VŠB - Technická univerzita Ostrava

katedra matematiky a deskriptivní geometrie

ZÁKLADY MATEMATIKY

pracovní listy

Viktor Dubovský

16. září 2013

Obsah

Zadání : Jak ?

Řešení : Z neznámých příčin mají studenti z matematiky strach, tento strach přechází v nepochopitelný odpor. Klást si za cíl odstranění všech obav z odporností je sice nejspíše až přehnaně ambiciózní, nicméně neexistuje žádný důvod nepokusit se alespoň o jejich zmírnění.
Za tímto účelem je předvedeno několik „vysokoškolských“ příkladů, a to s poukazem na to, že po provedení „VŠ“ části výpočtu přichází na řadu „SŠ“ (nebo dokonce „ZŠ“) část, která (bohužel) nejčastěji bývá kamenem úrazu. Po těchto vyřešených „VŠ“ příkladech přichází tedy příklady neřešené „středoškolské,“ tak aby zopakovali techniky a postupy řešení.
Samozřejmě není možné na tak omezeném prostoru zopakovat všechny vzorce, metody. Také se nelze nedopustit jistých zjednodušení. To vše je však dáno tím, že snahou spíše je pomoci studentům si uvědomit, že i taková „maličkost“ jako je např. vytýkání a krácení ve zlomku, může značně usnadnit situaci při řešení tak „velkých“ problémů jako je výpočet limity, derivace nebo integrálu.

Jak se to vše podařilo necháváme k laskavému posouzení čtenáři.
Nicméně bojte se nic a s chutí do toho.

Zadání : Proč ?

Řešení : Z odporu k matematice také pramení časté otázky typu „Proč se to máme učit, vždyť jsme strojaři ?“ a „K čemu nám, stavařům, to je ?“. Navíc existují tabulky s vzorci, „kalkulačky“ a samozřejmě počítače. Tak proč ? Opět není zde cílem probudit obdiv ke kráse jazyka matematiky, který dokáže popsat snad každou oblast lidského konání, i když zapálit jiskérku by jistě nebylo na škodu. Tento obdiv a potažmo lásku ponechme matematickým fakultám.
Matematika na VŠB by měla studentům dát nahlédnout pod pokličku, uvědomění si, že za každým vzorečkem je kus vědy, který dokazuje jeho platnost.
Isaac Newton nebyl pán, kterému padlo jablko na hlavu. Isaac Newton řešil problém, popis pohybu, síly, akcí a reakcí. K tomu potřeboval tečny. Tečna je přímka, lineární funkce, jen násobení a sčítání, s tím se dobře pracuje. Jak ji najít? Těžko. A co tak najít sečnu, to je snadné. Jak převést sečnu v tečnu? Dnes bychom řekli limitním přechodem. Newton ho musel vymyslet. Jako chytrá horákyně dělit a nedělit nulou zároveň. Tak otevřel dveře diferenciálnímu počtu.
K čemu to je? Zeptejte se statiků, jak spočítat zatížení konstrukcí. „Sání, stlačení, výbuch, výfuk“ jak popsat přechody mezi jednotlivými stavy a jakou práci vykoná? Odpovědí bude diferenciální rovnice.
Řešením diferenciální rovnice pak může být vzorec. Jsou tabulky se vzorci, ale kdo ví, jak a proč „vzorec funguje“, může se být vždy jistý, že jej používá správně. Jsou kalkulátory a počítače a byl by hřích jich nevyužívat, ale kdo má předem představu o výsledku, neopíše z obrazovky každou hloupost.
V neposlední řadě je pak v matematice logika a řád. A když matematika naučí studenta logickým úvahám, pořádku a přesnosti, dá mu víc než se může na první pohled zdát.

Co všechno matematika nabízí, se pokusíme nastínit. Co všechno si student vezme, to je na něm.
Bojte se nic a s chutí do matematiky.

Zadání : Nalezněte extrémy funkce

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right).$$

Řešení : „Klíč“ k nalezení a určení extrémů funkce si zde popisovat nebudeme, poznáte jej v průběhu studia. Zaměříme se na drobnosti, které nás v průběhu výpočtu mohou potkat.
Nejprve musíme určit definiční obor dané funkce. Protože logaritmované číslo musí být kladné, dostáváme

$$\mathcal{D}\left(f\left(x\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

V další kroku spočteme první derivaci vyšetřované funkce a zjistíme, pro která x se rovná nule. Derivace je rovna

$$f'\left(x\right) = \frac{-2\left(x^2-x-1\right)}{(2x-1)(x^2+1)}.$$

Nulové hodnoty tedy nabývá, právě když je nulový čitatel zlomku. Proto dále řešíme kvadratickou rovnici $x^2-x-1=0$, čímž zjistíme „podezřelé body“

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ a } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

ve kterých mohou extrémy nastat.
Než se pustíme dál, uvědomíme si, že protože je $2^2 = 4$, musí být $\sqrt{5} > 2$ a proto je

$$x_1 < \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5,$$

což je záporné číslo a nemůže patřit do definičního oboru vyšetřované funkce. Z dalších úvah x_1 vypouštíme, extrém zde nenastává.
Obdobně si odvodíme, že

$$x_2 > \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5,$$

a tedy že x_2 do $\mathcal{D}\left(f\left(x\right)\right)$ patří a má smysl ptát se, zda a jaký extrém v tomto bodě funkce $f(x)$ nabývá.

„Přesné“ hodnoty x_1 a x_2 jsou

$$x_1 = -0.618033988749895\ldots,$$
$$x_2 = 1.618033988749895\ldots.$$

Jde o reálná a iracionální čísla, jejich desetinný rozvoj je nekonečný a nelze je zapsat zlomkem. Při výpočtu jsme však iracionální $\sqrt{5}$ nehradili přirozeným číslem 2 a tím jsme zlomek, racionální číslo získali. Výsledek tak pro nás byl „uchopitelnější“ a šlo jej poměrně snadno i bez kalkulátoru.
Takové snadné odhady mohou pomoci odhalit překlepovou chybu, které se zvláště při delším výpočtu na kalkulátoru můžeme snadno dopustit.
Připomeňme si značení jednotlivých číselných množin a jejich vztah

$\mathbb{N}$ - přirozená čísla

$\mathbb{Z}$ - celá čísla

$\mathbb{Q}$ - racionální čísla

$\mathbb{R}$ - reálná čísla

$\mathbb{C}$ - komplexní čísla

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Číselné množiny : Určete číselný obor

$$\frac{3}{2}\,, \qquad -3\,, \qquad 1+\sqrt{3}\,, \qquad \mathrm{e}\,, \qquad 0.276\,,$$

$$\frac{\pi}{4}\,, \qquad \frac{3^2}{2^3}\,, \qquad 7\,, \qquad 0\,, \qquad \frac{4}{\frac{1}{4}}$$

$$\ln 1\,, \qquad \sqrt{-1}\,, \qquad \left(3-\sqrt{7}\right)^2\,, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\,,$$

$$4^{-\frac{1}{2}}\,, \qquad 5!\,, \qquad 3-2\mathrm{i}\,, \qquad \frac{4^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{2}{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}\,,$$

$$1-\frac{2}{1-\left(\frac{2}{2-\frac{1}{2}}\right)}\,, \qquad \left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\,, \qquad \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}\,.$$

Rada :

$\mathbb{N}$ - přirozená čísla

$\mathbb{Z}$ - celá čísla

$\mathbb{Q}$ - racionální čísla

$\mathbb{R}$ - reálná čísla

$\mathbb{C}$ - komplexní čísla

Před určením druhu upravte

Řešení :

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$,
$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$,
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$,
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$,
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$.

Zadání : Nalezněte extrémy funkce

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right).$$

Řešení : Příklad jsme opustili po zjištění, že pokud funkce nabývá extrému, pak tomu tak je v bodě $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Zbývá rozhodnout zda zde extrém, tj. minimum nebo maximum, opravdu je. Za tím účelem spočteme druhou derivaci a „podezřelý“ bod x_2 do ní dosadíme. Opět tedy budeme muset provádět aritmetické operace.
Začneme druhou derivací, ta se rovná

$$f''(x) = \frac{2\left(2x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 4x - 3\right)}{(2x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}.$$

Dále nás zajímá hodnota $f''(x_2) = f''\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, neboť právě podle té zjistíme povahu extrému. Musíme zjistit její „znaménko“. Situaci si lze zjednodušit, když si uvědomíme, že jmenovatel zlomku je kladný pro všechna reálná čísla s vyjímkou $\frac{1}{2}$. Budeme tedy uvažovat pouze výraz v závorce čitatele.
Pro první odhad si x_2 nahradíme 2, tj. určíme

$$2\cdot 2^4 - 4\cdot 2^3 - 7\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 3 = 2^5 - 2^2 - 7\cdot 4 + 2\cdot 4 - 3 = 4\left(-7+2\right) - 3 = -20 - 3 = -23 < 0.$$

Z toho odhadu bychom sice mohli usuzovat, že je $f''(x_2) < 0$, ovšem jistotu nemáme.
Zkusme odhad zpřesnit a x_2 nahradit např. $\frac{3}{2}$

$$2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 7\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right) - 3 = \frac{3^4}{2^3} - \frac{3^3}{2} - \frac{7\cdot 3^2}{2^2} + 6 - 3 = \frac{3}{2^3}\left(3^3 - 4\cdot 3^2 - 14\cdot 3 + 8\right) < 0.$$

Určovat hodnotu v závorce již není potřeba, neboť první člen je zjevně menší než druhý a třetí člen je větší než poslední. Závorka proto bude záporná. I tento odhad tedy naznačuje tomu, že hodnota $f''(x_2)$ by mohla být záporná. Ovšem jistotu stále nemáme.
Abychom jistotu měli, musíme odhady podpořit dalšími argumenty nebo dosadit přesnou hodnotu $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zadání : Nalezněte extrémy funkce

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right).$$

Řešení : Stále nemáme jistotu, zda je opravdu $f''(x_2) < 0$, proto dosadíme $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ovšem jako v případě dosazování 2 a $\frac{3}{2}$, budeme se i nyní zabývat pouze čitatelem

$$2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - 4\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 7\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 3 =$$
$$\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^4}{2^3} - \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}{2} - \frac{7\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2^2} + 2\left(1+\sqrt{5}\right) - 3 =$$
$$\frac{1}{2^3}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^4 - 4\left(1+\sqrt{5}\right)^3 - 14\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)^2 + 16\left(1+\sqrt{5}\right) - 8\cdot 3\right) < 0.$$

Další úpravy ji opět nejsou nutné, druhý člen je větší než první a čtvrtý je menší než třetí a poslední je záporný. Celkově je tedy závorka záporná.
Pokud si zde nejsme jistí, že je závorka záporná můžeme jednotlivé členy rozvinout podle binomické věty, člen $\frac{1}{2^3}$ opět vynecháváme, protože posuzujeme pouze znaménko, tj.

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^4 - 4\left(1+\sqrt{5}\right)^3 - 14\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)^2 + 16\left(1+\sqrt{5}\right) - 8\cdot 3 =$$
$$\left(1+4\left(\sqrt{5}\right)+6\left(\sqrt{5}\right)^2+4\left(\sqrt{5}\right)^3+\left(\sqrt{5}\right)^4\right) - 4\left(1+3\left(\sqrt{5}\right)+3\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^3\right)$$
$$-14\left(1+2\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right) + 16\left(1+\sqrt{5}\right) - 8\cdot 3 = -100-20\sqrt{5}.$$

Ověřili jsme si, že čitatel zlomku druhé derivace $f''(x)$ je pro $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ záporný, protože jeho jmenovatel je kladný, musí být $f''(x_2) < 0$. Pro funkci $f(x)$ to znamená, že v bodě x_2 nabývá svého maxima.

