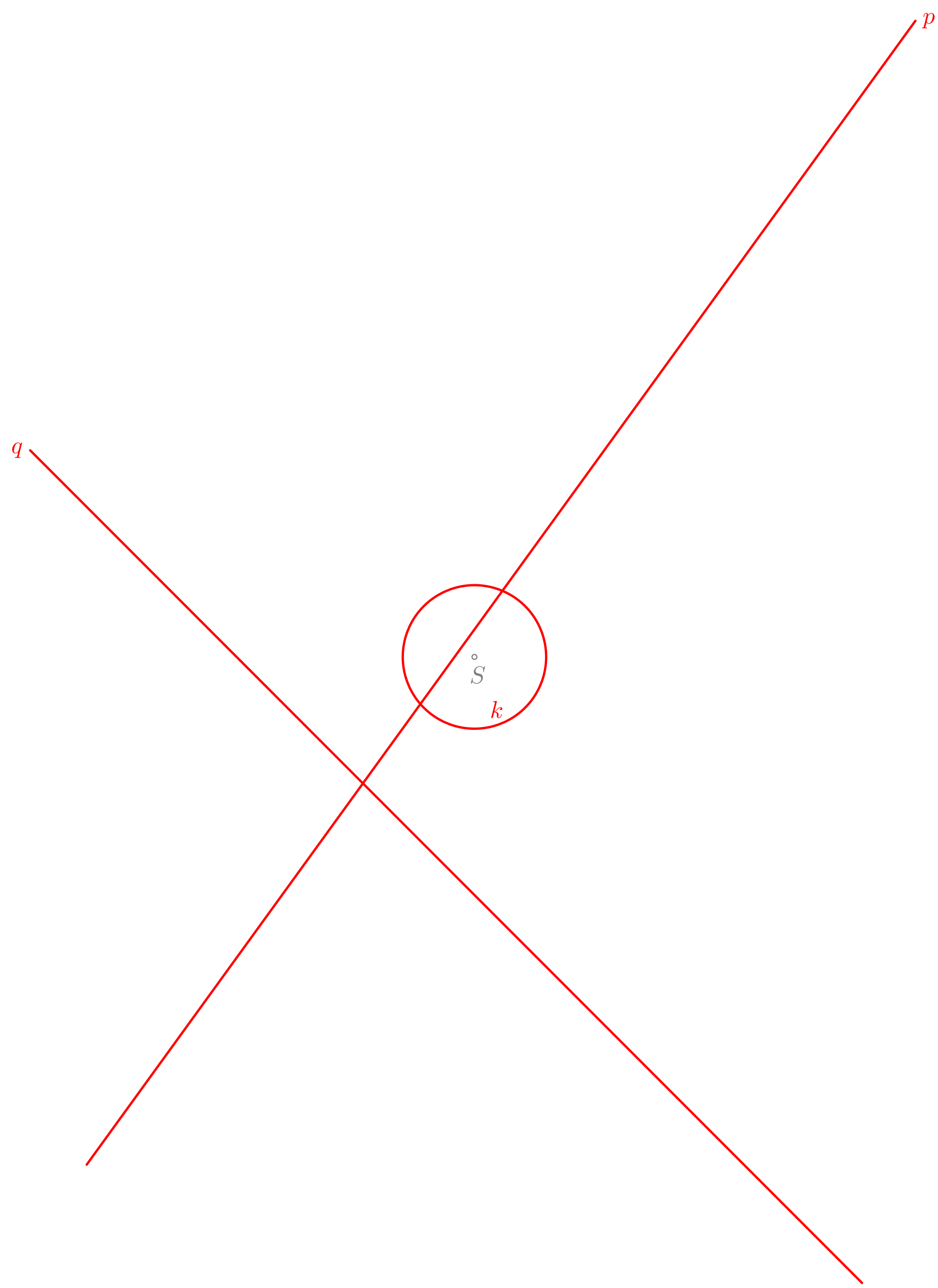
Varianta Apolloniovy úlohy ppk – různoběžky

Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká daných různoběžných přímek p, q a dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:



Konstrukce:

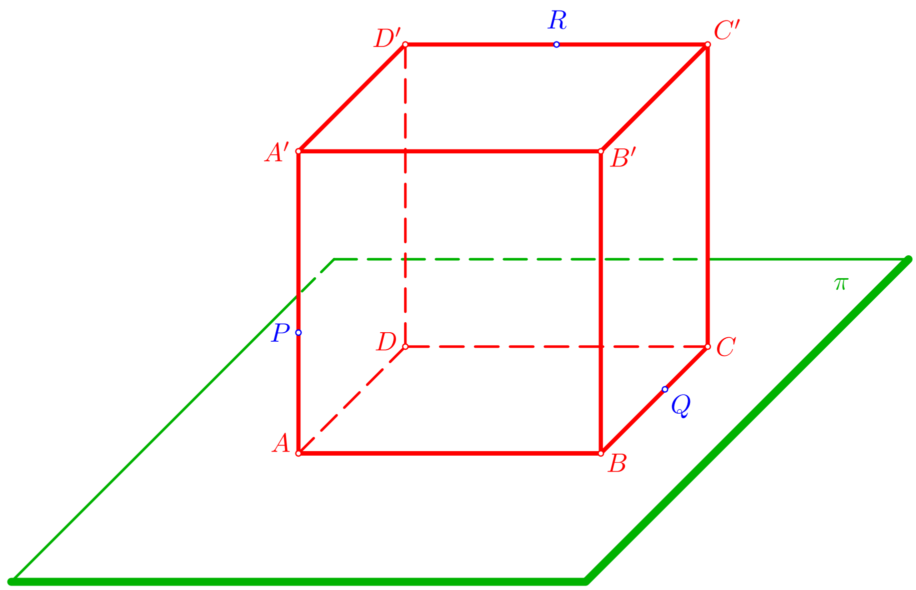


Řešení této úlohy hledejte na straně 96 . . .

Řez krychle rovinou

Příklad: Sestrojte řez krychle $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\rho = PQR$, přičemž platí $P \in AA'$, $Q \in BC$, $R \in C'D'$.

Konstrukce:

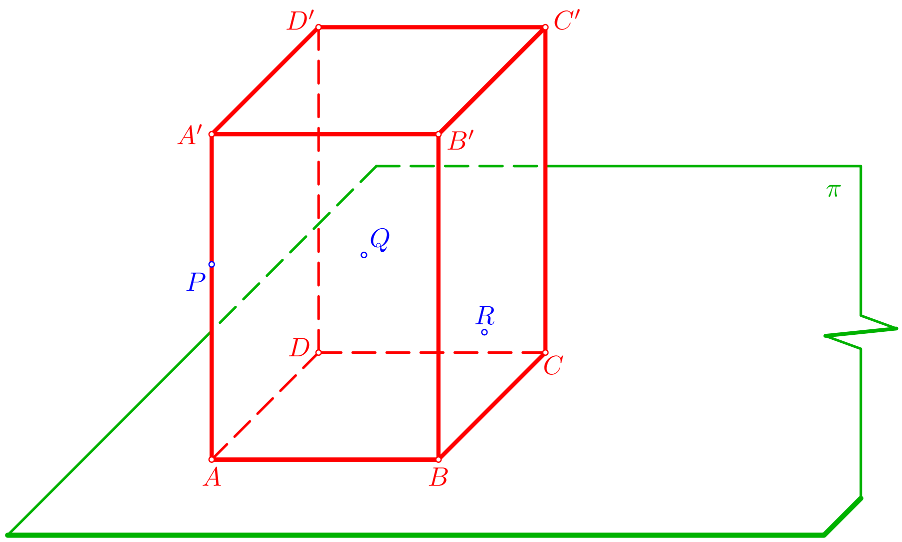


Řešení této úlohy hledejte na straně 112 . . .

Řez kolmého čtyřbokého hranolu rovinou

Příklad: Sestrojte řez kolmého čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\rho = PQR$, kde $P \in AA'$, $Q \in CDD'$ a $R \in BCC'$.