Na příkladě jsme si ukázali, že se vyplácí umět odhadnout hodnotu reálného iracionálního čísla číslem přirozeným nebo racionálním. Tyto odhady pak mohou být prvním nástřelem nebo vodítkem přesného řešení.
Pro úplnost uveďme ještě konkrétní hodnoty vyšetřované závorky z čitatele pro $x = 2$, $x = \frac{3}{2}$ a $x = x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jsou postupně -23, $-\frac{129}{8} = -16.125$ a konečně $-\frac{5}{2}\left(5+\sqrt{5}\right) = -18.0902\ldots$.
Přesná hodnota tedy opravdu „leží mezi" oběma odhady, tím jsme si ovšem bez znalosti dalších vlastností výrazu ze závorky nemohli být úplně jistí.
Závěrem porovnejme ještě hodnoty druhé derivace, tj.

$$f''(2) = -\frac{46}{225} = -0,2044\ldots,$$
$$f''(x_2) = -\frac{-5+\sqrt{5}}{5} = -0.5527\ldots,$$
$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{129}{169} = -0.7633\ldots.$$

Před definitivním opuštěním příkladu si porovnejte úpravy prováděné při dosazování zlomku $\frac{3}{2}$ a zlomku $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, jsou si velmi podobné.
Není důležité zda počítáte s přirozenými nebo reálnými čísly, úpravy a pravidla jsou tatáž. Důležité je nebát se počítat a počítat správně.

Operace s čísly : Spočtěte

i) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5}$

ii) $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right)$

iii) $\left(\frac{4}{5} : \frac{5}{4}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)$

iv) $\frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{4}{7}}$

Rada :

Řešení :

i) $-\frac{13}{60}$,

ii) $\frac{10}{3}$,

iii) $\frac{8}{15}$,

iv) $\frac{7}{36}$

Operace s čísly : Spočtěte

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

ii) $\left(1-\frac{2}{3}\right)^{4}\left(4-\frac{3}{2}\right)^{-1}$

iii) $\frac{(-2)^{-2}}{3^{2}}:\left(\frac{1}{2^{3}}+\frac{3^{-2}}{\frac{1}{4}}\right)$

iv) $\left(\frac{3^{4}}{(-2)^{-2}}:\frac{-9^{2}}{4^{-1}}\right)^{2}$

Rada :

Řešení :

i) 8,

ii) $\frac{2}{405}$,

iii) $\frac{2}{41}$,

iv) 1.

Operace s čísly : Spočtěte

i) $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

ii) $\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)*\left(2+\sqrt{3}\right)$

iii) $\left(4+\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2*\left(-2+5\sqrt{5}\right)^{-1}$

iv) $\frac{2-\sqrt{12}}{4+2\sqrt{3}}$

Rada :

Řešení :

i) $\frac{1}{2}$,

ii) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

iii) $2+\sqrt{5}$,

iv) $5-3\sqrt{3}$.

Zadání : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}.$$

Řešení : Pokusíme-li se do výrazu 1 dosadit, objeví se ve jmenovateli 0 a protože dělení nulou není definováno, máme problém. Tento problém pomáhá řešit aparát limit.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x\,x+(x-1)(x-1)}{x(x-1)}}{\frac{(x-1)(x-1)-x\,x}{x(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+(x-1)^2}{\cancel{x(x-1)}}\cdot\frac{\cancel{x(x-1)}}{(x-1)^2-x^2}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x^2-2\,x+1}{x^2-2\,x+1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{2\,x^2-2\,x+1}{1-2\,x}.$$

po všech algebraických úpravách máme zlomek ve tvaru, do nějž již lze 1 snadno dosadit a získat tak výsledek

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{2\,x^2-2\,x+1}{1-2\,x}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Při práci se zlomky pamatujeme především na to, že se musíme vyvarovat dělení nulou.
Sčítáme resp. odčítáme zlomky, tj.

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\,d\pm b\,c}{b\,c}.$$

Dále využijeme toho, že dělení zlomkem je rovno násobení jeho převrácenou hodnotou, takže

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\,d}{b\,c}.$$

Zlomek z právě vyřešeného příkladu není definován nejen pro $x=1$, ale také pro $x=0$ a $x=\frac{1}{2}$. I v případech limit v těchto bodech pomohou stejné algebraické úpravy.
Pro $x=0$ lze dosadit do upraveného tvaru a odečíst výsledek

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}=1.$$

Pro $x=\frac{1}{2}$ je situace poněkud komplikovanější, neboť ani po úpravách nelze dosadit, ve jmenovateli se stále objevuje nula. Limitu je nutné rozdělit na dvě „zprava“ a „zleva“ a dopočíst, že

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}=\infty,$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}=-\infty.$$

Úprava algebraických výrazů : Upravte a stanovte podmínky

i) $\dfrac{\frac{1}{x} - x}{1 + \frac{1}{x}}$

ii) $\dfrac{x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - x^2} - \dfrac{x}{x+1}$

iii) $\dfrac{\frac{4x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1}}{\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x+1}{x-1}}$

Rada : Rozhodně se vyplatí nezapomenout na vzorce

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2,$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2\,A\,B + B^2,$$
$$(A+B)^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2.$$

Řešení :

i) $1 - x,\ x \neq 0, x \neq -1,$

ii) $\dfrac{x^2}{1-x^2},\ x \neq \pm 1, x \neq 0,$

iii) $-\dfrac{(x+1)^2}{2\,x^2+1},\ x \neq \pm 1, x \neq -\frac{1}{2}.$

Zadání : Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}.$$

Řešení : Pokus o dosazení 1 do vyšetřovaného výrazu vede k podílu $\frac{0}{0}$, proto je opět nutné využít limity. Její výpočet je však zcela opřen o úpravu algebraických výrazů. Upravujme tedy
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cancel{(x^2-1)}}{(x+1)\cancel{(x^2-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}.$$
Do takto upraveného zlomku již lze bez potíží dosadit a získat tak výsledek.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=0.$$
Úprav se není třeba bát, postupů se většinou nabízí více a každý si může vybrat, takový jaký právě jemu vyhovuje. (Samozřejmě za předpokladu, že jde o postup správný.) Zde jsme například mohli členy nejprve „přerovnat" a poté vytýkat také takto
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-x)-(x^2-1)}{(x^3-x)+(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-1)-(x^2-1)}{x(x^2-1)+(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x^2-1)}(x-1)}{\cancel{(x^2-1)}(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\,a\,b+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2\,a\,b+b^2,$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Úprava algebraických výrazů : Vytýkejte, kraťte, upravujte

i) $\frac{2-x+2\,x^2-x^3}{x^3-x^2-4\,x+4}$

ii) $\frac{x^2+3\,x+2}{x^3+2\,x^2+x}$

iii) $$\frac{x^3-2\,x^2-x+2}{x^3+4\,x^2-x-4}$$

Rada :

Řešení :

i) $\dfrac{x^2+1}{(1-x)(2+x)}$, , $x \neq 1, x \neq \pm 2$,

ii) $\dfrac{x+2}{x(x+1)}$, $x \neq 0, x \neq 1$,

iii) $\dfrac{x-2}{x+4}$, $x \neq -4, x \neq \pm 1$.

Zadání : Spočteme limitu

$$\lim_{x\to -3}\frac{2\,x^3+11\,x^2+15\,x}{3\,x^3+x^2-27\,x-9}.$$

Řešení : Dosazením opět získáváme podíl $\frac{0}{0}$, k určení jeho „hodnoty“ je tedy opravdu potřeba využít limity. Bohužel tvar čitatele ani jmenovatele nenasvědčuje možnosti jednoduché úpravy vytknutím či použitím vzorců. Nicméně to že pro $x=-3$ jsou čitatel i jmenovatel rovny 0, znamená, že jejich rozklad na kořenové činitele obsahuje $(x+3)$. Vydělme je tedy

$$\begin{array}{l}
\big(\ 2x^3+11x^2+15x\big):\big(x+3\big)=2x^2+5x,\\
\underline{-\,2x^3\ -6x^2\quad}\\
\qquad\qquad 5x^2+15x\\
\qquad\quad \underline{-\,5x^2-15x}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & 1 & -27 & -9\\
-3 & & -9 & 24 & 9\\
\hline
 & 3 & -8 & -3 & 0
\end{array}.$$

S využitím těchto výsledků již dopočteme

$$\lim_{x\to -3}\frac{2\,x^3+11\,x^2+15\,x}{3\,x^3+x^2-27\,x-9}=\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{(x+3)}(2x^2+5x)}{\cancel{(x+3)}(3x^2-8x-3)}=\frac{1}{16}.$$

Vydělení čitatele proběhlo „klasicky.“
Jmenovatel je vydělen pomocí Hornerova schematu. Do prvního řádku tabulky si zapíšeme koeficienty děleného polynomu, vedle tabulky je -3, kterou dosazujeme a konečně vedoucí koeficient 3 přepíšeme na první místo posledního řádku.
Dále postupujeme následovně -3 vynásobíme 3, dostáváme -9, která je zaznamenána ve druhém řádku. Tuto -9 sečteme s 1 a výslednou -8 zapíšeme do posledního řádku. Pak kroky opakujeme, takže násobíme, sčítáme a zapisujeme si $- -3\cdot -8 = 24 - 24 - 27 = -3$ a tak dále.
Posledním řádku se nám objevují koeficienty podílu. A konečně na jeho posledním místě je zbytek po dělení.

Úprava algebraických výrazů : Vydělte polynomy

i) $(x^3 - 4\,x^2 + x + 6) \div (x - 2)$

ii) $(x^4 - 8\,x^2 - 9) \div (x - 3)$

iii) $(x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 19x - 12) \div (x + 4)$

Rada :

Řešení :

i) $x^2 - 2\,x - 3$,

ii) $x^3 + 3\,x^2 + x + 3$,

iii) $x^3 - 4x - 3$.

Zadání : Vyřešte diferenciální rovnici $(x^2 + x - 6)\, y' = x + 2$.

Řešení : V diferenciální rovnici máme nalézt neznámou funkci $y = y(x)$, přičemž známe vztah, který platí pro jeho derivaci. Z našeho zadání snadno vyjádříme $y' = \frac{x+2}{(x^2+x-6)}$, a tedy, že $y = \int \frac{x+2}{(x^2+x-6)} \mathrm{d}x$. Výpočet takového integrálu se provádí rozkladem integrovaného zlomku na součet zlomků, které jsou integrovatelné snadněji. K tomu je nutné, pokud to lze, rozložit jmenovatel na součin, tj. $(x^2 + x - 6) = (x - 2)\,(x + 3)$. Nyní již přistupme k rozkladu

$$\frac{x+2}{(x^2+x-6)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{x+2}{(x^2+x-6)} = \frac{A\,(x+3) + B\,(x-2)}{(x-2)\,(x+3)} = \frac{(A+B)\,x + (3A-2B)}{(x-2)\,(x+3)}$$

Otázkou samozřejmě zůstává čemu se konstanty $A, B \in \mathbb{R}$ rovnají. Porovnáváme zde dva zlomky, které mají stejný jmenovatel. Aby platila rovnost, musí mít stejné také čitatele. Proto se musí rovnat $x + 2 = (A + B)\,x + (3A - 2B)$, odtud jednoduše $A + B = 1$ a $3A - 2B = 2$ a konečně $A = \frac{4}{5}$ a $B = \frac{1}{5}$.
Můžeme využít také druhého tvaru a porovnat $x + 2 = A\,(x + 3) + B\,(x - 2)$. Tato rovnost musí platit pro každé $x \in \mathbb{R}$, dosaďme tedy $x = 2$, čímž získáme rovnici $4 = 5A$. Dosazení $x = -3$ vede k $-1 = -5B$.
Dointegrujme tedy

$$y = \int \frac{\frac{4}{5}}{x+3} + \frac{\frac{1}{5}}{x-2} \mathrm{d}x = \frac{4}{5} \ln|x+3| + \frac{1}{5} \ln|x-2| + c.$$

I když postup může vypadat složitě, jde pouze o rozklad mnohočlenu (zde kvadratického) a součet dvou či více zlomků.

Algebraické úpravy - součet zlomků : Určete koeficienty A, B, C, tak aby platila rovnost

i) $\frac{5x+4}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

ii) $\frac{3x-5}{x^2-2\,x-3} = \frac{A}{(\quad)} + \frac{B}{(\quad)}$

iii) $\frac{11\,x-14}{x^3-x^2-4\,x+4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(\quad)} + \frac{C}{(\quad)}$

Rada : V příkladech ii), iii) určete také rozklad jmenovatele. Připomeňte si kvadratickou rovnici, Vietovy vzorce a dělení polynomu polynomem.

Řešení :

i) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+2}$,

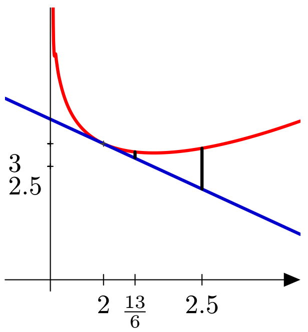
ii) $\frac{1}{(x-3)} + \frac{2}{(x+1)}$,

iii) $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}$.

Zadání : Odhadněme hodnotu funkce $f(x) = \sqrt{x^3+1} - \ln(x^2-3)$ pro $x = \frac{13}{6}$.

Řešení : Prvním a nejjednodušším odhadem je přímé dosazení, ovšem nebudeme dosazovat přímo $\frac{13}{6}$, ale 2, a to protože se jednak dosazuje mnohem lépe a jednak se zlomku $x = \frac{13}{6}$ „skoro" rovná.
Toto dosazení je opravdu jednoduché $f(2) = \sqrt{2^3+1} - \ln(2^2-3) = \sqrt{9} - \ln 1 = 3$. A první odhad je na světě.
Jedna z cest, jak odhad zlepšit, je nalezení tečny ke grafu funkce $f(x)$ v nějakém vhodném bodě a. Vhodnost posuzujeme podle toho, jak dobře se v a počítá funkční hodnota $f(a)$ a hodnota derivace $f'(a)$ a taky podle toho, jak „blízko" jsou dosazované x a bod a od sebe. V našem případě jsme již učinili první odhad a na něm můžeme posoudit vhodnost $a = 2$. Je vhodné.
Derivace funkce je $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} - \frac{2x}{x^2-3}$ a její hodnota pro $a = 2$ je $f'(2) = -2$. Zbývá jen dosadit do vzorce

$$t : y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \Rightarrow \quad t : y = -2(x-2) + 3 \quad \Rightarrow \quad t : y = -2x + 7.$$



Z přiloženého obrázku je patrné „blízko" bodu a jsou si $f(x)$ a její tečna podobné. Tečna klesá, graf klesá. Také hodnoty se příliš neliší. Když tedy dosadíme $\frac{13}{6}$ do rovnice tečny, dostaneme další odhad hodnoty $f(\frac{13}{6})$. Proveďme to : $-2 \cdot \frac{13}{6} + 7 = \frac{8}{3} \doteq 2.67$.
Doplňme ještě, že výsledek „kalkulačkového" výpočtu je

$$f(\frac{13}{6}) = \sqrt{\frac{2413}{216}} - \ln(\frac{61}{36}) = 2.8149939932761907855765780649009 1\ldots$$

Při druhém odhadu jsme se tedy dopustili chyby 0.15.

Všimněme si ještě, že „podobnost" dané tečny a grafu se omezuje jen na „jisté" okolí bodu a.
Dále je ze vzorce pro tečnu patrné, že směrnice přímky je dána hodnotou $f'(a)$. Pro přímku

$$p : y = k\,x + q,$$

platí, že pro

$k < 0$ je klesající,

$k = 0$ je konstantní,

$k > 0$ je rostoucí.

To spolu s „podobností tečny a grafu na jistém okolí bodu a" dává na tomto okolí a následující vztah,

$f'(a) < 0$ funkce $f(x)$ je klesající,

$f'(a) = 0$ v a může mít funkce $f(x)$ extrém,

$f'(a) > 0$ funkce $f(x)$ je rostoucí.

Dodejme ještě, že výpočtem dalších derivací a správným použitím správného vzorce lze místo přímky získat polynom, který funkci aproximuje ještě lépe. A to je víceméně to, co v kalkulátoru probíhá po stisknutí $\boxed{=}$.

Lineární funkce : Načrtněte grafy funkcí, nalezněte průsečíky s osami a jejich vzájemné průsečíky

i) $p_1 : y = 0.5\,x + 3$, ii) $p_2 : y = \frac{1}{2}(x-1)$, iii) $p_3 : y = -\frac{x+1}{3}$.

Rada : Upravte do směrnicového tvaru.

Řešení :

- p_1 roste,
- p_2 roste,
- p_3 klesá,
- $p_1 \parallel p_2$,
- p_1, p_3, průsečík $P_{1,3}[0,3]$,
- p_2, p_3, průsečík $P_{1,3}[1,0]$.

Kvadratická rovnice

Zadání : Nalezněte stacionární body funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x-1}{3+x^2}}.$$

Řešení : Nalézt stacionární body funkce znamená nalézt taková $x \in D(f)$, že platí $f'(x) = 0$. Jsou to body, v nichž může funkce nabývat svého lokálního minima nebo maxima.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x-1}{3+x^2}} \left(\frac{3 + 2\,x - x^2}{(3 + x^2)^2} \right) \stackrel{?}{=} 0.$$

Exponenciální člen $\mathrm{e}^{\frac{x-1}{3+x^2}}$ je vždy kladný a tedy nenulový. Stejně tak jmenovatel $3 + x^2$. Jedinou možností, kdy může být derivace nulová, jsou nulové body čitatele.
Jednoduchým vytknutím převedeme čitatele do normovaného tvaru, tj. $3 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2\,x - 3)$. Jeho kořeny tak můžeme kořeny určit pomocí Vietových vzorců. Budeme hledat x_1 a x_2, takové že pro ně platí

$$x_1 + x_2 = 2, \qquad x_1\,x_2 = -3.$$

Takovými čísly jsou $x_1 = -1, x_2 = 3$ a čitatele člen lze zapsat jako

$$3 + 2x - x^2 = -\,(x + 1)\,(x - 3)\,.$$

Nulové body čitatele, jsou hledanými stacionárními body funkce $f(x)$. Řešením tedy jsou $x_1 = -1$ a $x_2 = 3$.

Pro řešení kvadratické rovnice jsme tentokrát využili Vietovy vzorce, tj. máme-li kvadratickou rovnici v normovaném tvaru

$$x^2 + p\,x + q = 0,$$

pak platí

$$-p = x_1 + x_2,$$
$$q = x_1\,x_2,$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny rovnice.
Vzorce plynou z kořenového rozkladu

$$x^2 + p\,x + q = (x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

Pro nenormovanou rovnici $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ platí

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,,$$
$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2,$$
$$\frac{c}{a} = x_1\,x_2,$$

kde x_1, x_2 jsou opět kořeny příslušné rovnice.

Kvadratická funkce : Načrtněte grafy funkcí, určete $\mathcal{D}(f), \mathcal{H}(f)$, průsečíky s osami, souřadnice vrcholu

i) $f(x) = x^2$

ii) $f(x) = -x^2$

iii) $f(x) = 1 - x^2$

iv) $f(x) = (x+1)^2$

Rada : Kvadratická funkce $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, pro $a > 0$ parabola „otevřená nahoru," pro $a < 0$ parabola „dolu."

Řešení :

i) základní graf,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0, \infty)$
$P_x[0,0], P_y[0,0], V[0,0]$,

ii) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (-\infty, 0)$
$P_x[0,0], P_y[0,0], V[0,0]$,

iii) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (-\infty, 1)$
$P_{x_1}[1,0], P_{x_2}[-1,0], P_y[0,1], V[0,1]$,

iv) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0, \infty)$
$P_x[-1,0], P_y[0,1], V[-1,0]$.

Kvadratická rovnice : Vyřešte rovnice, použijte vzorce s diskriminantem

i) $x^2 - 2x + 3 = 0$

ii) $x^2 - 2x - 3 = 0$

iii) $x^2 + 2x - 3 = 0$

iv) $x^2 + 2x + 3 = 0$

Rada : Pro kvadratickou rovnici

$$a x^2 + b x + c = 0,$$

je diskriminant D roven $D = b^2 - 4ac$.
Její kořeny pak jsou

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Z tvaru kořenů je vidět, že

- $D < 0$ neexistuje v $\mathbb{R}$ řešení,
- $D = 0$ má rovnice právě jedno řešení,
- $D > 0$ má rovnice dva kořeny.

Na uvedených příkladech si všimněte, jak drobná změna, (např. chyba při opisovaní) může ovlivnit výsledek.

Řešení :

i) nemá řešení,

ii) $x_1 = -1, x_2 = 3$,

iii) $x_1 = -3, x_2 = 1$,

iv) nemá řešení.

Kvadratická rovnice : Pomocí Vietových vzorců nalezněte kořeny rovnic

i) $x^2 - 6\,x + 5 = 0$

ii) $24 - 6\,x - 3x^2 = 0$

iii) $2\,x^2 - 6x - 4 = 0$

iv) $x^2 - \frac{x}{6} - \frac{1}{6} = 0$

Rada : Nejprve vytkněte vedoucí koeficient, hledaný součin resp. součin pak bude menší.
Poslední příklad již má vedoucí koeficient roven 1, nebojte se práce se zlomky.

Řešení :

i) $(x-1)(x-5); x_1 = 1, x_2 = 5,$

ii) $-3(x-2)(x+4); x_1 = 2, x_2 = -4,$

iii) $2(x-1)(x-2); x_1 = 1, x_2 = 2,$

iv) $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3}); x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}.$

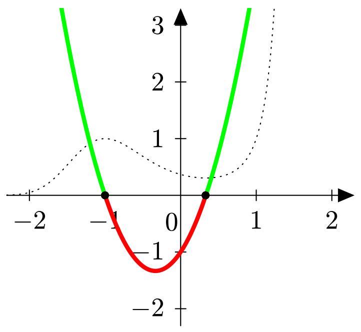
Kvadratická nerovnice

Zadání : Zjistěte, kdy je funkce $f(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2-x-1}$ rostoucí.

Řešení : Pro rostoucí funkci platí, že její první derivace je kladná, tj. $f'(x) > 0$. Nejprve tedy musíme tuto derivaci spočíst a poté určit její znaménko.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2-x-1}(3x^2 + 2x - 1)$$

Z vlastností exponenciální funkce víme, že její obor hodnot je $\mathbb{R}^+$, neboli že pro $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^x > 0$. Odtud plyne, že také $\mathrm{e}^{x^3+x^2-x-1}$ bude vždy kladné. Znaménko derivace $f'(x)$ proto závisí pouze na kvadratickém členu. Určíme si nulové body kvadratické rovnice tj. $x_1 = -1$ a $x_2 = \frac{1}{3}$. Dále můžeme postupovat graficky, tj. načrtnout si graf paraboly $3x^2 + 2x - 1$ a z něj zjistit, kdy jsou hodnoty kladné.



Graf $3\,x^2 + 2\,x - 1$

V grafu jsou zeleně zvýrazněny kladné hodnoty. Můžeme tak odpovědět, kdy platí, že $3\,x^2 + 2\,x - 1 > 0$. Pro tato x platí také, že $f'(x) > 0$ a tedy že vyšetřovaná funkce $f(x)$ je zde rostoucí.
Odpověď tedy je : $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$.
V grafu je zanesena také samotná funkce $f(x)$. Lze tak její monotónnost pozorovat.