Konstrukce:

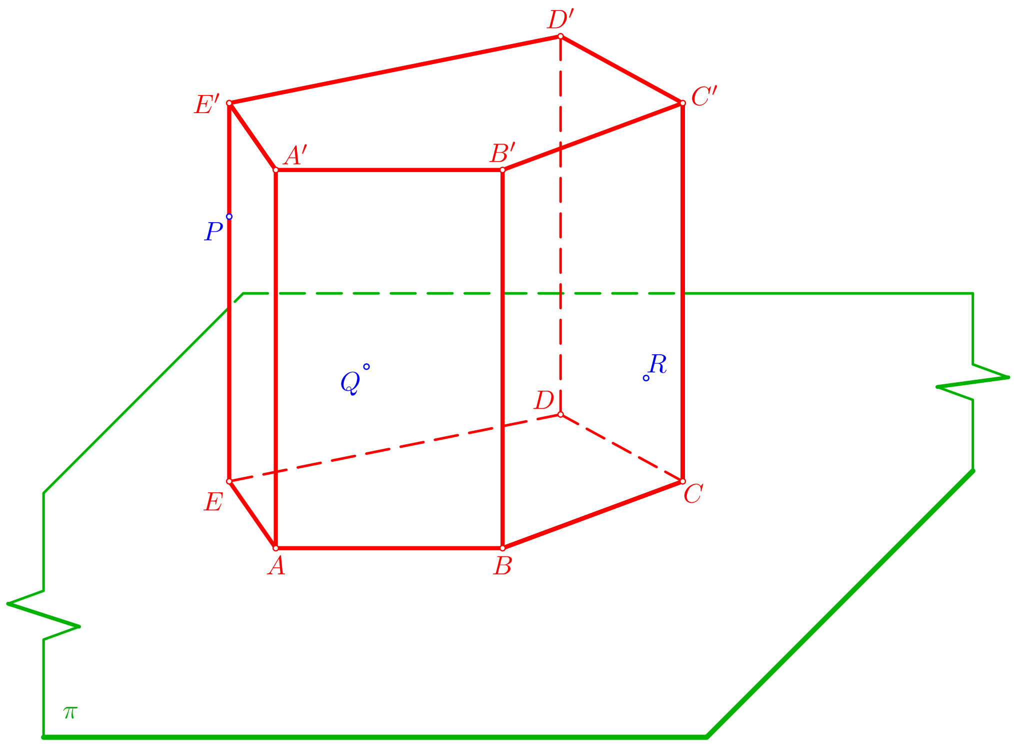


Řešení této úlohy hledejte na straně 117 ...

Řez kolmého pětibokého hranolu rovinou

Příklad: Sestrojte řez kolmého pětibokého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\rho = PQR$, kde $P \in EE'$, $Q \in ABB'$ a $R \in CDD'$.

Konstrukce:

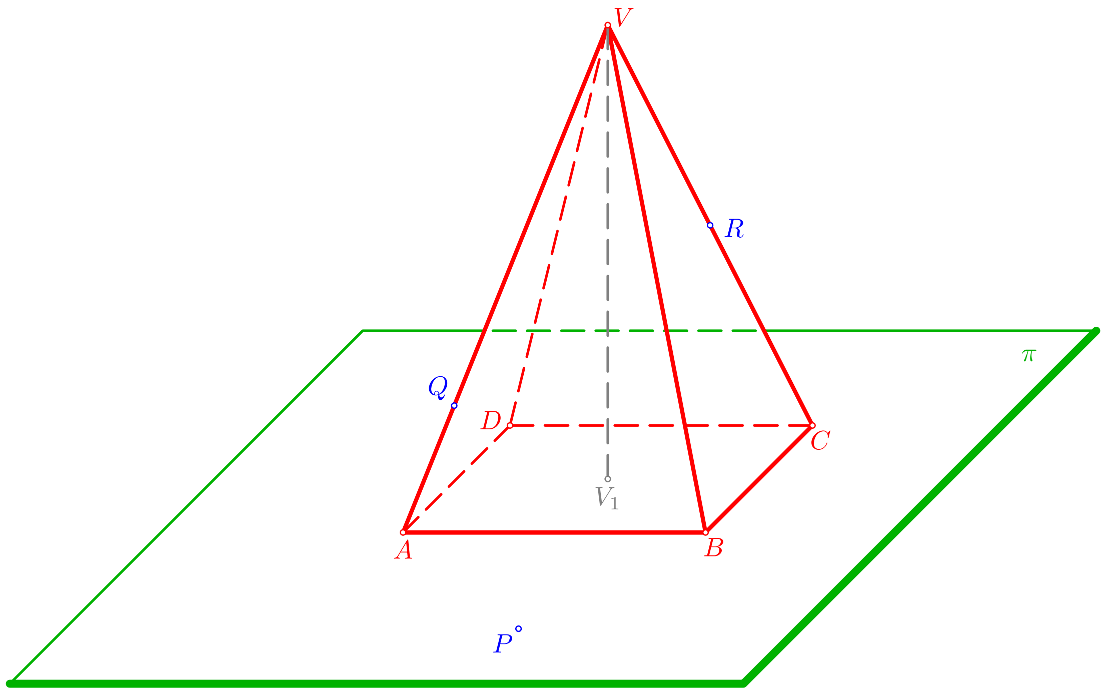


Řešení této úlohy hledejte na straně 122 . . .

Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu rovinou

Příklad: Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou $\rho = PQR$, kde $P \in \pi$ $(\pi = ABC)$, $Q \in AV$ a $R \in CV$.

Konstrukce:

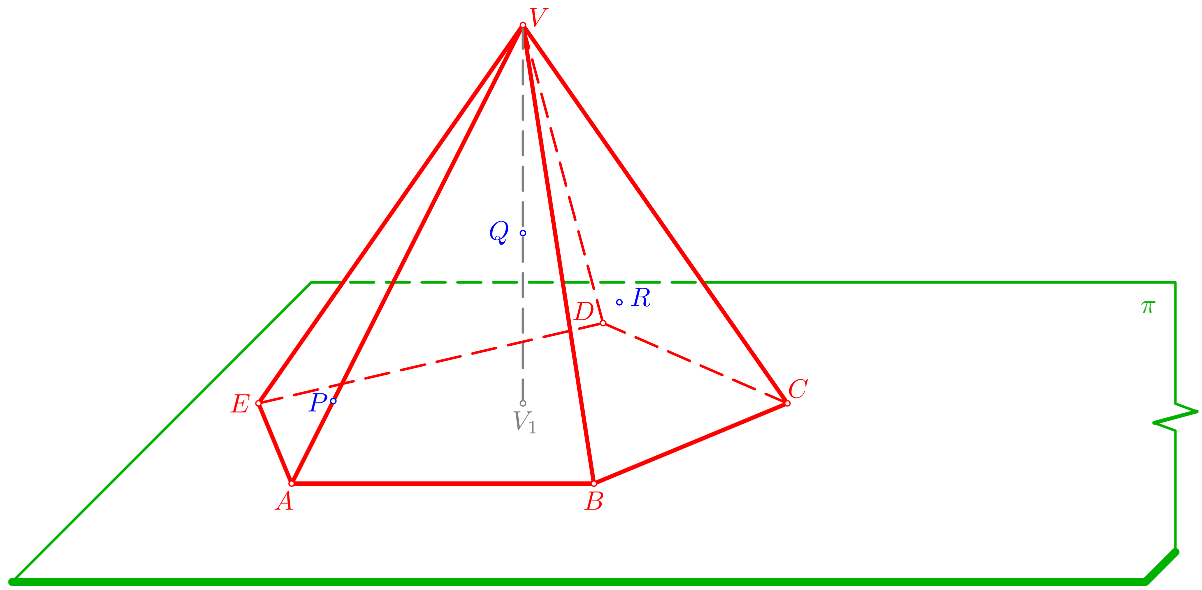


Řešení této úlohy hledejte na straně 128 . . .

Řez pětibokého jehlanu rovinou

Příklad: Sestrojte řez obecného pětibokého jehlanu $ABCDEV$ rovinou $\rho = PQR$, jestliže $P \in AV$, $Q \in VV_1$ a $R \in BCV$.