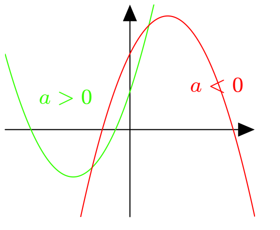
Pro kvadratickou rovnici, resp. funkci

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$
$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$ platí : Kořeny x_1, x_2(průsečíky s osou x, nulové body jsou)

$$D = b^2 - 4\,a\,c,$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a},$$

přitom pro $D > 0$ jsou kořeny dva (různé) reálné, pro $D = 0$ je kořen jeden (dvojnásobný) reálný a konečně pro $D < 0$ nemá rovnice reálné kořeny, tj. neexistují průsečíky s osou x. Vrchol paraboly je „napůl cesty mezi kořeny,“ vynecháme-li tedy v předešlém vzorci člen $\sqrt{D}$, zůstane nám vzorec pro určení x-ové souřadnice vrcholu, tj. $\frac{-b}{2a}$. Tento vztah platí, i když neexistují reálné kořeny.
Dále pro a je parabola „otevřena nahoru“ a pro $a < 0$ je „otevřena dolů,“ viz. následují obrázek.



Kvadratická nerovnice : Vyřešte

i) $x^2 - 3x - 2 < 2$

ii) $1 - x - x^2 < -5$

iii) $x - 3 \leq 3 - 3x - 2x^2$

Rada : Převeďte vše na pravou (nebo levou) stranu, tak abyste porovnávali kvadratický trojčlen s 0 jako v řešeném příkladě. Tj. nejprve určit nulové body, náčrtek paraboly a odtud řešení nerovnice.

Řešení :

i) $x \in (-1, 4)$,

ii) $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$,

iii) $x \in \langle -3, 1 \rangle$.

Zadání : Zintegrujme

$$\int \frac{1}{x^2-4\,x+3}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{x^2-4\,x+4}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{x^2-4\,x+5}\mathrm{d}x.$$

Řešení : Všechny integrované se liší pouze absolutním členem kvadratického trojčlenu ve jmenovateli. Tato „drobnost“ je však pro postup a výsledek integrování zcela rozhodující.

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4\,x+3}\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \frac{1}{x^2-4\,x+4}\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \frac{1}{x^2-4\,x+5}\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x, & \displaystyle\int (x-2)^{-2}\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\frac{1}{2}\left(\ln|x-3|-\ln|x-1|\right)+c, & \displaystyle\frac{-1}{x-2}+c, & \operatorname{arctg}(x-2)+c.
\end{array}$$

Cílem není naučit integrovat racionální lomené funkce, aale upozornit, jak důležité můžou být i zdánlivé drobnosti.

Hledání kořenů kvadratické rovnice již bylo připomenuto jinde, zde upozorníme na úpravu použitou ve třetím jmenovateli, tj. na doplnění na čtverec.
Čtvercem se zde myslí výraz ve tvaru $(x \pm a)^2$. Proto opět zopakujme vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2.$$

Při úpravě x^2-4x+5 jsme se řídili druhým z nich. Konkrétně jsme člen $-2a$ vzorce porovnali se členem $-4x$ ze jmenovatele, odtud je $a=2$. Celé doplnění lze zapsat

$$(x^2-4x+4)-4+5 = (x-2)^2+1,$$

to znamená, že k prvním dvěma členům jsme přidali 4, kterou jsme okamžitě odečetli. Získali jsme tak „závorku rovnou čtverci“.
Uvedený zápis je poněkud těžkopádný, avšak dobře celý postup ilustruje.
Z tvaru $(x-2)^2+1$ lze snadno vyčíst souřadnice vrcholu paraboly příslušející jmenovateli. Vrcholem je bod $V[2,1]$.
Kdo si pamatuje vzorec pro výpočet souřadnic vrcholu

$$V\left[\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a}\right]$$

může „doplňovat na čtverec“ i s jejich pomocí.

Úprava algebraických výrazů : Doplňte na čtverec a zapiště souřadnice vrcholu

i) $x^2 - 3\,x + 3$

ii) $2x^2 + 8\,x - 9$

iii) $-3x^2 + 4\,x - 12$

Rada : V případě, že vedoucí koeficient není rovný 1, můžete vytknout

$$a\,x^2 + b\,x + c = a(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}),$$

a poté doplnit na čtverec výraz v závorce. Případně nejdřív určete dle vzorce vrchol a na čtverec doplňujte s jeho pomocí.

Řešení :

i) $(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4},\ V[\frac{3}{2}, \frac{3}{4}]$

ii) $2(x+2)^2 - 17,\ V[-2, -17]$

iii) $-3(x - \frac{2}{3})^2 - \frac{32}{3},\ V[\frac{2}{3}, -\frac{32}{3}]$.

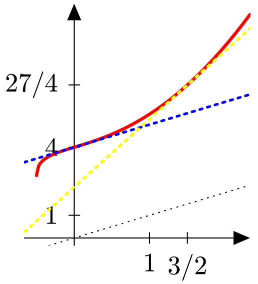
Zadání : Ve kterém bodě má funkce $f(x) = 2\sqrt{2x+1} + x^2 - x + 2$ tečnu rovnoběžnou s přímkou $y = x$?

Řešení : Směrnice tečny v bodě a je dána hodnotou derivace v tomto bodě. Má-li být tečna rovnoběžná s přímkou $y = x$, musí mít stejnou směrnici, tj. 1. Hledáme tedy a takové, že platí $f'(a) = 1$. Spočtěme derivaci, dosaďme do ní a a vyřešme rovnici

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\,x+1}} + 2\,x - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{2\,a+1}} + 2\,a - 1 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2\,a+1}} = 1 - a$$

$$\frac{1}{2\,a+1} = (1-a)^2 \;\Rightarrow\; 1 = (2\,a+1)\,(1-a)^2 \;\Rightarrow\; 0 = a^2(2\,a-3) \quad \Rightarrow\; \underline{\underline{a = 0, \quad a = \frac{3}{2}}}.$$

Mohlo by se zdát, že příklad vyřešen, ovšem dosadíme-li řešení $a = \frac{3}{2}$ do vztahu $\frac{1}{\sqrt{2\,a+1}} = 1 - a$, získáme zjevně neplatný vztah $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Dosadíme-li však $a = \frac{3}{2}$ do $\frac{1}{2\,a+1} = (1-a)^2$ je výsledkem vztah platný $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Důvodem je umocnění rovnice na druhou, které jsme právě mezi těmito kroky provedli. Tato úprava totiž není ekvivalentní, proto se vyplatí opatrnost a na závěr provedení zkoušky.



Jediným správným řešením je bod $a = 0$ a hledaná tečna má rovnici $y = x + 4$. V přiloženém nákresu je modře vytečkována. Černě je zakreslena přímka $y = x$. Žlutě tečna v bodě $a = \frac{3}{2}$, která má tvar $y = 3\,x + \frac{9}{4}$. Samotná funkce $f(x)$ je zaznačena červeně. Všimněte jak jsou si tečny a funkce v okolí bodu a podobné.

Při řešení rovnic s odmocninami je třeba mít na vědomí, že se jedná o neekvivalentní úpravu.
Před samotným umocněním se vyplatí převést členy s odmocninami na jednu a „vše bez odmocnin“ na druhou stranu rovnice.
Pokud však máme součet (rozdíl) dvou odmocnin roven nule, pak každou z odmocninu osamostatníme na jedné straně rovnice.
Umocňovat řádně a správně, zejména pokud se objeví součty a rozdíly odmocnin. Pamatovat zde na vzorce

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2.$$

Představují-li zde a, b dva členy s odmocninou, pak musíme kvůli člen $2\,a\,b$ umocnit rovnici ještě jednou, abychom se zbavili odmocnin i v tomto členu.
Samozřejmě nesmíme zapomenout ověřit, zda nalezené řešení leží v definičním oboru funkcí obsažených v rovnici.

Odmocnina : Načrtněte grafy funkcí, určete $\mathcal{D}(f), \mathcal{H}(f)$, průsečíky s osami

i) $f(x) = \sqrt{-x}$

ii) $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

iii) $f(x) = -\sqrt{1-x}$

iv) $f(x) = 3 - \sqrt{x+2}$

Rada : Argument druhé odmocniny musí být nezáporný.

Řešení :

i) klesá,
$\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0\rangle, \mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty)$
P_x nemá, $P_y[0, 1]$,

ii) roste,
$\mathcal{D}(f) = \langle -1, \infty), \mathcal{H}(f) = \langle 2, \infty)$
P_x nemá, $P_y[0, 3]$,

iii) roste,
$\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1\rangle, \mathcal{H}(f) = (-\infty, 0\rangle$
$P_x[1, 0], P_y[0, -1]$,

iv) roste,
$\mathcal{D}(f) = \langle -2, \infty), \mathcal{H}(f) = (-\infty, 3\rangle$
$P_x[7, 0], P_y[0, 3 - \sqrt{2}]$.

Rovnice s odmocninou : Vyřešte

i) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{3x-2}=0$

ii) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}=1$

iii) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+9}$

Rada : V druhé i třetí rovnici musíme umocnit dvakrát. Řešení druhé si však můžeme usnadnit tím, že si nejprve určíme „definiční obor levé strany.“ Obě odmocniny jsou společně definovány pouze v bodě $x=1$, hodnota obou je zde 0, součtem obou opět nula.

Řešení :

i) nemá řešení, $x=-1$ nepatří do definiční oboru žádné z obou odmocnin

ii) nemá řešení,

iii) $x=0$,

Zadání : Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin(2x-3)$.

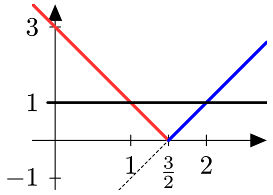
Řešení : Funkce $\arcsin x$ je funkcí inverzní k $\sin x$, jejím definičním oborem je tedy obor hodnot funkce $\sin x$, tj. $\mathcal{D}(\arcsin x) = \langle -1, 1\rangle$. Hledáme-li tedy $\mathcal{D}(x)$, hledáme ty $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $-1 \leq 2x-3 \leq 1$, což lze zapsat jako

$$|2x-3| \leq 1.$$

K úpravě použijeme definici absolutní hodnoty

$$|x| = \begin{cases} x \text{ pro } & x \geq 0, \\ -x \text{ pro } & x < 0. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad |2x-3| = \begin{cases} 2x-3 \text{ pro } x \geq \frac{3}{2}, \\ -(2x-3) \text{ pro } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Řešíme tedy dvě nerovnice, pro $x \geq \frac{3}{2}$ hledáme $2x-3 \leq 1$ a pro $x < \frac{3}{2}$ hledáme $-(2x-3) \leq 1$.
Z první získáme $x \leq 2$, což v kombinaci s podmínkou $x \geq \frac{3}{2}$ dává interval $\left\langle \frac{3}{2}, 2\right\rangle$.
Z druhé pak $x \geq 1$ spolu s podmínkou $x < \frac{3}{2}$ dává $\left\langle 1, \frac{3}{2}\right)$. Řešením je sjednocení obou intervalů, tj. $\mathcal{D}(f(x)) = \langle 1, 2\rangle$.



Celou situaci si můžeme zakreslit. Červeně zde je část „s převráceným“ znaménkem. Čárkovaně původní polopřímka, která změnou znaménka přešla v část červenou. Modře pak je část, která se neměnila. Konečně černě je zaznačena přímka $y = 1$, tak aby bylo lze vidět řešení. Řešením je sjednocení obou intervalů a tedy platí

$$\mathcal{D}(f(x)) = \langle 1, 2\rangle.$$

Při práci s absolutní hodnotou nalezněte nulové body, které rozdělí definiční obor výrazu v absolutní hodnotě na několik částí. V každé z těchto částí určete „znaménko“ výrazu. Pokud je výraz záporný, pak z něj absolutní hodnota „udělá“ kladný, proto výraz pronásobte -1. Pokud je výraz kladný, zůstává nezměněn.
Vždy mějte na paměti, v které „části“ se pohybujete.

Trocha teorie : Funkce s absolutní hodnotou

Absolutní hodnota : Načrtněte grafy funkcí, určete $\mathcal{D}(f), \mathcal{H}(f)$, průsečíky s osami

i) $f(x) = |1 - x|$

ii) $f(x) = 1 - |x + 2|$

iii) $f(x) = 2 - |3 - x|$

iv) $f(x) = \sqrt{x^2}$

Rada : Absolutní hodnota udává vzdálenost x od nulového bodu.

Řešení :

i) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty)$
$P_x[-1, 0], P_y[0, 1]$,

ii) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (-\infty, 1\rangle$
$P_{x_1}[-3, 0], P_{x_2}[-1, 0], P_y[0, -1]$,

iii) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (-\infty, 2\rangle$
$P_{x_1}[1, 0], P_{x_2}[5, 0], P_y[0, -1]$,

iv) základní graf,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0, \infty)$
$P_x[0, 0], P_y[0, 0]$.

(Ne)rovnice s absolutní hodnotou : Vyřešte

i) $|2x-3|-|3x-2|=0$

ii) $|4-3x|+|x+1|<2$

iii) $|x-1|+|x|\geq|x+1|$

Rada :

Řešení :

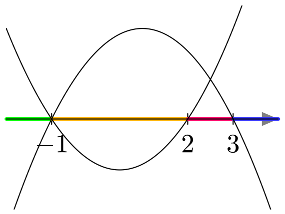
i) $x=\pm 1$,

ii) nemá řešení,

iii) $x\in(-\infty,0\rangle\cup\langle 2,\infty)$.

Zadání : Zakreslete graf funkce $f(x) = |x^2 - x - 2| - |3 - 2x - x^2|$.

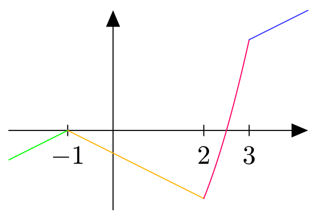
Řešení : V absolutních hodnotách se zde vyskytují kvadratické členy, nicméně postup je stejný určit jejich nulové body, rozhodnout o znaménku v jednotlivých částech definičního oboru. S tím může pomoci jednoduchý náčrtek.



Z tohoto obrázku ihned vidíme, kdy se která „parabola dostává nad osu x resp. zůstává pod ní.“ Takto máme určeny 4 intervaly a v každém z nich určíme chování absolutní hodnoty.

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - x - 2) - (-(3 - 2x - x^2)) = 1 + x & \text{pro} \quad x \leq -1 \\ -(x^2 - x - 2) - (3 - 2x - x^2) = -1 - x & \text{pro} \quad -1 < x \leq 2 \\ (x^2 - x - 2) - (3 - 2x - x^2) = 2x^2 - 3x - 5 & \text{pro} \quad 2 < x \leq 3 \\ (x^2 - x - 2) - (-(3 - 2x - x^2)) = 1 + x & \text{pro} \quad 3 < x \end{cases}$$

Po tomto rozboru již můžeme zakreslit graf funkce $f(x)$. Skládá se z části polopřímky, úsečky, části paraboly a opět polopřímky. Barvy jednotlivých částí odpovídají barvám použitým v rozboru.
Původní funkční předpis sice popisoval závislost funkční hodnoty pro každé $x \in \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Nový zápis se sice „rozpadl“ na 4 (resp. 3) části, ale v jednotlivých částech je zápis mnohem jednodušší.



Opět platí : najít nulové body a zjistit „chování“ absolutní hodnoty v jednotlivých intervalech.
Nebuďte překvapení, že dostáváme záporné hodnoty. Předpoklad „když je tam absolutní hodnota, tak to bude kladné“ je mylný.

(Ne)rovnice s absolutní hodnotou : Načrtněte graf funkce $f(x)$

i) $f(x) = |1-x| + |1-x^2|$

ii) $f(x) = \left|1-\sqrt{-x}\right| + |\ln x|$

iii) $f(x) = |1-\ln x| + |\ln 4x|$

Rada : Buďte pozorní, dříve než začnete řešit rovnice, hledat nulové body a znaménka, určete definiční obor funkce.

Řešení :

i)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x \Leftrightarrow x \leq -1, \\ -x^2 - x + 2 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1, \\ x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 1 < x. \end{cases}$$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$,
průsečíky $P_x[1,0]$, $P_y[0,2]$,

ii) $\mathcal{D}(f) = \emptyset$ nemá smysl,

iii)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2\ln(2x) \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{4}, \\ 1 + 2\ln(2) \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq \mathrm{e}, \\ -1 + 2\ln(2x) \Leftrightarrow \mathrm{e} < x. \end{cases}$$

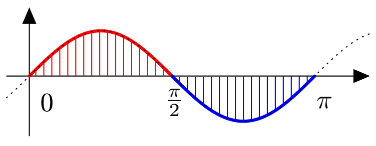
$\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, průsečíky nemá.

Zadání : Zintegrujte

$$\int_0^\pi \cos x \sin x \mathrm{d}x.$$

Řešení : Integrování není těžké a vede k výsledku

$$\int_0^\pi \cos x \sin x \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left(\sin^2(\pi) - \sin^2(0)\right) = 0.$$



Graf $f(x) = \frac{\sin 2x}{2}$

Přestože integrování nebylo těžké, můžeme si práci ještě zjednodušit a neintegrovat vůbec. K tomu je ovšem potřeba umět zakreslit graf integrované funkce. Pomocí (známých) vzorců lze psát $f(x) = \frac{\sin 2x}{2}$. Graf je na přiloženém obrázku. Nyní si již stačí uvědomit, že integrálem počítáme velikost plochy mezi grafem $f(x)$ a osou x. Červená část i modrá část ji mají stejnou, ovšem červenou chápeme „kladně“ zatímco modrou „záporně.“ Obě plochy se tedy „odečtou“ a výsledkem je 0.

Z tohoto je patrné jak důležité je znát grafy základních funkcí.

V dalším si zopakujeme funkce goniometrické, resp. využití základních vzorců k řešení goniometrických rovnic.

$$\begin{aligned} 2\sin x \cos x &= \sin 2x, \\ \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos 2x, \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos x}{2}, \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos x}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x, \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x, \sin y. \end{aligned}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Goniometrické funkce : Načrtněte grafy funkcí

i) $f(x) = \sin(x)$

ii) $f(x) = -\cos(x)$

iii) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

iv) $f(x) = \cos(-x) + 1$

Rada :

Řešení :

i) základní graf,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \langle -1, 1 \rangle$,
$P_x[k\,\pi, 0], k \in \mathbb{Z}, P_y[0, 0]$,
lichá funkce,

ii) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \langle -1, 1 \rangle$,
$P_x[(2\,k + 1)\,\frac{\pi}{2}, 0], k \in \mathbb{Z}, P_y[0, -1]$,
sudá funkce,

iii) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \langle -1, 1 \rangle$,
$P_x[k\,\pi, 0], k \in \mathbb{Z}, P_y[0, 0]$,
lichá funkce,

iv) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \langle 0, 2 \rangle$,
$P_x[(2\,k\, + 1)\pi, 0], k \in \mathbb{Z}, P_y[0, 2]$,
sudá funkce

i) $\sin^2 x - \cos 2x = 2$

ii) $\cos 2\,x - 2\,\sin x = 2$

iii) $\cos^2 x - 2\,\sin x = 2$

Rada : Jde o použití vzorců pro dvojnásobné úhly a také o pozornost při zápisu. Nezaměnit $\sin^2 x$ a $\sin 2x$. Použití závorek může zápis zpřehlednit, tj. $\sin^2(x)$ a $\sin(2x)$.
V druhé rovnici použijte substituci $t = \sin x$, která Vás dovede ke kvadratické rovnici.

Řešení :

i) $\cos x = 0$, tj. $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

ii) nemá řešení v $\mathbb{R}$,

iii) $\sin x = -1$ tj. $x = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.

i) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

ii) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

iii) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

Rada : Použijte součtové vzorce a tabulku hodnot funkcí $\sin x, \cos x$.

Řešení :

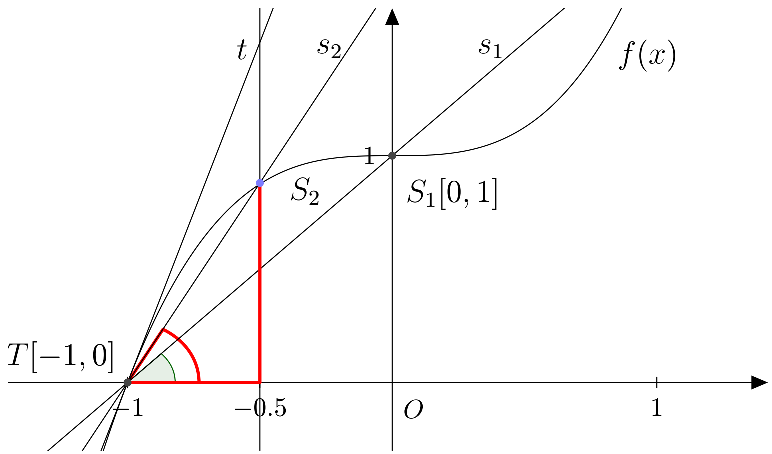
i) $\sin x\ \cos x+\frac{\sqrt{3}}{4}$,

ii) $0=0$, tj. vztah platí pro všechna reálná čísla,

iii) $\sin x=0$ tj. $x=k\,\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Zadání : Napište rovnici tečny grafu funkce $f(x) = x^3 + 1$ v bodě $x_0 = -1$.

Řešení : Bod, který má tečna procházet, si označme T. Jeho x-ovou souřadnici známe, to je x_0. Souřadnici y-ovou, snnadno dopočítáme dosazením x_0 do $f(x)$, tj. $f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$. Máme tedy bod $T[-1, 0]$.
To bylo opravdu snadné. Nesnadné je sestrojit přímku-tečnu známe-li pouze jeden její bod. Budeme-li znát dva, půjde to o poznání lépe. Zvolme si tedy druhý bod, např. s x-ovou souřadnicí $x_1 = 0$. Protože se nám bude hodit i tento druhý bod „ležel“ na grafu $f(x)$, dopočítáme si y-ovou souřadnici a bod označíme $S_1[0, 1]$.
Nyní máme dva body, přímku sestrojíme lehce, ovšem nepůjde o tečnu, aale o sečnu, jak je patrné z obrázku. Tím se ovšem nebudeme nikterak trápit a spočteme rovnici této sečny. Jednou z možností je sestavit si ze souřadnic bodů T a S_1 soustavu rovnic.



Další možností je vzpomenout si, že směrnici přímky je tangens úhlu, který tato přímka svírá s osou x. Mohli bychom tedy tento úhel změřit a tanges spočíst. Nebo vzpomínáme dále a zjistíme, že v pravoúhlém trojúhelníku je „tangens poměr odvěsny úhlu protilehlé ku odvěsně přilehlé“.
V případě trojúhelníka S_1TO jsou obě odvěsny rovny 1 a tedy směrnice sečny určené body S_1 a T je 1. Tato sečna s_1 má rovnici $y = x + 1$.
V nákresu je ještě červnený trojúhelník S_2TO s vrcholem $S_2[-0.5, 0.875]$. Směrnice sečny dané S_2 a T, lze samozřejmě také spočíst jako poměr odvě-sen. V tomto případě je „tangens červeného úhlu“ $\frac{0.875}{0.5} = 1.75$ a sečna s_2 má rovnici $y = 1.75\,(x+1)$.
Stále jsme ovšem neodpověděli na otázku jak je to s rovnicí tečny t v bodě T. To se však dá docela snadno napravit. Když umíme sestrojovat sečny, sestrojíme sečnu, která je „skoro tečnou“, K tomu si zvolíme bod S, který bude „skoro T.“ Např. pro $S[-0.99, -0.029701]$ je to „sečna-skoro tečna“ $s : y = 2.9701(x + 1)$.

Abychom se nemuseli spoléhat pouze na „skoro tečny“ a mohli spočíst rovnici tečny přesně, musíme použít aparátu limit. Limity nám dovolí přiblížit se s bodem S k bodu T natolik, že oba splynou. S tím jsou ovšem potíže, protože poměr definující tangens na-bývá poněkud zvláštního tvaru $\frac{0}{0}$. Naštěstí jsou tyto potíže řešitelné.
Dodejme ještě, že tečna t, kterou jsme měli za úkol nalézt je $t : 3(x + 1)$.
Zde nicméně odhlédněme od problémů limit a také tečen, a soustřeďme se na problémy funkcí tangens a kotagens.

ps. Neměřte úhly na obrázcích a kdybyste ná-hodou museli, buďte obezřetní. Zjistěte si kdo obrázek kreslil, jak použil měřítko, poměr x a y „dílků“ a vůbec jak byl šikovný.