Konstrukce:

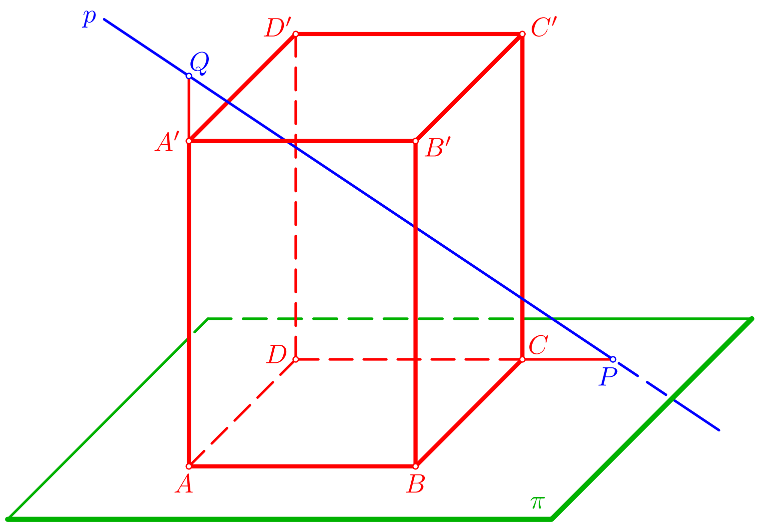


Řešení této úlohy hledejte na straně 131 . . .

Průnik přímky s kolmým čtyřbokým hranolem

Příklad: Sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s kolmým čtyřbokým hranolem $ABCDA'B'C'D'$; přitom je $P \in CD$ a $Q \in AA'$.

Konstrukce:

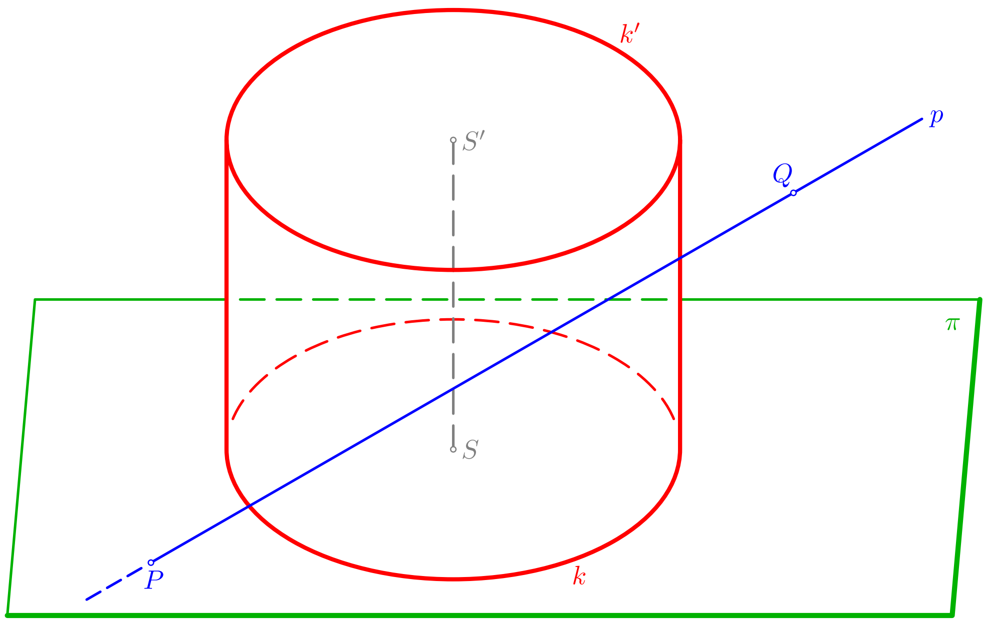


Řešení této úlohy hledejte na straně 137 . . .

Průnik přímky s rotačním válcem

Příklad: Sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s rotačním válcem, jehož jedna podstavná kružnice $k(S, r)$ leží v půdorysně π; bod P leží v rovině dolní podstavy (tj. $P \in \pi$) a bod Q leží v rovině horní podstavy válce.

Konstrukce:

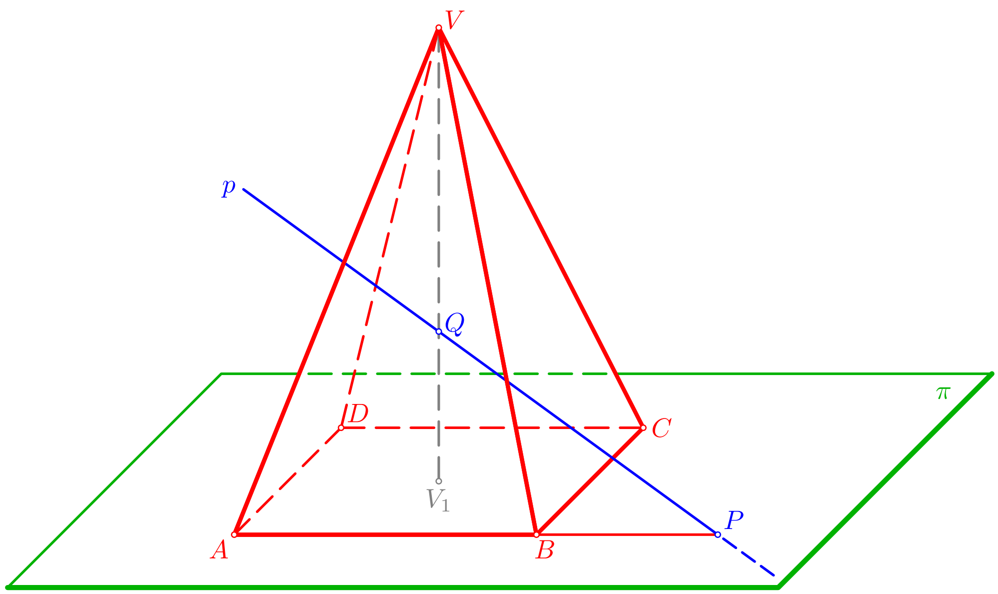


Řešení této úlohy hledejte na straně 140 . . .

Průnik přímky s pravidelným čtyřbokým jehlanem

Příklad: Sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$; přitom je $P \in AB$ a $Q \in VV_1$.

Konstrukce:

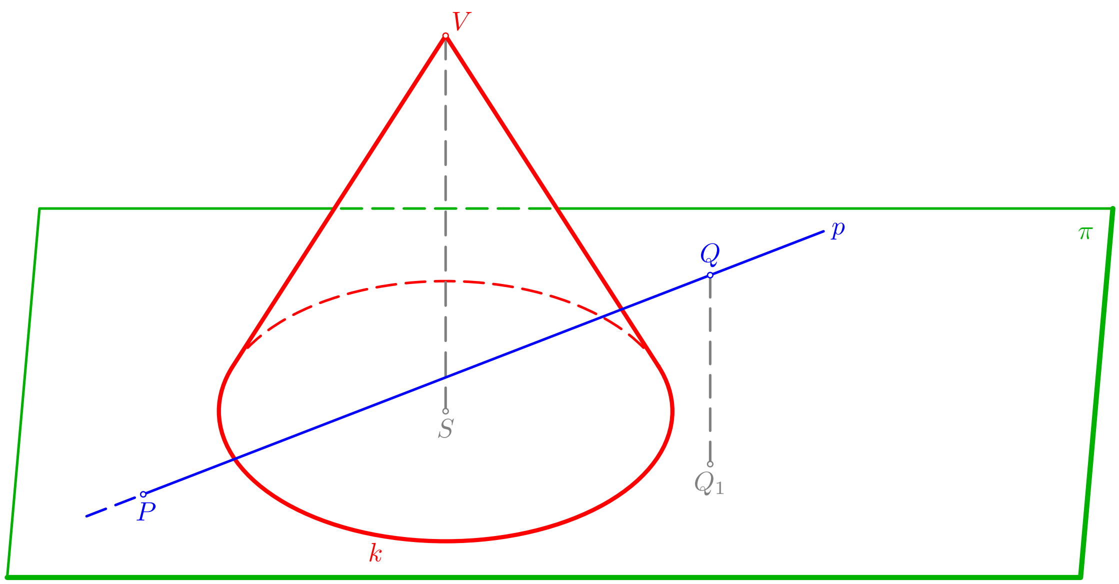


Řešení této úlohy hledejte na straně 142 . . .

Průnik přímky s rotačním kuželem

Příklad: Sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s rotačním kuželem, jehož podstavná kružnice $k(S, r)$ leží v půdorysně π; bod P leží v rovině podstavy (tj. $P \in \pi$) a bod Q je dourčen svým půdorysem Q_1.

Konstrukce:



Řešení této úlohy hledejte na straně 145 . . .

Literatura

Literatura a odkazy

[1] Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1997.

[2] http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/uvod/uvod.html

Rejstřík