Goniometrické funkce : tangens, kotangens : Načrtněte grafy funkcí, zapište vlastnosti

i) $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$

ii) $f(x) = -\mathrm{cotg}\,(-x)$

iii) $f(x) = \mathrm{cotg}\,(\pi - 2x)$

iv) $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

Rada :

Řešení :

i) základní graf,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{(2\,k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$,
$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, $P_x[k\,\pi, 0]$, $k \in \mathbb{Z}$, $P_y[0,0]$,
lichá funkce, perioda π

ii) základní graf,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\,\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
$P_x[(2\,k+1)\frac{\pi}{2}, 0]$, $k \in \mathbb{Z}$, P_y nemá,
lichá funkce, perioda π

iii) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
$P_x[(2k+1)\ \frac{\pi}{4}, 0]$, $k \in \mathbb{Z}$, P_y nemá,
lichá funkce, perioda $\frac{\pi}{2}$,

iv) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k, \pi\right\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
$P_x[-\frac{\pi}{2} + (2\,k\pi, 0]$, $k \in \mathbb{Z}$, $P_y[0,1]$, perioda 2π.

Goniometrické funkce - tangens, kotangens : Vyřešte rovnice

i) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$,

ii) $\operatorname{cotg}(2\,x) + \operatorname{tg} x = 0$,

iii) $\operatorname{cotg}(2\,x) - \operatorname{tg} x = 0$,

iv) $\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}(-2x)} = 0$.

Rada : Pomozte si vztahy pro sinus a kosinus a

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Nezapomínte na podmínky řešitelnosti, resp. definiční obory.

Řešení :

i) $x = \frac{k\,\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$,

ii) nemá řešení,

iii) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

iv) $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadání : Jaký bude rozdíl, když na 20let uložíme 1000kč na spořící účet s úročením 2.4%p.a., pokud budou úroky připisovány ročně, čtvrtletně, denně?

Řešení : Při ročním úročení bude po roce připsáno 24kč, na účtu tak bude 1024kč, což je částka, která se bude po dalším roce opět úročit 2.4procenty. Další rok znovu a znovu, tj.

$$1000 \;\rightarrow\; 1000\cdot(1+0.024) \;\rightarrow\; (1000\cdot(1+0.024))\cdot(1+0.024) = 1000\cdot(1.024)^2 \;\rightarrow\; \dots \;\rightarrow\; 1000\cdot(1.024)^n$$

Zůstatek po dvaceti letech tedy bude $1000\cdot(1.024)^{20} = 1606.94$kč.
Při využití účtu připisující úroky čtvrtletně, se prvního „výdělku“ dočkáme již po třech měsících. Připsaný úrok ovšem nebude 2.4%, aale jen $\frac{2.4\%}{4} = 0.6\%$. Po tomto první přípisu budeme tedy mít $1000\cdot 1.006 = 1006$kč. Protože za rok proběhnou čtyři přípisy, budeme po roce mít $1000\cdot(1.006)^4 = 1024.22$kč, což znamená, že jsme si polepšili o 22haléřů. Po dvaceti letech bude na účtu 1613.76kč.
Při měsíčním přípise máme měsíční úrok $\frac{2.4\%}{12} = 0.2\%$. Dvanáct těchto přípisů, tj. $1000\cdot(1.002)^{12} = 1024.27$kč, pro nás znamená další pět haléřů navíc. Haléř k haléři, korunka ke korunce po dvaceti letech dává krásných 1615.30kč.
Po denní úročení sestavme rovnou vzorec

$$\text{Zůstatek po t letech} = v\cdot(1+\frac{u}{f})^{f\cdot t} \Rightarrow \text{Zůstatek po 20 letech denní} 1000\cdot(1+\frac{0.024}{365})^{365\cdot 20} = 1616.05\text{kč},$$

kde v je náš vklad, u úrok a f frekvence úročení, (12 měsíční, 365 pro denní, atd.).
Co se stane, když budou úroky připisovány každou hodinu, minutu, sekundu, mikrosekundu, ... ??? Pomůžeme si limitou $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{u}{f})^f = \mathrm{e}^u$. Takže zůstatek u spojitého úročení bude $1000\cdot\mathrm{e}^{0.024\cdot 20} = 1616.07$kč. Takto jsme se po dvaceti letech dostali k dalším dvěma haléřům.

Úročení je jedním s klasických příkladů využití exponenciální funkcí. Další je např. popis poločasu rozpadu, kde jde samozřejmě na rozdíl od úročení o úbytek, v exponentu se tak objevuje záporná hodnota.
Při práci s exponenciální funkcí musíme umět, ostatně jak název sám napovídá, pracovat s exponenty. Připomeňme tedy

$$a^x\cdot a^y = a^{x+y},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$
$$(a^x)^y = a^{x\,y}.$$

Exponenciální funkce má předpis $f(x) = a^x$, kde základ $a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$. Její $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H} = \mathbb{R}^+$.
Pro $0<a<1$ jde o funkci klesající, pro $1<a$ je rostoucí. Průsečík s osou x nemá, s osou y ano, a to $P_y\,[0,1]$ pro všechna přípustná a.

Exponenciální funkce : Načrtněte grafy funkcí, určete $\mathcal{D}(f), \mathcal{H}(f)$, průsečíky s osami

i) $f(x) = \mathrm{e}^x$

ii) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

iii) $f(x) = 2^{-x}$

iv) $f(x) = 2 - \mathrm{e}^x$

Rada : Exponenciální funkce $f(x) = a^{b\,x}$

- $0 < a < 1$ a $b > 0$ klesá,
- $1 < a$ a $b > 0$ roste,
- $1 < a$ a $b < 0$ klesá,
- $0 < a < 1$ a $b < 0$ roste.

Řešení :

i) základní graf, roste,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0, \infty)$
P_x nemá, $P_y[0, 1]$,

ii) klesá,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0, \infty)$
P_x nemá, $P_y[0, 1]$,

iii) klesá,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0, \infty)$
P_x nemá, $P_y[0, 1]$,

iv) klesá,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0, \infty)$
$P_x[\ln(2), 0], P_y[0, 1]$.

Exponenciální funkce : Vyřešte rovnice

i) $3^{1-3x} = \frac{1}{9^{x+2}}$

ii) $2^{x^2} = 4^{x+4}$

iii) $5^{1-x^2} = 0.2^{1+x}$

Rada : převeďte na společný základ a upravte exponenty dle patřičných vzorců.

Řešení :

i) $x = 5,$

ii) $x = -2, x = 4,$

iii) $x = -1, x = 2.$

Exponenciální funkce : Načrtněte grafy funkcí, určete $\mathcal{D}(f), \mathcal{H}(f)$ a průsečíky s osami

i) $f(x) = 3^{1-3x} - 1$

ii) $f(x) = (\frac{1}{4})^{2x-3} - 4^3$

Rada :

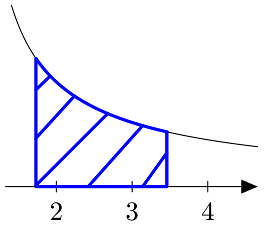
Řešení :

i) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (-1, \infty)$
$P_x[\frac{1}{3}, 0], P_y[0, 2]$, klesající,

ii) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (-64, \infty)$
$P_x[0, 0], P_y[0, 0]$, klesající

Zadání : Určete obsah plochy omezené grafem funkce $f(x) = \frac{12x^2-3}{4x^3-3x}$ a osou x na intervalu $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{12}$.

Řešení : Na uvedeném obrázku je zakreslena plocha jejíž velikost máme určit. Jde o jednu z aplikací určitého integrálu. Označíme-li plochu S, pak platí



$$S = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} \frac{12x^2-3}{4x^3-3x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left|4x^3-3x\right|\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}}$$
$$= \left(\ln\left|4(\sqrt{12})^3 - 3(\sqrt{12})\right|\right) - \left(\ln\left|4(\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})\right|\right).$$

Velikost je tedy určena, nicméně zcela jistě se vyplatí výsledek zpřehlednit. K tomu je dobré znát vzorce pro úpravu výrazů s logaritmy. Pišme tedy

$$S = \left(\ln\left|4(\sqrt{12})^3 - 3(\sqrt{12})\right|\right) - \left(\ln\left|4(\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})\right|\right) = \left(\ln\left|4(2\sqrt{3})^3 - 3(2\sqrt{3})\right|\right) - \left(\ln\left|4(\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})\right|\right)$$
$$= \left(\ln\left|96\sqrt{3} - 6\sqrt{3}\right|\right) - \left(\ln\left|12\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right|\right) = \ln\left(\frac{90\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}\right) = \ln 10.$$

Po těchto úpravách již snadno velikost plochy odhadneme. Základ přirozeného logaritmu je $e \doteq 2.718$, což je zhruba 3 a protože „třikráttři je devět“ a devět je skoro deset, bude výsledek $S =$ dvě a kousek.

A skutečně $S = \ln 10 \doteq 2.30259$

Funkce logaritmická je inverzní funkcí k fuknci exponenciální o stejném základu, takže platí
$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,$$
kde a základ logarimu $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $b \in (0,\infty)$ a $c \in \mathbb{R}$.
Toho taky můžeme využít k úpravě
$$\log_a a^x = x = a^{\log_a x}.$$
Vynecháme-li v zápise základ a, tj. píšeme pouze $\log b$, pak uvažujeme logaritmus dekadický o základu $a = 10$.
Další důležitým základem je $a = \mathrm{e}$, tím dostáváme logaritmus přirozený, který zapisujeme $\ln b$.
Následující vztahy platí pro všechny přípustné základy a, ale pro větší přehlednost jsou zapsány pouze pro logaritmus přirozený
$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b),$$
$$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right),$$
$$b \ln a = \ln(a^b),$$
s přípustnými hodnotami a, b.
Pro každý základ a je taky
$$\log_a a = 1,$$
$$\log_a 1 = 0.$$

Trocha teorie : Logaritmická funkce

Logaritmická funkce : Načrtněte grafy funkcí, určete $\mathcal{D}(f), \mathcal{H}(f)$, průsečíky s osami

i) $f(x) = \ln(-x)$

ii) $f(x) = -\log(x)$

iii) $f(x) = 1 + \log(x+2)$

iv) $f(x) = -1 + \log_2(x-1)$

Rada : Argument logaritmické funkce musí být kladný.

Řešení :

i) klesá,
$\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0), \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$
$P_x[-1, 0], P_y$ nemá,

ii) klesá,
$\mathcal{D}(f) = (0, \infty), \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$
$P_x[1, 0], P_y$ nemá,

iii) roste,
$\mathcal{D}(f) = (-2, \infty), \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$
$P_x[-1.9, 0], P_y[0, 1 + \log(2)]$,

iv) roste,
$\mathcal{D}(f) = (1, \infty), \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$
$P_x[3, 0], P_y$ nemá.

Logaritmická funkce : Upravte

i) $-\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4}\ln(4) + \frac{2}{3}\ln(8) - \frac{1}{2}\ln(16)$

ii) $\ln(\sqrt{3}) - \ln(9) - \ln(\frac{1}{3})$

iii) $\log_5(15) + \log_5(25) - \log_5(81)$

Rada : Využijte vzorců pro součet a rozdíl logaritmů.

Řešení :

i) 0,

ii) $-\frac{1}{2}\ln 3$,

iii) $3\,(1 - \log_5(3))$.

i) $2\log(x) - \log(2x) + \log(4) = 4$

ii) $\ln\left(x^2 + 3x - 6\right) - \ln(8) = \ln\left(x^2 - 3x + 6\right) + \ln(\frac{1}{4})$

iii) $\log_2(x+3) + \log_5(0.2) = \log_2(x-2)$

Rada : Využijte vzorců pro součet a rozdíl logaritmů.
Vždy stanovte podmínky, ne všechna řešení jim musí vyhovovat.

Řešení :

i) $0 < x$,
$x = 5000$,

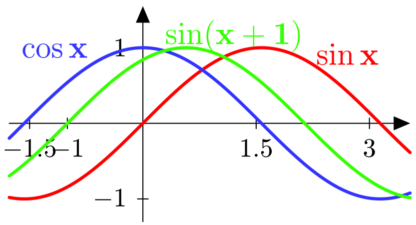
ii) $x \in (-\infty, \frac{-3-\sqrt{33}}{2}) \cup, (\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, \infty)$
$x = 6$, řešení $x = 3$ nesplňuje podmínky.

iii) $2 < x$
$x = 7$.

Zadání : Zintegrujte $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x$, a $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení : Opět nejde o nijak těžké integrování, bude nás více zajímat „grafická stránka věci.“ Nicméně přesto nejprve integrujme

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2, \qquad \int\limits_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x \, [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$



Grafy $\sin x, \cos x$

Výsledek je v obou případech stejný. Jak jsme již zmínili výsledek určitého integrálu lze interpretovat jako obsah plochy mezi integrovanou funkcí a osou x. Nejprve jsme tedy spočetli plochu „pod modrým kopcem $\cos(x)$“ a poté „pod červeným $\sin x$“. Pokud bychom počítali plochu i „pod zeleným kopcem,“ dostaneme stejný výsledek, neboť jde opět o posunutou sinusoidu.
Jak si můžete snadno ověřit pomocí součtových vzorců platí $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, to značí, že „kosinus má před sinus náskok $\frac{\pi}{2}$.“
Stejně tak „zelená“ funkce $\sin(x + 1)$ má před $\sin x$ náskok, a to 1.
Přičítání v argumentu funkce vede k posunu jejího grafu ve směru osy x.

Stejnou „úvahu“ lze samozřejmě provést pro každou funkci $f(x)$ a posouvat tak jejich grafy.
Ilustrace na funkcích $\sin x$ a $\cos x$ je zvolena kvůli připomenutí součtových vzorců. Především však protože je zde dobře vidět, že nedochází ke změně oboru hodnot funkce. V tomto případě $\sin x$ i $\cos x$ po posunu stále „kmitají“ mezi -1 a 1. Dále si můžeme všimnout, že není ovlivněna rychlost růstu (poklesu) funkce. Pro $\sin x$ i $\cos x$ zůstala stále zachována perioda 2π.
Bohužel zde není vidět, že přičítání konstanty v argumentu může vést ke změně definičního oboru funkce. Např. $\mathcal{D}(\ln x) = (0, \infty)$ a $\mathcal{D}(\ln(x + 3)) = (-3, \infty)$

Funkce - vlastnosti : načrtněte grafy funkcí, určete průsečíky s osami

i) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

ii) $f(x) = \sqrt{x+4}$

iii) $f(x) = \ln(x-2)$

Rada : Jedná se o posun základních grafů na ose x. Pokud v argumentu přičítáme, posunujeme doleva. Při odčítání doprava.

Řešení :

i)
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathcal{H}(f) = \langle -1, 1\rangle$;
- $P_y[0, \frac{1}{2}]$;
- $P_x[-\frac{\pi}{6}, 0]$, průsečík $P[-\frac{\pi}{2}, 0]$ funkce $\cos x$ posunutý o $\frac{\pi}{3}$ doprava, stejně tak se posunou všechny průsečíky, tj. $f(x) = 0$ pro $x = -\frac{\pi}{6} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$;

ii)
- $\mathcal{D}(f) = \langle -4, \infty)$;
- $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}_0^+$;
- $P_y[0, 2]$;
- $P_x[-4, 0]$;

iii)
- $\mathcal{D}(f) = (2, \infty)$;
- $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$;
- P_y - nemá průsečík s osou y;
- $P_x[3, 0]$.

Zadání : Nalezněte tečnu grafu funkce $f(x) = 4x^3 - 3\,x + 1$, která je rovnoběžná se sečnou tohoto grafu procházející body $A[-1,0]$ a $B[1,2]$.

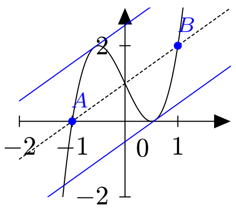
Řešení : Začněme nejprve popisem sečny, jde o přímku danou dvěma body. Tyto body určují její směrový vektor $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,2)$. Pro další výpočet však bude výhodnější využít vektor $\vec{v} = (1,1)$. Ze směrového vektoru získáme vektor normálový $\vec{n} = (-1,1)$, který je na přímku kolmý a z nějž vytvoříme obecnou rovnici. Sečnu s tedy můžeme zapsat jako

$$s: \begin{array}{rl} X & = A + t\cdot\vec{v}, \\ & t \in \mathbb{R} \end{array} \qquad s: \begin{array}{rl} x & = -1 + t, \\ y & = t, t \in \mathbb{R} \end{array} \qquad s: -x + y - 1 = 0, \qquad s: y = 1x + 1.$$

Postupně jsou zde uvedeny, vektorová, parametrická a obecná rovnice přímky v rovině. V posledním, směrnicovém tvaru, je zdůrazněna 1 jako směrnice sečny. To proto, že pomocí derivace funkce $f(x)$ nalezneme právě směrnici tečny. A protože hledáme tečnu rovnoběžnou s přímkou s, musí mít i ona směrnici 1, tj.

$$f'(x) = \left(4x^3 - 3\,x + 1\right)' = 12\,x^2 - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Zapišme rovnici tečny t pro x_1, tj. dosaďme do vzorce $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$.



$$y = 1(x - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \left(4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1\right) \Rightarrow t: y = x - \frac{9 - 8\sqrt{3}}{9}.$$

Existenci tečny rovnoběžné se sečnou nám zaručuje Lagrangeova věta o střední hodnotě.

Nicméně zde jde hlavně o připomenutí popisu a vlastností přímek v rovině. Měli byste znát vektorovou, parametrickou a obecnou rovnici, nalézt směrový a normálový vektor, poznat, kdy jsou přímky rovnoběžné.
Je-li obecná rovnice přímky tvaru

$$a\,x + b\,y + c = 0,$$

pak normálovým vektorem je $\vec{n} = (a,b)$. Směrový vektor je $\vec{v} = (-b,a)$ (případně $\vec{v} = (b,-a)$.)
Dále jsme si zde chtěli a měli zopakovat práci při úpravách výrazů s odmocninami, viz. dosazení do vzorce.

Analytická geometrie - přímky : Zapište rovnice přímek procházející body A, B

i) $A\left[2,3\right], B\left[-3,2\right]$

ii) $A\left[-1,2\right], B\left[3,-2\right]$

iii) $A\left[\frac{4}{3},-\frac{1}{2}\right], B\left[\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right]$

Rada : Určete si směrový vektor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A.$$

Řešení :

i) $\vec{v} = (-5,-1), \vec{n} = (-1,5)$,

ii) $\vec{v} = (1,-1), \vec{n} = (1,1)$,

iii) $\vec{v} = (1,7), \vec{n} = (7,1)$.

Analytická geometrie - přímky : Napište rovnice přímky k kolmé na přímku, která prochází bodem A.

i) $p: x = 3 - t, y = 1 + 2\,t, t \in \mathbb{R},\ A\,[1, 1]$

ii) $p:$ dána body $P_1\,[1, -1]\,, P_2\,[0, 2]\,,\ A\,[3, 0]$

iii) $p: 2\,x - 3\,y + 1 = 0, A\,[2, -1]$

Rada : Určete si směrový vektor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A.$$

Využijte vztahu mezi směrovým a normálovým vektorem v rovině, tj. směrový $\vec{v} = (a, b)$ a normálový $\vec{n} = (-b, a)$.

Řešení :

i) $k: -x + 2\,y - 1 = 0,$

ii) $k: x = 3 + 3\,t, y = t, t \in \mathbb{R},$

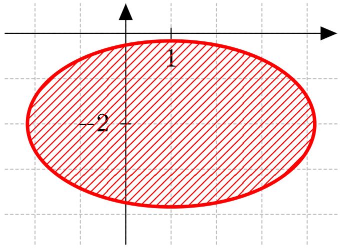
iii) $k: X = A + (2, -3)t,\ t \in \mathbb{R}.$

Zadání : Určete definiční obor funkce $f(x,y) = \ln\left(x^2 + 3\,y^2 - 2\,x + 12\,y + 3\right)$.

Řešení : Jedná se o funkci dvou proměnných, nicméně i zde samozřejmě platí, že argument logaritmu musí býti větší nule, tj.

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 - 2\,x + 12\,y + 3 &> 0 \\ \left(x^2 - 2\,x + 1\right) - 1 + 3\left(y^2 + 4\,y + 4\right) - 12 + 3 &> 0 \\ (x-1)^2 + 3\,(y+2)^2 - 9 &> 0 \\ (x-1)^2 + 3\,(y+2)^2 &> 9 \\ \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{3} &> 1. \end{aligned}$$

Při úpravách jsme použili doplnění na čtverec, tak abychom získali středový tvar rovnice kuželosečky. Jedná se o elipsu, která má střed v bodě $S[1,-2]$, její poloosy mají velikost 3 resp. $\sqrt{3}$.



Samotná elipsa je hraniční křivkou oblasti. Na této hranici je argument $f(x,y)$ roven 0, vně elipsy pak platí požadovaná nerovnost.
Elipsa a její vnitřek, které do definiční oboru funkce $f(x,y)$ nepatří, jsou zakresleny červeně. Ostatní body roviny $\rho_{x\,y}$ však můžeme do funkce dosadit.

Kružnice : střed $S[m,n]$, poloměr r

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Elipsa : střed $S[m,n]$, hlavní poloosa a, vedlejší poloosa b

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Hyperbola : střed $S[m,n]$, hlavní poloosa a, vedlejší poloosa b

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Parabola : vrchol $V[m,n]$

$$(x-m)^2 = 2\,p\,(y-n).$$

Analytická geometrie - kuželosečky : Určete kuželosečku a zapište její rovnici

i) $x^2 + 2\,x - 6\,y - 5 = 0$

ii) $x^2 + 4\,y^2 - 16\,y + 12 = 0$

iii) $4x^2 - y^2 - 8\,x + 2\,y - 13 = 0$

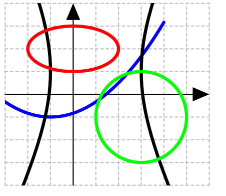
iv) $x^2 + y^2 - 6\,x + 2\,y + 6 = 0$

Rada : Může pomoci

- Stejné koeficienty u x^2 a y^2 $\rightarrow$ kružnice
- Stejná znaménka u x^2 a y^2 $\rightarrow$ elipsa nebo kružnice
- Různá znaménka u x^2 a y^2 $\rightarrow$ hyperbola
- Pouze x^2, (případně pouze y^2) $\rightarrow$ parabola

Řešení :

i) parabola, vrchol $V[-1,-1]$,
ii) elipsa, střed $S[0,2]$, poloosy $a = 2, b = 1$,
iii) hyperbola, střed $S[1,1]$, poloosy $a = 2, b = 4$,
iv) kružnice, střed $S[3,-1]$, poloměr $r = 2$.



Zadání : Nalezněte tečnu grafu funkce $f(x) = \cos^2(3\,x)$, která svírá s osou x úhel $\alpha = 60°$.

Řešení : Máme-li přímku p zadanou ve směrnicovém tvaru $y = k\,x + q$, pak směrnice k je rovna $\operatorname{tg}\alpha$, kde α je úhel, který svírá přímka p s osou x. Protože tg $60° = \sqrt{3}$, hledáme tečnu se směrnicí $k = \sqrt{3}$. Směrnici tečny nalezneme pomocí derivace

$$f'(x) = \left(\cos^2(2\,x)\right)' = -4\cos(2x)\sin(2x) = -2\sin(4x) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \sin(4x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

K vyřešení použijeme substituci $t = 4\,x$, která rovnici převede do tvaru $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Řešením jsou $t_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\,k\,\pi$ a $t_2 = \frac{5\pi}{3} + 2\,k\,\pi$ kde $k \in \mathbb{Z}$. Odsud už jednoduše vyjádříme $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\,\frac{\pi}{2}$ a $x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\,\frac{\pi}{2}$.
Takových tečen tedy je nekonečně mnoho, všechny mají tvar $y = \sqrt{3}\,x + q$. (Např. tečnu v $\frac{\pi}{3}$ má tvar $y = \sqrt{3}\,(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{4}$.) Jejich normálový vektor je $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1)$ a směrový $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$. Budeme-li si chtít provést zkoušku, můžeme použít vzorce

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|\cdot\left|\vec{i}\right|} = \frac{(1,\sqrt{3})\cdot(1,0)}{\left|(1,\sqrt{3})\right|\cdot|(1,0)|} = \frac{1\cdot 1 + \sqrt{3}\cdot 0}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Ve výpočtu $\vec{i} = (1, 0)$ značí směrový vektor osy x. V čitateli zlomku je skalární součin obou směrových vektorů a ve jmenovateli součin jejich velikostí.

Připomeňme si, že směrnice přímky je rovna tg α, kde α je úhel sevřený přímkou a osou x. Protože $\frac{\pi}{2}$ není definován, nelze ve směrnicovém tvaru zapsat přímky, které jsou rovnoběžné s osou x.
Pro výpočet odchylky dvou vektorů lze použít uvedený vzorec. Pokud chceme spočíst odchylku dvou přímek p, q vzorec upravíme

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_p\cdot\vec{v}_q|}{|\vec{v}_p|\cdot|\vec{v}_q|},$$

kde $\vec{v}_p, \vec{v}_q$ jsou příslušné směrové vektory. Absolutní hodnota v čitateli zde zajistí, že výsledná odchylka bude $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.
Skalární součin vektoru $\vec{u} = (a, b)$ a vektoru $\vec{v} = (c, d)$ spočteme

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = a\cdot c + b\cdot d.$$

Velikost vektoru $\vec{u}$ je

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}.$$

Analytická geometrie - přímky : Spočtete velikost a odchylku vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

i) $\vec{u} = (1,2), \vec{v} = (4,-2)$

ii) $\vec{u} = (1,3), \vec{v} = (-1,2)$

iii) $\vec{u} = (3,4), \vec{v} = (-1,1)$

Rada : Buďte pozorní např. v i) lze ihned odhadnout, že vektory jsou kolmé.
K určení „netabulkového“ úhlu použijte funkci $\arccos x$, tj. funkci ke $\cos x$ inverzní. K převodu z $[rad]$ na $^\circ$ pak vztah

$$\pi\,[rad] = 180^\circ$$

a taky trojčlenku.

Řešení :

i) $|\vec{u}| = \sqrt{5}, |\vec{v}| = 2\sqrt{5}, \alpha = \frac{\pi}{2}$,

ii) $|\vec{u}| = \sqrt{10}, |\vec{v}| = \sqrt{5}, \alpha = \frac{\pi}{4}$,

iii) $|\vec{u}| = 5, |\vec{v}| = \sqrt{2}, \cos\alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$,
$\alpha \doteq 1,42\,[rad]\,, \alpha \doteq 81,87^\circ$.

Analytická geometrie - přímky : Určete odchylku přímek p a q.

i) $p: X = A + t\cdot\vec{u}, A[1,2], \vec{u} = (1,-2), t \in \mathbb{B}, q: 2x + y - 4 = 0$

ii) $p: x = 1 + 3t, y = 3 + 2t, t \in \mathbb{R}, q: 2x + 3y + 1 = 0$

iii) $p: -3x + y + 1 = 0, q: y = 1 - 2x$

Rada : Buďte pozorní např. v ii), i když by se mohlo zdát, že přímky jsou kolmé, není tomu tak.
K určení „netabulkového“ úhlu použijte funkci $\arccos x$, tj. funkci ke $\cos x$ inverzní. K převodu z $[rad]$ na $^\circ$ pak vztah

$$\pi\,[rad] = 180^\circ$$

a taky trojčlenku.
Odchylka normálových vektorů je stejná jako odchylka vektorů směrových.

Řešení :

i) p, q jsou totožné přímky

ii) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$,
$\alpha \doteq 1,17\,[rad], \alpha \doteq 67,38^\circ$

iii) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Zadání : Pro funkci $f(x,y,z) = x^2 + 2x + y\,z + 3\,z^2 + y^2 - 11\,z + 13$ nalezněte body „podezřelé z extrémů “

Řešení : Nejprve je třeba spočíst parciální derivace a položit je rovny nule.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2\,x + 2 &&= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= z + 2\,y &&= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 6\,z + y - 11 &&= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2\,x &= 2 \\ z + 2\,y &= 0 \\ 6\,z + y &= 11 \end{aligned}$$

Takto jsme získali soustavu tří rovnic o třech neznámých. Protože však z první rovnice jasně vidíme, že $x = -1$, zbývá vlastně vyřešit jen soustavu rovnic dvou.
Dosazením $z = -2\,y$ (druhá rovnice) do třetí rovnice dostáváme $11\,y = -11$. Odtud pak $y = -1$ a $z = 2$.
Souřadnice bodu A, ve kterém funkce $f(x,y,z)$ může nabývat svého minima nebo maxima tedy jsou $A[-1,-1,2]$.
Provedeme-li dále test pomocí druhých parciálních derivací, zjistíme, že funkce zde opravdu má lokální minimum.

Metody řešení

Dosazovací : z jedné rovnice vyjádřit neznámou, resp. její závislost na ostatních a toto vyjádření dosadit do ozbývajících rovnic

Sčítací : sčítání rovnic za účelem vyloučení některé z neznámých

Gaussova eliminační : maticový zápis předcházejících metod

Kombinace : kombinace :)

Soustavy rovnic : Vyřešte

i) $$\begin{aligned} x+2\,y &= 5\\ 3\,x+y &= 5 \end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned} x+y-z &= 0\\ x-y+z &= 2\\ -x+y+z &= 4 \end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned} 3\,x+2\,y+z &= 8\\ -2\,x+3\,z &= 8\\ 4\,x-y+2\,z &= 8 \end{aligned}$$

Rada : Volba metody je vždy Vaší volbou, tj. vybíráte tu pro Vás nejschůdnější a nejpříjemnější cestu. Řešení soustav není obtížné, aale snadno lze udělat chybu z nepozornosti.

Řešení :

i) $x = 1, y = 2,$

ii) $x = 1, y = 2, z = 3,$

iii) $x = 1, y = 2, z = 3.$

Zadání : Určete vzájemnou polohu rovin $\tau : 2\,x - 3\,y + 2\,z - 2 = 0$ a $\rho : 2\,x - 2\,y + 2\,z - 4 = 0$.

Řešení : Existuje-li bod, který je oběma rovinám společný, musí splňovat obě rovnice. Úkolem tedy je vyřešit soustavu rovnic

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\,x - 3\,y + 2\,z & = & 2 \\ 2\,x - 2\,y + 2\,z & = & 4 \\ \hline y & = & 2 \ \text{r2 - r1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2\,x - 6 + 2\,z & = & 2 \\ 2\,x - 4 + 2\,z & = & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x + z & = & 4 \\ x + z & = & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x + z \ = \ 4$$

Odečtením rovnic se dostáváme k $y = 2$. Po zpětném dosazení této hodnoty a úpravách nám zůstává jediná rovnice o dvou neznámých. Nezbývá nám tedy než zvolit si parametr. Nechť tedy je $x = t, t \in \mathbb{R}$, pak $z = 4 - t$. Je-li $t = 0$, pak $x = 0, z = 4$. Pro $t = 1$ máme $x = 1$ a $z = 3$.
Protože za t můžeme volit libovolné reálné číslo, mají roviny τ a ρ nekonečně mnoho společných bodů. Zapišme všechna řešení

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & t, \\ y & = & 2, \\ z & = & 4 - t, t \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} X & = & A + t \cdot \vec{v} \\ [x, y, z] & = & [0, 2, 4] + (1, 0, -1)\,t, t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Tyto zápisy jsou parametrickou, resp. vektorovou rovnicí přímky, která je oběma rovinám společná. Vektor $\vec{v} = (1, 0, -1)$ je jejím směrovým vektorem.

Nezapomenout na to, že soustavy rovnic nemusí mít vždy jednoznačné řešení, ale že mohou mít také řešení nekonečně mnoho nebo žádné.
Pokud je řešení nekonečně mnoho, volíme si parametr.
Geometrickou představu situace si lze vytvořit právě na příkladu rovin.
Dvě roviny v prostoru $\mathbb{R}^3$, tj. dvě rovnice o třech neznámých nemohou mít jednoznačné řešení. To by totiž znamenalo jediný společný bod. Pokud společný bod existuje, pak existují také další a tvoří buď přímku (1 parametr) nebo celou rovinu (2 parametry) v případě rovin totožných. V případě rovin rovnoběžných společný bod neexistuje a soustava nemá řešení.
Představíme-li si roviny tři, pak již lze nalézt jejich jediný průsečík. To znamená, že soustava tří rovnic o třech neznámých může mít jednoznačné řešení. Nebo řešení závislé na jednom parametru, pokud se všechny roviny protnou v jedné přímce. Na dvou parametrech, pokud jsou všechny roviny totožné. Nebo žádné řešení, například jsou-li roviny různé rovnoběžné.
Tyto úvahy zobecňuje a popisuje Frobeniova věta.

Soustavy rovnic : Vyřešte

i)
$$\begin{aligned} 3\,x - 2\,y + 2\,z &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 4\,x + y - 2\,z &= 0 \\ 2\,x + 5\,y - 4\,z &= 0 \end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned} x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 3\,y + z &= 0 \\ x - y + 2\,z &= -1 \end{aligned}$$

Rada : Stále platí udržet pozornost a nedělat chyby.
Dále pak nebýt překvapen, že Váš výsledek nemá stejný tvar jako sousedův. Může to být dáno jinou volbou parametru, jiným postupem apod. Nicméně platí, že správné výsledky jdou převést z jednoho tvaru na druhý.
Např. v případě i) jsou uvedeny dvě vyjádření. Budeme-li se na obě dívat na obě jako na přímky, pak směrový vektor jedné je $\vec{v}_1 = \left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$ a směrový vektor druhé $\vec{v}_2 = (-2, 2, 1)$. Platí tedy $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$.
Poznamenejme ještě, že soustava typu ii), tj. s nulovými pravými stranami (homogenní) má vždy řešení, a to alespoň $x = 0, y = 0, z = 0$.

Řešení :

i) $x = t, y = t - 2, z = -\frac{3+t}{t},\ t \in \mathbb{R}$,
$x = -3 - 2\,s, y = -5 - 2\,s, z = s$,
$s \in \mathbb{R}$,

ii) $x = 1+t, y = 2+2\,t, z = 3+3\,t,\ t \in \mathbb{R}$,

iii) nemá řešení.

Ukázková zápočtová písemka :

i) Upravte výraz a stanovte podmínky, kdy je reálný : $V = \left(\frac{a}{b^2+a\,b} - \frac{2}{a+b} + \frac{b}{a^2+a\,b}\right) : \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right)$

ii) Vyřešte rovnici a stanovte podmínky řešitenosti : $\ln\sqrt{x+4} - \ln\sqrt{x-4} = \ln 12 - \ln 4$

iii) Určete definiční obor funkce : $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+5}} + \log\left(x^2-9\right)$

iv) Řešte rovnici : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

v) Řešte rovnici : $\frac{3^{x+2}}{3^{2x-4}} = 3$

vi) Napište obecnou rovnici přímky p, která p, která prochází body $P[4,7]$ a $Q[-4,-5]$.

Rada : Poraďte si sami!

Řešení : To zvládnete!!!